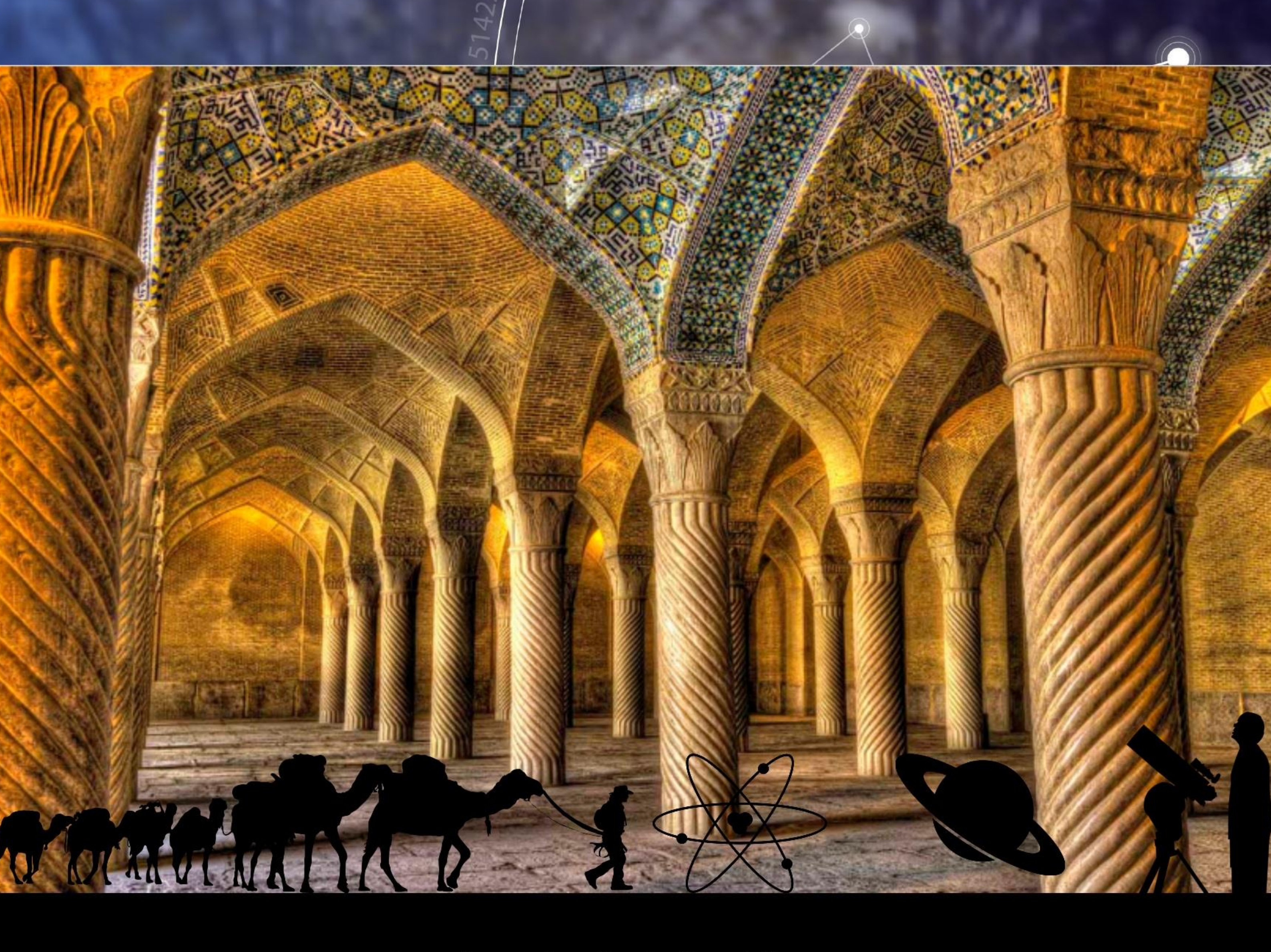


مجموعة إبن البناء المراكشي لضبط
الرياضيات والبحث العلمي

الإصدار
الثاني

كتاب
ضبط الرياضيات : سلسلة حدثني يا أستاذ

عبد الحكيم بن الأمين بن شعبانة

1443 هجرية \ 2022 ميلادية



الكتاب:	ضبط الرياضيات:سلسلة حدثني يا أستاذ
نشر:	مجموعة ابن البناء المراكشي
تأليف:	عبدالحكيم بن الأمين
إعداد وتنسيق:	عباس خضر فرج
الطبعة الثانية:	2022م- 1443هـ

كلمة للقارئ:

الحمد لله الذي بِنعمته تتم الصالحات، والصلاة والسلام على نبينا في المحيا و الممات، الذي تَرَك أُمّته على الْمَحَجّة البيضاء المليئة بالخيرات، لَيْلُها كَنَهارِها لا يَزيغ عنها إلاّ هالك، وعلى آله و صحبه و من تبعهم بالحسنات من المسلمين و المسلمات. أما بعد :

أخي القارئ، نقدم إليك الإصدار الثاني من كتاب ضبط الرياضيات (سلسلة حدثني يا أستاذ).

هذا الكتاب هو مجموعة من المقالات تمثل حصيلة عمل لسنوات في مجموعة ابن البنا المراكشي المتواجدة على موقع الفيسبوك، في شرح الرياضيات و ما يدور حولها، نرجوا من الله عز وجل أن يكون خالصا لوجهه و أن ينفع به الإسلام و المسلمين.

إن هذا الكتاب لا يتبع الطريقة التقليدية في سرد النظريات و المبرهنات و طرح التمارين، إنما الغرض منه ملئ فراغ موجود حاليا في المكتبة العربية إذ هو يهتم بشرح المفاهيم الرياضياتية، مما صنعت و لما صنعت و يربطها بالعقل البشري و بما حولنا من الكون.

بالنسبة للترميزات الرياضياتية فهذا الكتاب يتبع الاصطلاح المتعارف عليه بكتابتها من اليسار إلى اليمين.

التعريف بمجموعة ابن البناء المراكشي لضبط الرياضيات والبحث العلمي

مجموعة خيرية تنشط على موقع الفاسبوك افتتحت بتاريخ (3/10/2018) تهدف إلى إحياء وضبط الرياضيات باللغة العربية عن طريق:

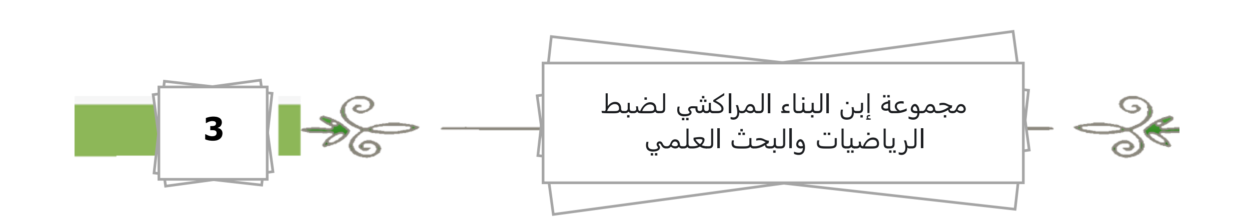
-نشر وتبسيط مفاهيمها باللغة العربية حتى يتعلم المشاركون مصطلحاتها وتحريرها بلغتنا .

-تبسيط المفاهيم الرياضياتية المكتشفة من الغرب في الأربعة القرون الأخيرة وشرح طرق صناعتها وتاريخها باللغة العربية.

-ضبط الصناعة الرياضياتية وتدريب المشتغلين بذلك عليها

فمشروع مجموعتنا يهدف إلى تكوين العقول الرياضياتية وجاء ليملأ فراغا في الشبكة عموما والمجموعات خصوصا لأن المراجع والمجموعات التي تشرح المفاهيم الرياضياتية بالعربية نادرة جدا إن لم نقل شبه منعدمة.

الذي نأمله بمشيئة الله عز وجل أن لا يكتفي المشاركون بتعلم الرياضيات فقط بل يتعلمون الضبط في جميع الميادين وأن ينشروا ما يتعلمونه هنا ويحملون المشعل غدا بفتح مجموعات أخرى مثيلة لمجموعتنا بل سنفرح إن فتحت مجموعات أخرى تضبط الرياضيات وتنشرها باللغة العربية فندعوا من استطاع لذلك كما ندعوا الجميع إلى اصلاح نياتهم وافادة غيرهم بما استفادوه هنا.



وفقنا الله وإياكم لما فيه خير. بالنسبة لما ينشر في المجموعة:

المجموعة متعلقة بالرياضيات لذلك ما ينشر فيها أنواع ومستويات.

فهناك مواضيع في المبرهنات الرياضية وهناك مواضيع في الرياضيات الدراسية

وهناك مواضيع في البناء المنطقي وهناك مواضيع في المفاهيم وهناك مواضيع حول الفلسفة الرياضية

وهناك مواضيع في تطبيق الرياضيات لذلك قد نتكلم عن الفيزياء مثلا من هذه الناحية

وهناك مواضيع حول البناء المنطقي لذلك قد نتكلم عن المنطق بصفة عامة من حيث تشابهه واختلافه مع الرياضيات وهناك مواضيع حول تدريس الرياضيات وهناك مواضيع حول البرنامج الدراسي

وهناك مواضيع لغوية في كتابة الرياضيات وهناك مواضيع عقلية لفتح التفكير لان ذلك مما تحتاجه الرياضيات

وهناك مواضيع للترفيه كالنكت الرياضياتية او المنطقية وهناك مواضيع تاريخية لتاريخ الرياضيات وهناك مواضيع في النهضة عموما والرياضيات خصوصا وهناك مواضيع في المصطلحات والترجمة وهناك مواضيع في اختلاف المدارس الرياضية وهناك مواضيع في النشر العلمي وهناك مواضيع في الكتابة بالاتكس

وهناك مواضيع في ذكاء الاطفال لأنه لا رياضيات بلا ذكاء وهناك مواضيع في بسيكولوجيا التلاميذ

وهناك مواضيع في علاقة الرياضيات بالمجتمع وهناك حتى مواضيع في كيفية النشر في الفايسبوك

وهناك....

الرياضيات مشروع مجتمع متكامل لا يقتصر على كتابة x و y

نسأل الله أن يفيد بذلك الجميع

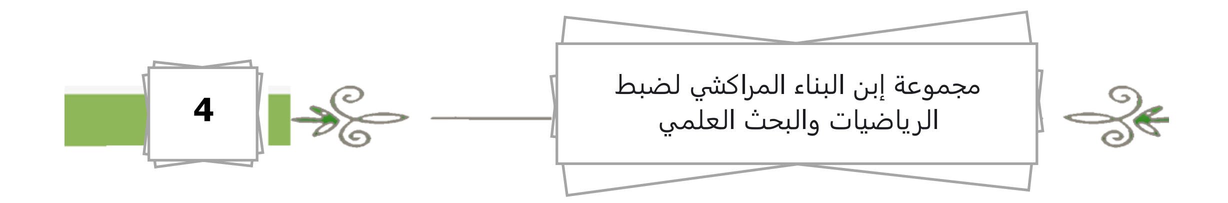
اذا كان لديك اي استفسار قم بطرحه في المجموعة، هذا رابطها:

https://www.facebook.com/groups/1821825877897150/?ref=share

لا تنسى اخي الكريم الاخ عبدالحكيم ومن قام بإعداد وتنسيق هذا الكتاب ومشرفي المجموعة من صالح دعائك وبارك الله فيك

تأليف: عبدالحكيم بن شعبانة

إعداد وتنسيق: عباس خضر فرج



مقدمة الإصدار الثاني

بسم الله الرحمن الرحيم

والصلاة والسلام على أشرف المرسلين، إمام الهدى وخاتم النبيين، وعلى آله وصحبه الميامين، ومن تبعهم بالهدى إلى يوم الدين. أما بعد:

فهذه منشورات سلسلة حدثني يا أستاذ قمت بإعادة ترتيبها وتقسيمها حسب ميادينها وبالتدرج وفصلت كل ميدان في منشور خاص به حتى يسهل على القارئ تتبع المواضيع والتدرج معها.

تمثل هذه المقالات شرح بنائي وتاريخي لمفاهيم الرياضيات مع ربطها بالواقع والمضي بها إلى التجريد المعاصر مع الضبط.

هذه المقالات عمل متواصل لحوالي سنتين ونصف من الكتابة في مجموعة ابن البناء المراكشي، وهي تمثل عصارة المفاهيم الرياضياتية التي حصلتها خلال ثلاثين سنة من دراسة الرياضيات وتمحيصها.

أقدمها إليكم سائلا الله عز وجل أن تستفيدوا منها وتفيدوا والنقل والإقتباس منها مسموح بشرط ذكر المصدر والدعاء بالرحمة والمغفرة لي ولوالدي ولأساتذتي ولمن شارك في بناء وتسيير وإثراء مجموعة ابن البناء المراكشي بارك الله فيهم جميعا.

أعتذر مسبقا على ما وقع من أخطاء إملائية في هذه المقالات ذلك أن أغلبها كتبتها على الهاتف المحمول.

عبد الحكيم بن الأمين

فهرس فهارس الفصول

	الموضــــــــــوع	الصفحـة
1	تمهيد	7
2	نظرية الأعداد	8
3	نظرية المجموعات	10
4	المنطق وطرق البرهنة	12
5	الجبر	14
6	هندسة إقليدس	15
7	التحليل : الدوال، النهايات، الاستمرار، الاشتقاق، تكامل ريمان	16
8	الطبولوجيا والهندسة التفاضلية	18
9	نظرية القياس والمكاملة	20
10	الاحتمالات	21
11	تاريخ الرياضيات	22
12	ضبط الرياضيات	23
13	طرق التدريس	25
14	الرياضيات التطبيقية	27

فهرس الفصل

تمهيد

الموضـــــــوع	الصفحة
مقدمة	30
افتتاحية	31
ابن البناء المراكشي .. مرجع أوروبا في الجبر	37
يا أستاذ حدثني عن الرياضيات في الحضارة العربية الإسلامية ؟ أين هي ؟	40
العبقرية العربية الإسلامية في الترميز الرياضي : عندما تصبح الرياضيات خوارزميات عقلية	46
متفرقات في الرياضيات وفلسفتها	47
الرياضيات قائمة على طريقة فهم البشر للواقع	49
عندما تصبح الرياضيات قاطرة العلوم ... ما لم ينتبه إليه المشتغلون عندنا بالرياضيات	50
الرياضيات مبنية على المجموعات	52
الرياضيات باختصار	53
ما هو الضبط الرياضياتي	54
مجموعة بورباكي : ما لها وما عليها	58
إلى كل من انتسب إلى علم من المسلمين	61

فهرس الفصل
نظرية الأعداد

الموضـــــــوع	الصفحـة
تذكير	66
يا أستاذ حدثني عن المجموعة	67
الصفر والمجموعة الخالية	68
حدثني يا أستاذ عن الأعداد الطبيعية	69
نظرات في مفهوم الأعداد	72
لنضبط الرياضيات معا: يا أستاذ هل فهمت فعلا برهان إقليدس في أن عدد الأعداد الأولية غير منته ؟	74
يا أستاذ حدثني عن الأعداد الأولية	76
هل الصفر عدد طبيعي ؟	82
مجموعة الأعداد الطبيعية : هل الصفر عدد طبيعي ؟	83
البرهان بالتراجع ؟ ما تركيبته الجينية ؟	85
الدالة زيتا لريمان ، لماذا ؟	86
يا أستاذ حدثني عن الأعداد الناطقة ؟ ما هي ولماذا تكتب بعدد فوق عدد ؟	87
لنضبط الحدس الرياضي معا : السلسلة المتناسقة	93
الجذور النونية : نظرة جبرية	95
يا أستاذ حدثني عن الأعداد الحقيقية	97
العدد π بين الخصائص الهندسية والخصائص الطبولوجية	118
لنضبط الرياضيات معا: العددπ	121
لنتكلم قليلا عن تعريفات العددπ	124
صناعة R بين المدرسة الحدسية والمدرسة الشكلية	125
المتتاليات الكوشية ...عندما يصبح الخيال حقيقية	128
ما هو التكميم ؟	129
الأعداد بشكل مبسط : التكرار والتوجيه	130
المجموعات العددية منN نحو C (نسخة ثانية معدلة)	133
طريقة تعميم المثال المضاد	137
القيمة المطلقة هل هي عملية حسابية أم خاصية عددية	138
هل فعلا القيمة المطلقة تنزع الإشارة كما يتوهم البعض	148
لنصنع مجموعة الأعداد المركبة بطريقة مختلفة	149
يا أستاذ : ما علاقة التمثيل الهندسي للأعداد العقدية بالدالة الأسية ؟	151
يا أستاذ هل $C=R^2$	153
القوى الطبيعية، الجذر النوني والقوى الحقيقية	154

الموضـــــــــــــــوع	الصفحـة
البعد المفقود في العمليات الحسابية ... من البعد الثاني إلى الأعداد المركبة إلى البعد الثاني عشر في نظرية الحبال	**101**
بين الأعداد الحقيقية و الأعداد القابلة للإنشاء (نسخة ثانية)	**107**
بين الأعداد المتسامية و الأعداد الحقيقية الجبرية غير الناطقة	**110**
لنتكلم قليلا عن مجموعة الأعداد الحقيقية R ، ما هي وكيف تصنع ؟	**113**
المجموعات العددية من العد الطبيعي إلى فرضية المستمر ما لم يكن يعرفه كنتور و أجاب عليه غودل عدم قابلية العد مفسرة بالقريصات	**156**
المشاغب و عد مجموعة الأعداد الحقيقية	**164**
الكتابة الرياضياتية : من العدد إلى الترميز و المتغير و المجهول	**165**
عندما يبدع أولر في حل مسألة بال	**168**

فهرس الفصل
نظرية المجموعات

الموضـــــــــــــــــوع	الصفحة
يا أستاذ حدثني عن المجموعة	170
المجموعة...	171
نظرات في نظرية المجموعات: هل المجموعة سابقة للعنصر أم العنصر سابق للمجموعة وما الفرق بين الانتماء والاحتواء ؟	172
نظرات في نظرية المجموعات: ما هو التعريف الرياضي للمجموعة	173
نظرات في نظرية المجموعات: كيف تبنى الرياضيات المجموعات وكيف تجردها عن الواقع	174
نظرات في نظرية المجموعات: أزمة الأساسيات، عندنا كادت الرياضيات أن تنهار : هل مجموعة جميع المجموعات موجودة ؟	175
نظرات في نظرية المجموعات: هل يمكن لمجموعة أن تنتمي لنفسها	177
لنضبط الأساسيات : نظرية المجموعات ZFC	178
نظرية المجموعات ZFC : كيف نبرهن وجود مجموعة الجداء الديكارتي لمجموعتين ؟	183
لماذا المجموعات الجزئية من جداء ديكارتي ليست بالضرورة جداء ديكارتي ؟	185
المجموعة : بين الانتماء والاحتواء	187
لنفهم الرياضيات كما يفهمها أصحابها : ما هي العلاقة	188
علاقة الترتيب مفهوم زائد عن مفهوم المجموعة	192
علاقة الترتيب ما هي إلا القدرة على الإختيار	193

الموضـــــــــــــــــوع	الصفحة
لنضبط الرياضيات معا : هل للدالة تعريفات متعددة ؟ ما سبب ذلك وما ينبني على تعريفاتها المختلفة ؟	246
كيف نعرف تطبيقا أو دالة في نظرية المجموعاتZFC	256
لنضبط الرياضيات معا : ما هو تعريف التطبيق والدالة في نظرية المجموعات ZFC	258
يا أستاذ، هل فعلا الدالة آلة لتصنيع الصور	259
الفرق بين الدالة و التطبيق	261
هل المجموعة الخالية دالة	265
نظرية المجموعات : تاريخ وميراث	266
المجلد الأول لسلسلة بورباكي : نظرية المجموعات	269
لنضبط الرياضيات معا: هل π معين أو مجهول ؟	270
بين مفهوم ليبنيز في المساواة ونظرية المجموعات ZFC : نسخة ثانية	279
الكائن في الرياضيات هو خصائصه	283
لنضبط الرياضيات معا , المساواة بين المجموعات	285
العد في العقل بين الحدس الواقعي والواقع الرياضياتي	287
من اللانهاية الطبيعية نحو اللانهاية القوية : قوة المستمر	289

الموضـــــــــــــــوع	الصفحـة
الرياضيات وليدة إدراك الإنسان لوجوده:لماذا المجموعة الخالية محتواة في أي مجموعة ؟	194
يا أستاذ ما هي مسلمة الإختيار	196
مسلمة الإختيار البسيط ومبدأ الثالث المرفوع	198
كل مجموعة يمكن ترتيبها بحيث لكل عنصر عنصر يليه ما عدا العنصر الأكبر إن وجد	199
الترتيب الجيد والإستغراق	201
يا أستاذ حدثني عن علاقة الترتيب	202
مسلمة الاختيار ، مبرهنة زارميلو : لماذا نلجأ لمثل هذا ؟ ولماذا يرفضها أصحاب المنطق الحدسي, هل هذه خلافات فلسفية أو صناعة لحضارة الغد ؟	206
يا أستاذ حدثني عن مسلمة الاختيار، مبرهنة زارملو، توطئة زورن : ماذا تخبرنا هذه الثلاث ؟	209
شرح و برهنة تكافؤ مسلمة الاختيار مع مبرهنة زارملو و توطئة زورن	213
هل يجب القضاء على مسلمة الإختيار	236
لنضبط الرياضيات معا : كيف تعطي الرياضيات وجودا للخصائص ؟ علاقة التكافؤ في نظرية المجموعات ZFC	237
نضبط الرياضيات معا: أين تختبئ مسلمة الاختيار	242
نظرات في استحالة وجود مجموعة جميع المجموعات	244
لندقق معا في مفهوم الدالة	245
فرضية المستمر	290
انفصال فرضية المستمر عن نظرية المجموعات ZFC	291
مبرهنة كنتور - برنشتاين : عندما تتساوى قدرات المجموعات	293
برهان ثان لمبرهنة كنتور برنشتاين	296
برهان ثالث لمبرهنة كنتور برنشتاين	297
البراهين الثلاثة لمبرهنة كنتور برنشتاين في ملف واحد	299
عندما تتساوى قدرة مجموعة الأعداد الحقيقية مع قدرة مجموعة مجموعات أجزاء مجموعة الأعداد الطبيعية	306
لننظر إلى المعادلات بطريقة مختلفة	309
العبقرية الرياضية من $E= m C^2$ إلى ZFC	311
بين الكثافة الطبولوجية ومسلمة الإختيار ... مبرهنة هان باناخ كنموذج	313
توطئة الإنقسام الثلاثي في المقارنة بين المجموعات	314
نظرية المجموعات حسب مفهوم عبابو	315

فهرس الفصل
المنطق وطرق البرهنة

الموضــــــــــــوع	الصفحــة
المنطق كأنك تراه: يا أستاذ حدثني عن المنطق	318
المنطق كأنك تراه: يا أستاذ حدثني عن المنطق :الجزء الثاني : الشبكة المنطقية، جدول الحقيقة، المكممات	323
المنطق كأنك تراه: يا أستاذ حدثني عن المنطق: الجزء الثالث : استنباط طرق البرهنة من جداول الحقيقة	331
المنطق كأنك تراه : لماذا الخطأ يستلزم الصواب ؟	336
المنطق كأنك تراه: إذا رفرفت فراشة في الصين حدث إعصار في أمريكا ... المنطق الرياضي يخبرنا أن الاستلزام $P \Rightarrow Q$ صحيح إذا كانت P و Q صحيحتين	338
المنطق كأنك تراه: كيف نفسر أن الخطأ يستلزم الصواب في المنطق الشكلي	340
لماذا المنطق الحدسي يقبل $P \Rightarrow \neg\neg P$ ولا يقبل $\neg\neg P \Rightarrow P$	342
النظرة المجموعاتية للاستلزام ومشاكلها	344
المكممات المنطقية: المكمم الكلي و المكمم الوجودي	347
المنطق كأنك تراه: هل كل استدلال صحيح ينتج قضية صحيحة ؟	350
النفي اللغوي و النفي الرياضي	352
بين المنطق الرياضي و الواقع البشري	353
معنى قضية غير قابلة للتقرير	354

الموضــــــــــــوع	الصفحــة
البرهان بالتنازل المنته	362
لنضبط الرياضيات معا : المكمم العمومي عندما يطبق على المجموعة الخالية	363
أين الخطأ ؟ سنبرهن أن مجموعة الأعداد الطبيعية منتهية بالتراجع	364
تناقض واحد يهدم الرياضيات	365
قانون ديمورغان و المنطق الحدسي والقضايا غير القابلة للتقرير	366
البرهان بالتراجع ؟ ما تركيبته الجينية ؟	368
تبرير البرهان بالتراجع	369
خطأ شائع في البرهان التراجع	370
برهان البرهان بالتراجع	371
تعميم البرهان بالتراجع على مجموعات كيفية منها المجموعات غير القابلة للعد	372
كيف أبرهن أن: $\forall\ (a,b) \in R^{2+} : (a+b)/2 \geq \sqrt{(a.b)}$	375
التمثيل في صناعة البرهان : نموذج كتابة دالة عن طريق جمع دالتين رتيبتين	376
برهان مقترح لعدم ناطقية الجذر التربيعي لـ 2	378

الموضـــــــــــــــــوع	الصفحة
متتالية غودشطاين	355
بعض النصائح في تحرير البراهين	356
مشكلة القفز عند تحرير البرهان الرياضي	357
مبرهنة عدم الاكتمال لغودل حطمت أحلام هلبرت بصناعة رياضيات مكتملة مبنية على أسس سليمة	358
مبرهنة عدم الاكتمال لغودل : لكن ماذا يفعل القط هنا ؟	359
هل يمكن إدراك الحقيقة المطلقة ونحن جزء منها ؟ مبرهنة عدم الإكتمال لغودل، إنهيار التطابق الكمي	361
كيف نبرهن أن الجذر التربيعي ل 2 غير ناطق ؟	379
سؤال طرح في المجموعة	380
لنضبط الرياضيات معا، مجموعة صحة قضية : رتابة دالة عددية على اتحاد مجالات كمثال	382
برهان مبرهنة نهاية المتتالية الرتيبة المحدودة	383
تمرين وضع في المجموعة	384
مدخل إلى القياس : برهان عدم قابلية العد لمجموعة الأعداد الحقيقية بالتراجع	386

فهرس الفصل

الجبر

الموضـــــــــــوع	الصفحة
حلقة بواقي القسمة Z/nZ	388
يا أيها الكثير حدود ذو الدرجة الفردية لماذا تقبل جذرا	390
الصفر، النقطة الشاذة في الحلقة: لماذا لا يقبل الصفر مقلوبا	391
لماذا القاسم المشترك الأكبر للصفر والصفر يساوي الصفر ؟	392
خربشات : بين الدوال الجيبية والزمرة والحلقة وكثيرات الحدود	396
الكثافة الطبولوجية والكثافة الجبرية في R	397
الدالة بين البنية الطبولوجية والبنية الجبرية للمجموعة	399
المشاغب: نظرات في الأشعة	401
الفضاء الشعاعي	402
التنوع المكمل أساس الفضاء الشعاعي	403
الشعاع يا شعاع لماذا جعلوك زورا قطعة مستقيمة موجهة	404
الشعاع والمنحى : هل هو حقيقة رياضية أم إرث تاريخي	406
الشعاع في الفضاء الإقليدي : مثال حي على قوة التجريد	410
مفهوم الجداء بين الأشعة	412
نظرات في الجداء السلمي والجداء الشعاعي وكيفية تأثيرهما في الأبعاد	413
حدثني يا أستاذ : لماذا الجداء السلمي عددي والشعاعي شعاعي وكلاهما ...	414
الشعاع مفهومه وتعريفه : من هندسة إقليدس إلى فضاء هلبرت	415
الشعاع من هندسة إقليدس إلى الفضاءات الحديثة : الفضاء الشعاعي، الفضاء النظيمي، الفضاء الباناخي، الفضاء الهلبرتي، فضاءات لوبيغ	420



فهرس الفصل
هندسة اقليدس

الصفحــة	الموضـــــــــــــوع
424	معادلة القطعة المستقيمة ، والمثلث، والمربع في المستوى
425	المشاغب: نظرات في مفهوم الدائرة
426	بين المربع والدائرة.... هل المربع شكل منظم ؟
427	طريقة أرخميدس في حساب سطح الكرة
428	طريقة أرخميدس في حساب مساحة القرص بنظرة معاصرة

فهرس الفصل
التحليل

الموضـــــــــــــوع	الصفحة
الرياضيات الممتعة - نسخة معدلة : يا تلميذ إنك تستعمل مبرهنة القيم المتوسطة في حياتك بالفطرة	430
بين الأستاذ والتلميذ : مبرهنة القيم المتوسطة	432
نظرات في الدوال المشوشة باضطرابات	433
المتتاليات، التعريف الإبسيلوني لنهايات المتتاليات	434
حدثني يا أستاذ عن اللوغارتم	438
هناك ثلاث طرق لتعريف الدالة اللوغارتمية	442
برهان نهاية نحو الأسية دون استعمال اللوغارتم	443
الدالة الأسية بين الترميز والحسابات الجبرية	444
علاقة أولر : الأسية بين المفهوم الجبري للعدد i والمفهوم التحليلي للعدد π	445
الدالة الأسية : تعميم تحليلي لخاصية جبرية	446
الدوال الليبشيتزية والدوال القابلة للإشتقاق	448
التفسير الهندسي للدالة الليبشيتزية	449
تفسير التقارب المنتظم هندسيا	450
التفسير الهندسي للإستمرار المنتظم	451
الدوال المثلثية لماذا تأخذ قيما سالبة وأصلها تحسب بأقيسة أضلعة مثلث موجبة	486
نظرات في الفروع اللانهائية لمنحنى دالة بجوار المالانهاية	487
يا أستاذ هل هناك قسمة على الصفر في النهايات	489
المشتقات، مبرهنة داربو، مبرهنة بير للنهاية البسيطة، شرط لوبيغ لوجود تكامل ريمان	491
معضلة ربط استمرار دالة حقيقية بامكانية رسم منحناها بدون رفع القلم	492
قابلية تمثيل منحنى دالة	494
بعض المفاهيم حول رسم منحنى دالة : الاستمرار - الاشتقاق - نقطة الانعطاف	495
طول منحنى دالة	498
لنضبط الرياضيات معا : مبرهنة القيم المتوسطة ، الاستمرار، دوال داربو ... لننظر للمبرهنة بشكل مختلف عن المعتاد	499
كيف تفسر وجود دوال تحقق خاصية مبرهنة القيم المتوسطة رغم أنها غير مستمرة	501
هل كل دالة لداربو تقبل دالة أصلية	505
بنية الدالة الأسية بين الجبر و الطبولوجيا، لننظر إلى الدالة الأسية بطريقة مختلفة: بُنيتها وعلاقتها بالدوال الجيبية	506
كيف يمكن تعريف الدالة الأسية بالنشر والنشر يحتاج للاشتقاق	510
كيف نبرهن أن السلسلة المتناسقة (الهارمونية) متباعدة	511

الموضــــــــــــــوع	الصفحة
ولادة الحساب التفضالي	452
الفرق بين الاشتقاق و التفاضل	454
بين التفاضل والتكامل	455
يا أستاذ حدثنى عن : الدوال، النهايات، الاستمرار، الاشتقاق، التفاضل، التكامل ... ما هي كل هذه المفاهيم وما فائدتها	456
حول مبرهنة الحصر في النهايات	461
بين مبرهنة التزايدات المنتهية ومبرهنة المتوسط	463
من مبرهنة القيم المتوسطة ونحو مبرهنة التزايدات المنتهية	464
التقريب، التقريب التآلفي	465
الاشتقاق لماذا	468
النشر المحدود	470
لنضبط الرياضيات معا : الفرق بين جذور كثير الحدود و أصفار الدالة، هل يوجد ما يسميه البعض بحل مضاعف	471
ما لم يذكره الأستاذ للتلميذ حول الدوال المثلثية	479
لماذا تظهر الدوال المثلثية في غير المثلثات ولماذا نستطيع كتابتها بالدالة الأسية	485

الموضــــــــــــــوع	الصفحة
مدخل إلى التكامل باستعمال طريقة الربط بين المعارف	512
نظرة طبولوجية في الدوال المستمرة: ما هو إستمرار دالة	517
الاستمرار والتكامل : نظرة طبولوجية	519
العرب و التكامل	520
المبرهنة الأساسية الأولى والثانية في التحليل : تكامل ريمان	521
لنضبط الرياضيات معا: علاقة تكامل ريمان بالدالة الأصلية وبالإستمرار	522
وجود تكامل ريمان لا يعني وجود الدالة الاصلية	524
الاستمرار ليس بشرط في دالة لوجود دالة أصلية لها	525
لنضبط الرياضيات معا: التفريق بين وجود الدالة الأصلية وكتابتها بعبارات مألوفة	526
هل حساب العدد المشتق يحتاج لأن تكون الدالة معرفة على مجال	527
في الاشتقاق : هل نستعمل نسبة تغير أو نسبة تزايد	529
استمرارية دالة الجذر التربيعي عند الصفر	532
من أخطاء عدم ضبط نظرية المجموعات ZFC	538

فهرس الفصل
الطبولوجيا والهندسة التفاضلية

الموضـــــــــــــــــــوع	الصفحـة
يا أستاذ حدثني عن الطبولوجيا	542
مفهوم الإقتراب بين الحدس البشري والتكميم الرياضي	545
النهاية : نظرة طبولوجية	546
التطور التاريخي لتعريف النهاية	547
النهاية والمالانهاية	549
الفرق بين النهاية والمساواة لدالة	550
المتتاليات، النهايات، المتتالية الكوشية كيف..	551
هل يجب قتل الإبسيلون	555
عندما يصبح الإبسلون عددا متناهي الصغر	556
الإبسيلون المظلوم في فهمه	558
الإبسيلون المظلوم في فهمه (نسخة 2)	559
إبسيلون هلبرت	561
المشاغب الحكيم والقط المتشغشبرودنجر: عندما يتجاوز الإبسيلون الزمن	562
المالانهاية العددية : بين الجبر والطبولوجيا	565

الموضـــــــــــــــــــوع	الصفحـة
الفرق بين عدد نقاط قطعة مستقيمة وطولها	573
كيف نمر من التفسير إلى التحرير: نموذج : هل نهاية المتتالية تتعلق بترتيب حدودها	574
بين القياس والطبولوجيا	576
خاصية الحد الأعلى، مبرهنة ويستراس في بلوغ الدوال المستمرة حديها داخل متراص، مبرهنة ريس في الفضاءات ذات كرات الوحدة المتراصة	577
لنضبط الرياضيات معا : خصائص الدالة تدرس على مجموعة تعريفها، مبرهنة بلومبرج كنموذج	580
بين المفهوم والتعريف : التعامد في فضاء هلبرتي نموذجا	581
بين الجداء السلمي ومسلمة التوازي ومبرهنة فيثاغورث ومبرهنة طاليس	582
ماذا أضاف الجداء السلمي على النظيم في فضاء شعاعي	583
تفسير متراجحة كوشي شوارز في الجداء السلمي	584
تكميم تغيير الإتجاه : من الزاوية إلى الجداء السلمي	585
بين نظيم الدالة ونظيم شعاع	586
كثيرات الحدود المتعامدة ؟ هل هي واقع معاش أو جنون رياضياتي ؟	587
ماذا تخبرنا مبرهنة التمثيل لريس فريشي	591
المشاغب: ما هو الجبر الباناخي	592

الموضـــــــــــوع	الصفحـة
الخاصية المحلية في الرياضيات	566
ما العلاقة بين النظيم و المسافة	569
الفرق بين النظيم و المسافة	570
نظرات في المفاهيم الهندسية: ما هو المستقيم وماهي الإستقامة	571
الاستقامة بين الفضاء الشعاعي و الفضاء المتري	572
نظرات في تحويل فوريه، تحويل لابلاس، و التوزيعات	593
يا أستاذ حدثني عن المنوعات التفاضلية	595
من البنية الطبولوجية نحو البنية التفاضلية	598
ما هي زمر لي	600

فهرس الفصل
نظرية القياس و المكاملة

الموضـــــــــــوع	الصفحة
مدخل إلى القياس : برهان عدم قابلية العد لمجموعة الأعداد الحقيقية بالتراجع	602
تعريف العشيرة	603
تعريف القياس	605
يا أستاذ حدثني عن القياس و التكامل	607
بين الدوال المستمرة و الدوال القيوسة	616
حدثني يا أستاذ عن الفرق بين تكامل ريمان و تكامل لوبيغ	617
نظرات في تكامل لوبيغ وريمان	618
نظرية التقارب المهيمن تضمن وجود تكامل لوبيغ لكنها لا تضمن تواجد تكامل ريمان	619
التقارب المهيمن : عندما نتجنب الانفجار	620
تكميم الواقع بين العد و التكامل	622
كمية الدالة بين تكامل ريمان وتكامل لوبيغ	623
الدالة بين تكامل ريمان وتكامل لوبيغ : التكامل كأنك تراه	624
الدالة بين تكامل ريمان، تكامل لوبيغ، وتكامل كورزويل- هينستوك : نحو تكامل أعم من تكامل لوبيغ	627
الدالة بين تكامل ريمان، تكامل ستلجس، تكامل هيتو : نحو تكميم أعم للدالة	629

الموضـــــــــــوع	الصفحة
نظرة تاريخة لأسباب ظهور تكامل لوبيغ	631
التكامل المضاعف، مبرهنة فوبيني، تكامل غوص	632
بين الواقع و الرياضيات : تكامل لوبيغ و البنية الجبرية نموذجا	633
التكامل و الحواف : من المبرهنات الأساسية في التحليل إلى مبرهنة ستوكس ومبرهنة الرواسب	634

فهرس الفصل
الاحتمالات

الصفحة	الموضـــــــــــوع
639	نظرات في الاحتمالات
640	المشاغب والقط المتشغشبرودنجر والإحتمالات مطبقة في فيزياء الكم
643	وماذا لو كانت كل هذه الحسابات مجرد نظرة بشرية للكون ؟
646	عندما يتغير إطار الحوادث

فهرس الفصل
تاريخ الرياضيات

الموضـــــــــــــوع	الصفحـة
نظرة تاريخية سريعة لتطور الرياضيات	649
المؤتمن بن هود	650
أبو الحسن علي القلصادي واضع الترميز الرياضياتي	651
من تاريخ الرياضيات : بين كروينكر ووير ستراس	652

فهرس الفصل
ضبط الرياضيات

الموضـــــــــــــوع	الصفحـة
الرياضيات تفكير سليم بتجريد أفكار بسيطة	654
البناء المسلماتي في الرياضيات	655
ميراث نيكولا بورباكي في الرياضيات	656
بورباكي : الفرق بين البرهنة والتفسير	657
التفسير في الرياضيات	658
النظريات الرياضية تمر بثلاث مراحل	659
الرياضيات بين الضبط والتحريف	660
بين التعريف والتخريف، الرياضيات ليست مجرد تطبيقات	664
بين الرأي والاجتهاد	665
لنضبط الرياضيات معا: هل هذه المعادلة تقبل حلا في مجموعة ما	668
رحلة ألف قرن وقرن في البحث عن المثالية البشرية في الصفر المتناهي في الصغر	669
كيف تتخلص الرياضيات من الذوق البشري : الإبسيلون نموذجا	671
ما الفرق بين الوصف الحدسي والتعريف الرياضي	672
لنضبط الرياضيات معا: هل 1= ... 0.999	673
المشاغب والترجمة	703
هل المصطلحات الرياضية توقيفية أو اجتهادية ؟ الكتابة النظيفة وغير النظيفة لعدد حقيقي	704
الكتابة العشرية النظيفة وغير النظيفة	706
لنضبط الرياضيات معا: خصائص الكائنات الرياضياتيه الوجودية والبنائية وعلاقتها بالحدس الرياضياتي	711
لنضبط الرياضيات معا: بين الخاصية والتعريف : هل ترتقي خاصية لتصبح تعريفا	716
لنضبط الرياضات معا : هل نتخذ المبرهنة كتعريف ؟ الاستمرار عن اليمين وعن اليسار كنموذج	718
بين المعرفة الرياضية والمعرفة الواقعية	720
بين المبرهنات الرياضية والنظريات الفيزيائية	721
ما هو التخيل ؟	722
ما الفرق بين الثابت و المتغير و قيمة من قيمه والمجهول والوسيط	724
لنضبط الرياضيات معا : عندما لا يفرق التلميذ بين عبارة الدالة والدالة	725
لنضبط الرياضيات معا : مسألة اليمين واليسار في R	726
لنضبط الرياضيات معا: هل عندما ندرس نهاية دالة عند نقطة من حواف مجال تعريفها بحيث لا تكون معرفة عندها فنحن ندرس خاصية للدالة ...	728
لنضبط الرياضيات معا: عدد، شعاع، قياس، مسافة لما كل هذه المفاهيم ..	729

الموضـــــــــــــــوع	الصفحــة
لنضبط الرياضيات معا: لماذا ندرس أصفار المقام في الدوال الحقيقية من الشكل f(x)/g(x)	675
مفاهيم الرياضيات لماذا ؟ هل هو تفلسف زائد أو بناء رائد ؟	676
لنضبط الرياضيات معا: هل يصح استعمال المشتقة لبرهنة نهاية sin(x)/x	684
لماذا لا يستطيع التلاميذ تحرير البراهين	687
اللغة الرياضياتية : بين العرف والوضع و القياس	690
العرف العلمي في الرياضيات	692
النص العلمي بين القواعد العلمية والقواعد اللغوية	693
هل الحكم للمعنى اللغوي أو الرياضياتي في الرياضيات	694
المصطلح الرياضي بين العربية واللغات الغربية	695
من الأخطاء الشائعة : حمل المصطلحات العلمية على معاني ألفاظها اللغوية	696
بين المعنى اللغوي والعرفي والإصطلاحي : الإبسيلون نموذجا	697
الفرق بين الكتابة الرياضية والكتابة اللغوية	698
الفرق بين الكتابة الرياضية في القرون السابقة والرياضيات المعاصرة	699
لنضبط الرياضيات معا : بين القواعد اللغوية والاصطلاحات الرياضية	700

الموضـــــــــــــــوع	الصفحــة
ما هو سبب ضبط الرياضيات	731
التجريد الرياضي وعصر المعلوماتية : العملة النقدية بيتكون نموذجا	732
عصر المعلوماتية وليد نظرية المجموعاتZF	734
الحضارة المعاصرة قائمة على نظرية المجموعاتZFC	735
الرياضيات مبنية على الانتظام والتفرد	736
البناء في الرياضيات	737
الحدس الرياضي بين الخطأ والصواب	738
الحدس الرياضي متصف بنقاء التجريد	739
التعريفات الرياضياتية لم توضع من أجل التعريف فقط	742
لنضبط الرياضيات معا : كيف نحرر برهانا عن طريق مثال تطبيقي	744
ماذا لو كانت المالانهاية مجرد جهلنا بالمنتهي	746
كيف أصبح قويا في الرياضيات	747





فهرس الفصل
طرق التدريس

الموضــــــــــــوع	الصفحة
يا أستاذ كيف تشرح فكرة حل للتلميذ	749
الأستاذ بين الرياضيات وبيداغوجية الرياضيات	752
كيف تعالج التلميذ الذي يقع في هذا الخطأ الشائع في الصورة يا أستاذ	754
الدوال العددية في المناهج التدريسية	755
المشاغب المجنون: نحن نعلم وأنت لا تعلم	756
عندما يشارك الإعلام في صناعة الحضارة، لا تستهينوا بالقدوة فأطفال اليوم رجال الغ	757
إن الحضارة تصنع في مهود الأطفال	759
قلة الضبط مشكل ثقافي	762
عندما يقيس النحويون ... يا استاذ لا تتوقف عن المطالعة	763
عندما يتحول الأستاذ إلى عامل في الماكدونالد	764
لنفكر كما يفكر الرياضياتيون فإن الإنسان يولد في أربع أبعاد ثم تسجنه المدرسة في بعدين	765
عندما يأكل القط الدلاع. التلميذ بين الذكاء الفطري و الجمود البشري	768
نحو تنقيط أفضل لإمتحان التلميذ، لما لا ننقط بالأعداد المركبة في تصحيح الإمتحان	770
لكل أستاذ يدرس لسنوات فيصاب بالإحباط لأن التلاميذ لا يتابعون	771

الموضــــــــــــوع	الصفحة
التدريس بين الضبط العلمي و الضبط المنهجي	777
البعض يجد صعوبة في فهم الرياضيات و هذا ناتج من سببين	778
العلم و الكتاب	779
التلميذ بين التشويه و التجريد	780
ربط إستمرارية الدالة بالمنحنى خطأ رياضيا	781
من ذكريات الجامعة : إذا لم تستطع البرهنة على المطلوب لعقبة رياضية فابحث عن مثال مضاد	782
إلى الأساتذة : وصف لمحاضرات وتواضع لوبيغ صاحب التكامل	783
لماذا نحفظ جدول الضرب	784
ما لا تذكره مذكرة الأستاذ : الربط بين المعارف	785
وقفت أمام تلامذتك تشرح لهم درسا، فكيف تريهم حلاوة الرياضيات	788
نصيحة للطلبة و الأساتذة : كيف نَدرس ونُدرس الرياضيات	789
الأعمى و الفأر	791
التلميذ و الاعتقاد في التقليد	792
نصائح للمثقف	793

الموضـــــــــــوع	الصفحة
بين الخبز و الفرماج (الجبن) : التدريس الأكاديمي و التدريس الإبداعي	772
هل يحب إعادة بربكة الرياضيات المدرسية	773
عندما لا تشرح أهمية المفاهيم للتلميذ	774
الأسئلة لا تطرح فقط من أجل نقل التعريف الرياضي، إنما المجموعة تهدف كذلك إلى امور عدة	775
عندما أشعر بالفضول حيال شيء ما	776

الموضـــــــــــوع	الصفحة
الحاجة أم الإختراع إنما التطور وليد المستحيل	794
التعليم بين جمود الموروث الفكري للكبار وحب الاستفسار للصغار	795
عندما يكون الغباء معديا: تجربة آش في الإنسياق	796
الطريقة السنغافورية	798



فهرس الفصل
الرياضيات التطبيقية

الموضـــــــــــوع	الصفحة
أهل العلم بين العوام دراويش : النظرية النسبية لأينشتاين نموذجا	801
العناصر بين التعميم البيولوجي و التجربة الفيزيائية و الدقة الرياضية	802
التجريد بين الرياضيات و الفيزياء و الإعلام الآلي	803
لماذا تستطيع الرياضيات التعبير بدقة عن الظواهر الكونية	807
عبقرية العقل البشري في التعبير عن الظواهر الكونية	808
من الظواهر الكونية نحو فضاء الدوال الحقيقية	810
ما مدى وصف الرياضيات للواقع	811
هل واقعنا فضاء باناخي	813
ازدواجية النظر للظواهر الكونية والرياضيات المعاصرة ...	814
يولد الإنسان في أربعة أبعاد ثم تسجنه المدرسة في بعدين	819
بين الحقيقة الرياضية والحقيقة البشرية : آلبرت أينشتاين ونيلس بور	822
النظريات الفيزيائية بين الواقع وما نعتقد أنه الواقع	824
ما الفرق بين البرهان الرياضي والبرهان الفيزيائي	826
بين المبرهنات الرياضية والنظريات الفيزيائية	827

الموضـــــــــــوع	الصفحة
ماذا تخبرنا الطبولوجيا	829
النظريات الفيزيائية والحسابات الرياضية : عندما يكذب الواقع النظرية	832
بين التغير الزمني والتغير الرياضي	833
النسبية : عندما أصبح الزمن بعدا رابعا .... ثم قامت الحرب العالمية الأولى	834
نظرات في إختلاف مفهوم الزمن بين النظريات الفيزيائية الحديثة	836
المشاغب و القط المتشغشبرودنجر : ما لا تعرفه عن الإبسيلون، الحتمية، الزمن ومشكلة اختفاء المعلومة	838
قوانين الكون مبنية على التركيب والتكرار والتقطع	841
لماذا تظهر المعادلات التفاضلية في الواقع	842
القط المتشغشبرودنجر : صديق فيغنر أو أكوان متعددة	843
أينشتاين، بور، شرودنغى، هايزمبرغ ... فيزيائيون بعقول رياضياتية	844
المشاغب الحكيم والقط المتشغشبرودنجر: فرضية ريمان وميكانيك الكم	845
فضاءات لوبيغ L^p لماذا ؟ من ميكانيك نيوتن إلى ميكانيك الكم	846
البنية الجبرية، البنية الطبولوجية، البنية التفاضلية. ما الذي تخبرنا به هذه البنيات	847
المشاغب: قانون بنفورد	850



الموضـــــــــــوع	الصفحـة
النقاط المتشابهة بنائيا بين النظرية النسبية الخاصة و نظرية القياس و المكاملة	828

الموضـــــــــــوع	الصفحـة
التجربة في الرياضيات	851

تمهيد

مقدمة:

العلم ثلاثة أشبار ، فمن أدرك الشبر الأول تكبّر ، ومن أدرك الشبر الثاني تواضع ، ومن أدرك الشبر الثالث عَلِمَ أنه لا يعلم شيئا.

الحضارة تبنى على ضبط العلم والعمل.

نحن لا نطالب بالضبط في الرياضيات فقط بل نريده في جميع مجالات الحياة لأنه معيار حضارة وعليه تبني، فلا نريد أن يموت مريض في مستشفى بسبب تأخر في موعد دوائه ولا أن يقع حادث سيارة بسبب أن مصنعها زاد أو أنقص واحد مليمتر في سمك لوحات الكوابح ولا أن ينقطع الماء لأيام على المنازل لأن أحدهم لم يستخدم الأنابيب المناسبة لوصل الماء.

هي مسألة إتقان العمل وفق علم مضبوط فليس من شيء أن الغرب صعدوا للفضاء وينتجون القمح والحليب بما يكفيهم ويصدرونه لغيرهم.

إنما هي ثقافة أمة يحاربها الجهلة لقصور علمهم وفهمهم.

فعليكم بالضبط وعلموه أولادكم وتلاميذكم وانشروه حولكم لعل ذلك يساهم في نهضة أمتنا.

ما هو الضبط:

الضبط درجة تبلغها في علم عندما تعرف حدود الأشياء فتفرق بين المتشابهات وتجمع بين المختلفات.

فالعلم تدرك فيه درجات أما الاولى : فمعرفة عامة

أما الثانية فمتوسطة تعرف قواعده و تطبيقاتها،

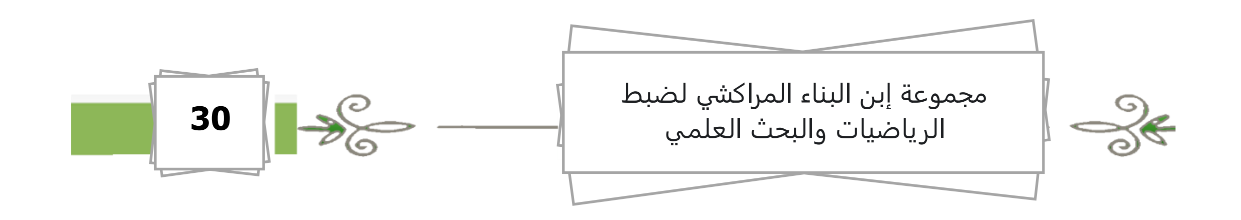
لكن المرحلة المهمة هي الثالثة أين تستطيع التفريق بين المتشابهات فالقاعدة قد تطبق على شيء لكن لا على شبيه لفرق جوهري تنبني عليه القاعدة فهذا ما نسميه الضبط وعامة أخطاء انصاف المتعلمين من قبيل هذا إذ يخلطون بسبب المتشابه و لا يستطيعون التقريب بين المختلف.

مراتب العلم ثلاث فهم ثم ضبط ثم إدراك.

أما فهم علم فهو معرفة قواعده وكيفية تطبيقها ومتى تطبق

وأما ضبط العلم فهو معرفة طريقة صناعة قواعده والفروق بين متشابهه والتشابه بين مختلفه وهذا نسميه أصول العلم.

واما إداركه فهو معرفة مقاصد مجموع قواعده وإلى ما ترمي إليه ككلها لا كآحادها وهذه مقاصد العلم.



افتتاحية

بسم الله الرحمن الرحيم

قال تبارك وتعالى : (قُل لَّوْ كَانَ الْبَحْرُ مِدَادًا لِّكَلِمَاتِ رَبِّي لَنَفِدَ الْبَحْرُ قَبْلَ أَن تَنفَدَ كَلِمَاتُ رَبِّي وَلَوْ جِئْنَا بِمِثْلِهِ مَدَدًا (109)) الكهف

اللهم صل وسلم على نبيك الأمين وعلى آله وصحبه الميامين ومن كان على نهجهم إلى يوم الدين.

أما بعد، فإن الرياضيات علم سريع التطور، يانع مثمر، مشوق إذا فهم ومنفر إذا جهل، كلما اكتشف فيه شيء تولد منه أشياء .

علم ورثته حضارة عن حضارة، ببنائه لبنة بلبنة، كل يضيف عما صنعه سابقه، إلى أن وصل إلينا، فورثنا الهندسة من الحضارة الإغريقية والأرقام من الحضارة الهندية والزوايا من الحضارة البابلية والكسور والمعادلات والدوال والترميز وأقسام الرياضيات من الحضارة الإسلامية والضبط من الحضارة الغربية.

بدأت قصة الرياضيات في القدم عندما بدأ الإنسان بالجمع بين المتشابهات بخواصها ويعطي وجودا لهذه الخواص بمقابلة المجموعات ببعضها و باختيار ممثل من جنسها فاكتشف العد بمقابلة عناصر المجموعات بأصابع اليد ثم بما أمكن عده فاخترع مجموعة الأعداد الطبيعية وعدها على النظام العشري عند الكثيرين والنظام العشريني عند حضارة المايا، و بنظامين عشري و ستيني عند الحضارة البابلية.

ثم زادت كل حضارة بزيادتها فقام الإغريق بدراسة الهندسة وحساب المساحات فقابلوا الأعداد بها، وحاولوا كعادة البشر فصل الخصائص عن الأشياء فمثلوا للطول بالقطعة المستقيمة وللاستدارة بالدائرة وجداء الأعداد بالمساحات فبرهنوا بذلك مبرهنات كمبرهنة فيثاغورس و مبرهنة طاليس وحسبوا وطول الدائرة ودرسوا الأعداد بالجمع و الضرب و الطرح و القسمة وربطوا بين الأطوال و المساحات في المستوي مع الأعداد، ووضع أرخميدس بذرة الحساب غير المنتهي بحساب المساحات كمساحة القرص ووضع إقليدس نظام المسلمات لبناء الهندسة وباستعمال المنطق نظام المبرهنات فكان أول بذرة للضبط.

لكنها الرياضات كلما أنشئ شيء أثمر بأشياء، فلما أكتشفوا الأعداد غير قابلة للتفكيك سموها الأعداد الأولية و درسوها وبرهن إقليدس على عدم نهايتها ولما اكتشفوا العدد پي بطول الدائرة ومساحة القرص تساءلوا عن ماهيته فقربوه بأعداد كسرية و بمبرهنة فيثاغورث اكتشفوا وجود أعداد غير كسرية، بل ذهبوا إلى أكثر من ذلك عندما بدأوا يقسمون المسافة إلى أجزاء لكن كالعادة صدم المبرهن مع نظرتهم للواقع وعند اصطدام المبرهن مع الواقع فلابد من تصحيح أحدهما إما أن المبرهن قام على مسلمات لا توافق الواقع أو أن نظرتنا للواقع خاطئة فلم يستطع الإغريق تجاوز ذلك.

أما الهنود فكانت لهم اليد الاولى في ترميز الأعداد ودراسية الجيوب المثلثية، واكتشفوا كالإغريق مبرهنة فيثاغورس و العدد پي بل ذهبوا إلى أكثر من ذلك حسبوا الجذر التربيعي لإثنين و قربوه إلى خمس أرقام بعد



الفاصلة ووضعوا نظام العد العشري و الأرقام بعد الفاصلة باكتشافهم الصفر،وتبسيط الترميز للأرقام و للكسور، و اهتموا بالمجموعات ووضعوا مفاهيم للمالانهاية، وبداية مفهوم الدوال.

بل توصلوا إلى بداية علم التحليل فنجد في كتاب يوكتيبهاسا الهندي (1530 ميلادي) تقريب الدوال إلى متتاليات بما يوافق ما نسميه اليوم نشر تايلور.

أما البابليون فقد وضعوا النظام الستيني لحساب الساعات و به صنعوا الكسور واعطوها مفهوم العدد، فاجروا عليها العمليات، ووضعوا الخوارزميات لحل بعض المعادلات من الدرجة الأولى والثانية و الثالثة.

أما حضارة الفراعنة، فبرعوا في القياسات وحساب المساحات، فاستعملوا عدة وحدات للأقيسة و حولوا الحسابات من قياس لآخر، واكتشفوا بعضا من الكسور، والمعادلات من الدرجة الثانية، والمتتاليات الحسابية و الهندسية.

وللحضارة اليابانية اكتشافاتها لكن لانغلاقها لم تصل إلينا و كذلك الصينية لبعدهم وحضارة المايا لانعزالهم عنا.

أما الحضارة الإسلامية فقد جمعوا ميراث ما وصل من هذه الحضارات فهذبوا هذه العلوم، فاعطوا للصفر مفهوم العدد و بسطوا الحسابات باختراع الترميز للخواص فهم أول من رمز للمجاهيل، ووضعوا رموزا للقوى، و اعتبروا الكسور كأعداد كاملة وحسنوا ترميزاتها، ووضعوا خوارزميات كاملة لحل المعادلات من الدرجة الأولى و الثانية، و بدؤوا بحل المعادلات من الدرجة الثالثة مما مهد لظهور مفهوم كثير الحدود، و اكتشفوا العلاقات الجيبية ووضعوا جداول لحساب الجيوب مما مهد لظهور مفهوم الدالة، و كان بذرة لظهور الدالة اللوغارتمية والأسية بسبب خاصية تحويل جمع الدوال الجيبية إلى الضرب.

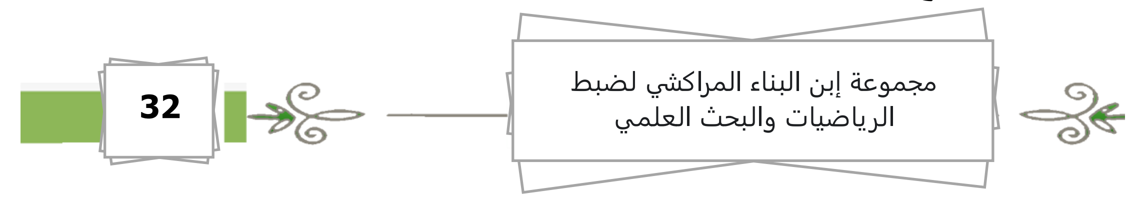
ووضعوا الكسور العشرية و التقريبات بها بحثا عن قيم أفضل للجيوب مما مهد لظهور الأعداد الحقيقية، واكتشفوا الموافقات ودرسوا القوى في الأعداد الطبيعية ومنها بعض الحالات من معادلة فيرما.

ورسموا المنحنيات وحلوا بها المعادلات و قربوا بها مما مهد إلى ظهور علم التحليل و المشتقات.

وتصوروا مفهوما للمالانهاية في الماضي و في المستقبل من خلال ردودهم على الفلاسفة في بداية العالم وفي أن الله عز وجل لا بداية له بل المتأمل في مسألة تسلسل الحوادث وكل ما دار حولها يبين تصورهم للمتتاليات واللانهايات في الماضي و في المستقبل و المجموعات غير منتهية العناصر.

وهذبوا هذه العلوم في فروع وضعوا لها قواعد ومبرهنات و التهذيب أول طريق لتسريع الابتكار.

فلما انتقل هذا الميراث إلى الغرب، اكتشفوا الأعداد الحقيقية والأعداد المركبة ووضعوا اللوغارتميات و الدوال الأسية، وأعطوا معاني للنهايات و المشتقات والحسابات غير المتناهية من خلال أعمال نيوتن وفيرما و ليبنز ، و صنعوا السلاسل وحاولوا تقريب الدوال بكثيرات حدود مما أنتج النشور المحدودة ، وربطوا بين الجبر و التحليل و حاولوا فهم الأعداد الأولية بذلك وصنعوا مفاهيم جديدة من خلال أعمال ريمان بإنشاء هندسة جديدة و تعريف التكامل و وضع دوال تربط بين التحليل و نظرية العدد.



لكنها الرياضيات كلما وضع مفهوم أثمر وأينع بمفاهيم أخرى، فبولوجهم إلى النهايات و الإستمرارية ظهرت التناقضات بين المبرهنات بل حتى الحسابات تناقضت أحيانا، لأن عالم المالانهاية غريب عجيب فلزم من ذلك وضع ضبط لكل هذه الاكتشافات و قواعد متينة، فكان عملا استمر قرنين من الزمن بوضع تعاريف مضبوطة للنهايات، مرورا بأعمال كانتور لوضع صناعة رياضية مضبوطة لنظرية المجموعات فأعطى مفهوما لعدد عناصر المجموعات غير المنتهية فتجاوزت قابلية العد إلى ما بعدها ثم هلبرت التي حاول إعادة تنظيم كل ما برهن بإنشاء تعريفات طبولوجية مضبوطة للمفاهيم السابقة.

بل ذهب هلبرت إلى أكثر من ذلك بوضع أسئلة تمثل خطة عمل للرياضياتيين للقرون القادمة، لا يفصلنا عن هذه الأعمال اليوم إلا حوالي قرن وقرابة عشرين سنة.

وتزامن عمل هلبرت ظهور النظرية النسبية لأينشتاين و ميكانيك الكم مما ربط الرياضيات بالفيزياء.

وبأعمال غودل و ظهور الحواسيب والاتصالات انفجرت المبتكرات و المبرهنات، فنحن اليوم نواصل البحث فيما ما تركت لنا كل هذه الحضارات من الحساب العددي الرقمي ، و نظرية الأعداد، والإحتمالات و الإحصاء، والهندسة الريمانية والهندسة غير التبديلية، وصرنا نتجه أكثر فأكثر نحو الرياضيات التطبيقية التي نراها في الكثير من المبتكرات التكنولوجية.

ومازالت لحد اليوم مسائل هلبرت الثلاث والعشرين تغذي أبحاث الرياضياتتين، منها ما وجد له حل ومنها ما ينتظر وأعظمها حدسية ريمان لأصفار الدالة زيتا التي تشكل نوعا جديدا من الرياضيات وتحدي القرن الواحد والعشرين.

السؤال الذي نتساءله اليوم، أين العرب من جميع هذا ؟

المتأمل للعرب يجد أن الأغلبية لم تهضم بعد كل ما انتجته الحضارة الغربية، بدأ من الضبط إلى نظرية المجموعات و نظرية الأعداد وكيفية البرهنة المنطقية فإذا استثنينا الخواص نجد أن أغلبية الناس مازالت لم تهضم هذه المفاهيم والكثير من كلامهم في هذا الميدان هو أقرب منه للرأي من الرياضيات، لكن الرياضيات علم ضبط ولا يثمر إلا به.

هناك الكثير من المجموعات اليوم عبر الشبكة التي تساهم بجهود جبارة في الرياضيات لكن وجدنا أن هناك فراغا لم يملأ بعد و هو ضبط الرياضيات و تبسيط مفاهيمها بعرضها عبر التاريخ و ما وصلت إليه اليوم و كيف سنكملها غدا.

لهذا الهدف أنشئت هذه المجموعة فأعطيناها إسم ابن البناء المراكشي و هو عالم رياضياتي عربي مغربي من القرن الرابع عشر والذي لخص الرياضيات العربية زمانه وبانتقال أعماله إلى أوروبا بدأت نهضتها، فقرنه نقطة تحول الحضارة من العرب إلى أوروبا.

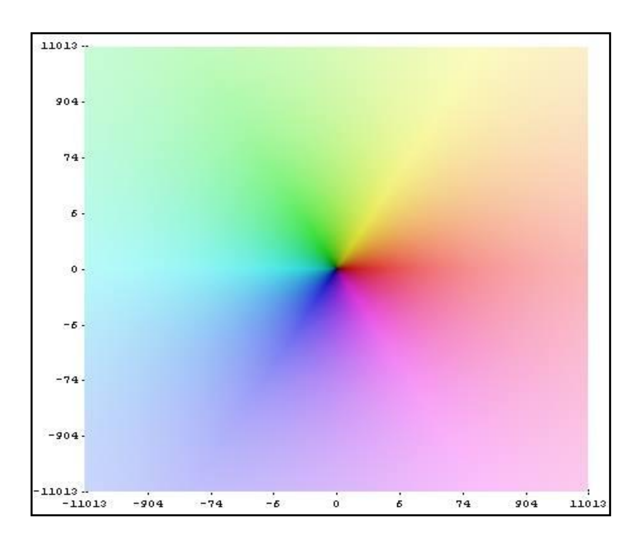
لذلك شعارنا اليوم : الفهم، الضبط، البحث : فهم وتبسيط الرياضيات، ضبطها ، و البحث فيها بنشر المبرهنات الجديدة و الأعمال القادمة وسنحاول جاهدين الوصل بين عالم الثانوية بعالم الجامعة و ما بعد

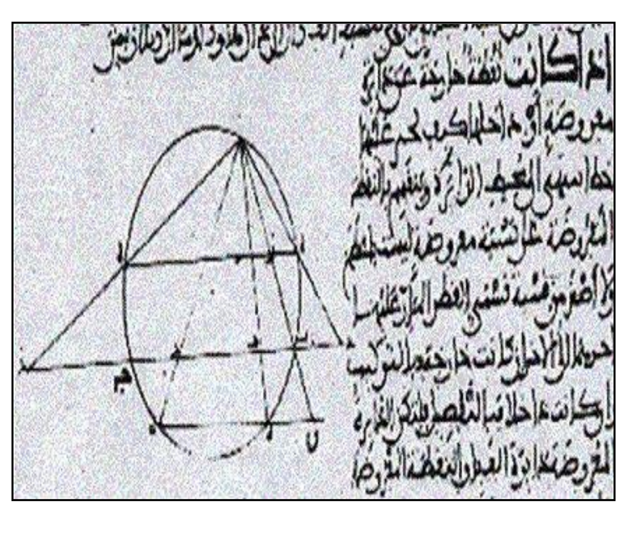


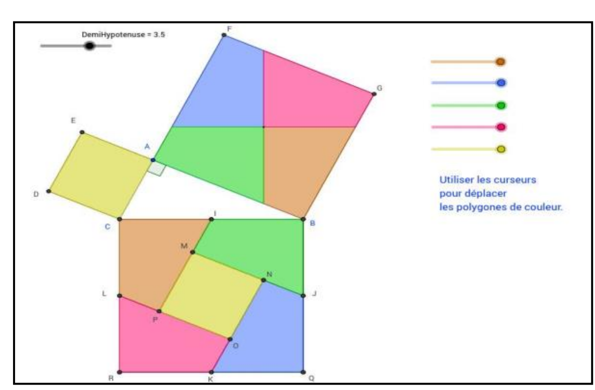
التدرج في جو من المرح وضبط و فهم، راجين من الله عز وجل أن نساهم بهذا العمل في زرع بذرة في جيل المستقبل لتثمرة شجرة بإذن الله فنسأل الله التوفيق وعليه نتوكل.

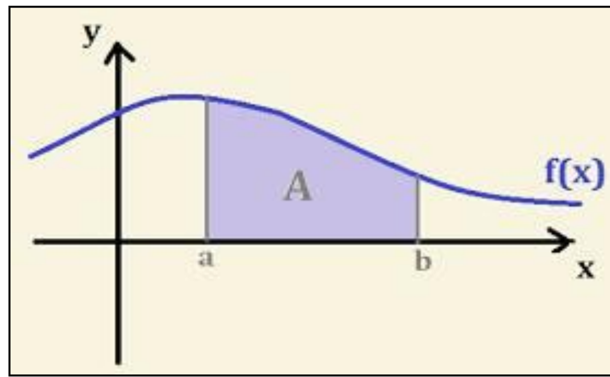
بن شعبانة عبد الحكيم : الأربَعاء 23 محرم 1440 / 3 أكتوبر 2018

ملحقات:











منطقة سومر 3000 قبل الميلاد

CHIFFRES	VALEURS
	$\frac{1}{120}$
	$\frac{1}{60}$
	$\frac{1}{30}$
	$\frac{1}{10}$
	$\frac{1}{5}$

الحضارة المصرية

1/5 $= \frac{1}{5}$

= 1 / 3

= 1 / 239

الحضارة البابلية

= 30/60

= 15/60

= 1 + 30/60 = 3/2

= 2 + 20/60 = 7/3

الحضارة الهندية

= $\frac{7}{15}$

تطور الأرقام الهندية العربية

Nombres brahmi

Inde (Gwalor)

Sanskrit - Devanagari (Indes)

Arabe occidental (gubar)

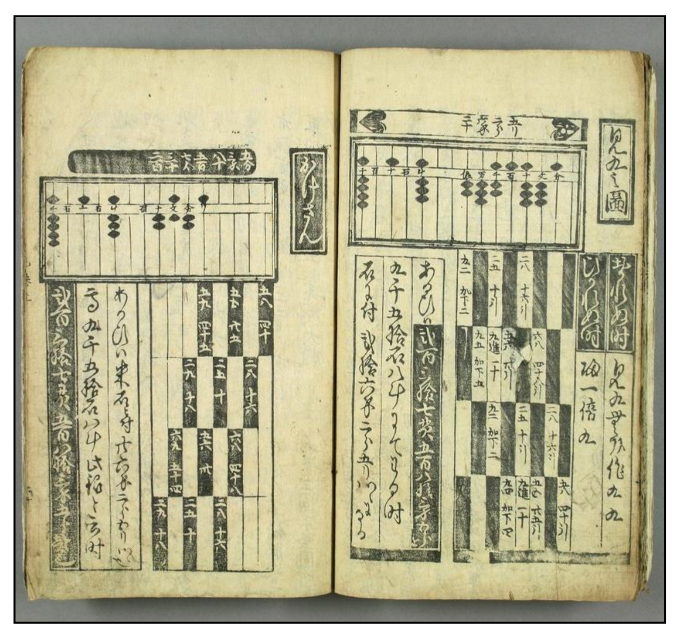
Arabe oriental

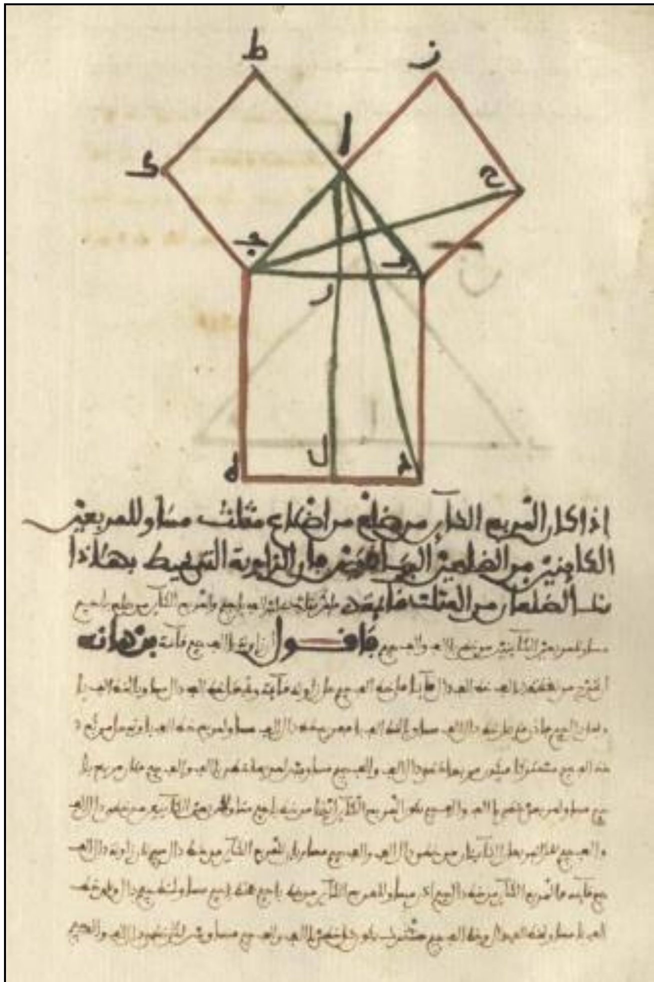
١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠

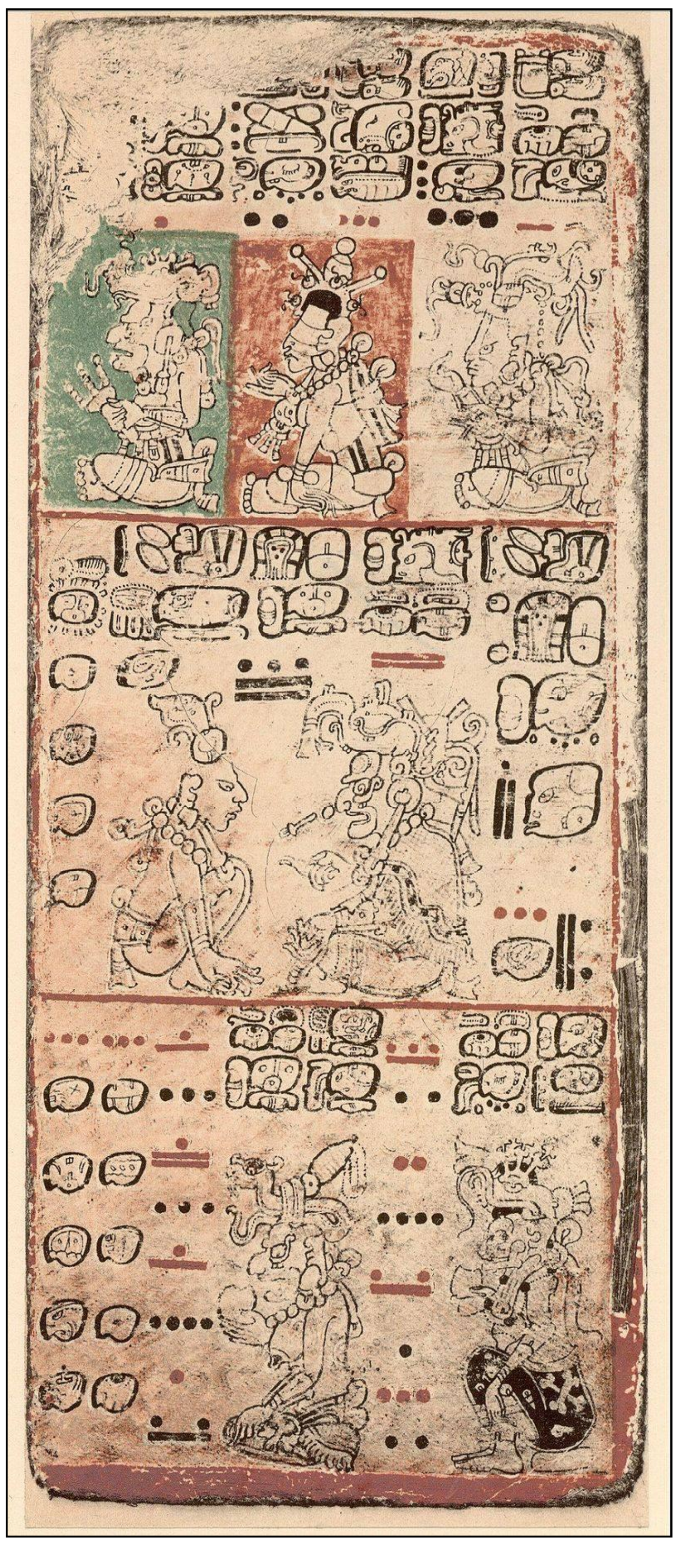
Chiffres de Gerbert (an mil)

XVe siècle

XVIe siècle (Dürer)







ابن البناء المراكشي .. مرجع أوروبا في الجبر

هو "أحمد بن محمد بن عثمان الأزدي" المعروف "بأبي العباس بن البناء المراكشي"، ولد في مراكش بالمغرب عام 654هـ/1256م، وقضى أغلب فترات حياته بها، وهذا هو السبب في انتسابه لها، وبها درس النحو والحديث والفقه، ثم ذهب إلى فاس ودرس الطب والفلك والرياضيات.

وكان من أساتذته ابن مخلوف السجلماسي الفلكي، وابن حجلة الرياضي، وحظي "ابن البناء" بتقدير ملوك الدولة المرينية في المغرب الذين استقدموه إلى فاس مراراً، وتوفي في مدينة مراكش عام 721هـ/1321م.

بدأ "ابن البناء" رحلته مع التعليم بتلقي ما كان شائعا في عصره من علوم اللغة العربية والشريعة الإسلامية فأدخله أبوه الكُتّاب حيث حفظ القرآن وبعض المتون التي تسمى بالأمهات في النحو والصرف والبلاغة والأدب والفقه والأصول، ونبغ في فهمها، وبعد دراستها على يد أساتذة كثيرين مرموقين في مراكش وفي فاس اللتين كانتا حاضرتي العلم ببلاد المغرب في ذلك العهد حيث تعلم ابن البنا على الطريقة المغربية فألتحق بالكتّاب وقرأ القرآن وتعلم اللغة العربية وعلم العروض والأدب والفقه والأصول، ثم تعلم الطب والحساب والفلك.

وانتقل إلى فاس وحصل فيها العلوم بجامع القرويين وفروعه وأتقن علوما كثيرة وخصوصا الرياضيات وبرع فيها حتى أنتج إنتاجاً غزيرا واثني عليه علماء عصره فقال ابن رشد في كتابه(نيل الابتهاج): لم أر بالمغرب من العلماء ’لا رجلين: ابن البناء العددي المراكشي في مراكش وابن الشاطر في سبتة"، وقال عنه المقري: "كان ابن البناء شيخ شيوخ العلماء في عصره."

إسهاماته العلمية:

تفوق ابن البناء في الرياضيات وخصوصا في حساب الكسور المتسلسلة والجذور الصم ومربعات الأعداد ومكعباتها، وأدخل بعض التعديل على القاعدة المعروفة بقاعدة الخطأ الواحد وحل بعض المعادلات الجبرية الصعبة بطرق سهلة وقريبة المأخذ، وطور طريقة حساب الخطأين المتبعة في حل معادلات الدرجة الأولي ووضعها بشكل قانون جبري، كما أنه أنجز في الفلك انجازات مرموقة واعتبرت بحوثه اساسا لوضع الازياج وضبط المواقيت وهي بحوث عملية اجري فيها ابن البناء تجارب وسجل مشاهدات.

يعد ابن البناء أول من استعمل كلمة "المناخ" لوصف ظواهر فلكية ومعطيات مناخية وجوية، كما يعد من أشهر من استعمل الأرقام الهندية والرموز الجبرية الرياضية في العالم الإسلامي ويعده بعض المؤرخين من المساهمين في تطور الرموز الرياضية،

كما يعد أيضا أول من اعتبر الكسر نسبة بين عددين.

مؤلفاته:

ألف ابن البناء أكثر من سبعين كتاباً في الحساب، والهندسة، والجبر، والفلك، والتنجيم، ضاع أغلبها ولم يبق



إلا القليل منها، وأشهرها: كتبه "كتاب تلخيص أعمال الحساب"، الذي اعتبره "سمث" و"سارطون" من أحسن الكتب التي ظهرت في الحساب، وظل الغربيون يعملون به إلى نهاية القرن السادس عشر للميلاد.

وكتب كثير من علماء العرب شروحاً له، واقتبس منه علماء الغرب، كما اهتم به علماء القرنين التاسع عشر والعشرين بالكتاب، وترجم إلى الفرنسية عام 1864م على يد (مار Marre) ، ونشرت ترجمته في روما، وأعاد ترجمته إلى الفرنسية الدكتور "محمد سويسي" ثم نشر النص والترجمة مع تقديم وتحقيق عام1969، كما حقق المستشرق الأسباني "فيرنه خينس" مقدمه كتاب "منهاج الطالب في تعديل الكواكب" للبناء وقام بترجمة بعض فصوله إلى الإسبانية عام 1952.

ولديه عدد كبير من المؤلفات والكتب من أهمها : "الجبر والمقابلة"، و"الفصول في الفرائض"، و"رسالة في المساحات"، "الأسطرلاب واستعماله"، "اليسارة في تقويم الكواكب السيارة"، وكتاب "أحكام النجوم"، وكتاب "مقالات في الحساب"، وهو بحث في الأعداد الصحيحة، والكسور، والجذور، والتناسب.

من أهم ما جاء في كتاب "رفع الحجاب" الخاص بشروح وتفسير "التلخيص" مجموعة من الأفكار والنتائج الرياضية المهمة نذكر

منها ما يلي:

تقنية الكسر المستمر وكانت تستعمل لإيجاد تقريب للجذور المربعة، حيث إذا كان r عددا جذريا فإن هذه العملية منتهية

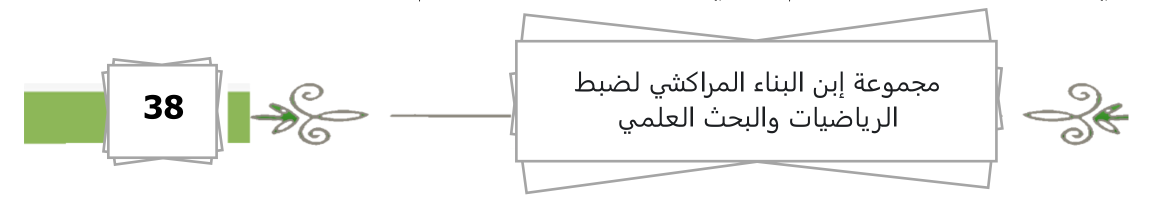
جمع مربعات الأعداد ومكعباتها، وهو مجموع n حدا متتابعا لمتتالية حدها العام $n^2=U_n$ أو طبيعية

تلخيص أعمال الحساب

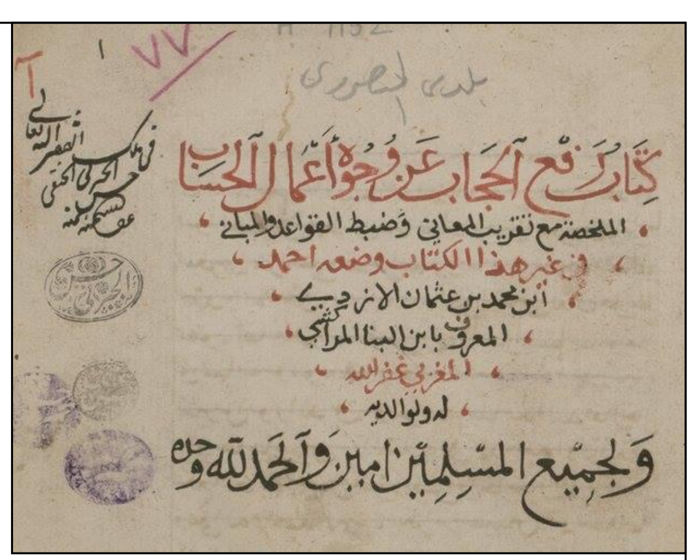
قامت شهرة ابن البنَّاء على كتابه المعروف باسم "كتاب تلخيص أعمال الحساب" الذي يُعد من أشهر مؤلفاته وأنفسها، وقد بقي معمولاً به في المغرب حتى نهاية القرن السادس عشر للميلاد، كما فاز باهتمام علماء القرن التاسع عشر والقرن العشرين، فيشمل النسبة والجبر والمقابلة، وأهتم علماء الغرب بتحقيقه وترجمته إلى لغات مختلفة, حتى أوائل القرن التاسع عشر الميلادي، وقال عنه "جورج سارتون" في كتابه "المدخل إلى تاريخ العلوم" : "إن كتاب تلخيص أعمال الحساب لأبن البناء المراكشي يحتوي على نظريات حسابيه وجبريه مفيدة, إذا أوضح العويص منها إيضاحاً لم يسبقه إليه أحد, لذا يرى سارتون أنه يعتبر من أحسن الكتب التي ظهرت في علم الحساب.

أما ديفيد يوجين سمث فقد ذكر في كتابه تاريخ الرياضيات أن كتاب تلخيص أعمال الحساب لأبن البناء يشتمل على بحوث كثيرة في الكسور ونظريات لجمع مربعات الأعداد ومكعباتها, وقانون الخطأين لحل المعادلة من الدرجة الأولى.

ويذكر فرانسيس كاجوري في كتابه "المقدمة في الرياضيات" أن ابن البناء المراكشي قدم خدمة عظيمة بإيجاده الطرق الرياضية البحتة, لإيجاد القيم التقريبية لجذور الأعداد الصم.



أما العلامة عبد الرحمن ابن خلدون فيقول في كتابة "مقدمة التاريخ" عن كتاب تلخيص أعمال الحساب لأبن البناء: "وهو مستغلق على المبتدئ بما فيه من البراهين الوثيقة المباني, وهو كتاب جدير بذلك. وإنما جاءه الاستغلاق من طريق البرهان ببيان علوم التعاليم, لأن مسائلها وأعمالها واضحة كلها, وإذا قصد شرحها , إنما هو إعطاء العلل في تلك الأعمال, وفي ذلك من العسر على الفهم مالا يوجد في أعمال المسائل[1]."




فوهة المراكشي على سطح القمر.

– تقنية الكسر المستمر وكانت تستعمل لإيجاد تقريب للجذور المربعة، حيث إذا كان r عددا جذريا فإن هذه العملية منتهية :

$$r = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \dots}}}}$$

– جمع مربعات الأعداد ومكعباتها، وهو مجموع n حدا متتابعا لمتتالية حدها العام $Un=n^2$ أو $Un=n^3$ (حيث n عدد صحيح طبيعي) وذلك حسب العلاقتين التاليتين:

$$n^2(2n^2 - 1) = (2n - 1)^3 + \dots + 5^3 + 3^3 + 1^3$$
$$2n + 1)2n(2n - 1)/6 = (2n - 1)^2) + \dots + 5^2 + 3^2 + 1^2$$

– معاملات الحدانية :

$${}_nC_2 = n(n-1)/2$$
$${}_nC_3 = {}_nC_2(n-2)/3$$
$${}_nC_k = {}_nC_{k-1}(n - (k - 1))/k$$
$$\dots$$
$$(! \; {}_nC_k = n(n - 1)(n - 2)\dots(n - k + 1)/(k$$

1 مجموع من مصدرين:
http://www.mawhopon.net/?p=4293

http://scientific.ma/%D8%A7%D8%A8%D9%86-%D8%A7%D9%84%D8...



يا أستاذ حدثني عن الرياضيات في الحضارة العربية الإسلامية ؟ أين هي ؟

الأستاذ : يا ولدي إن كل ما تراه من علوم غربية اليوم ما هي إلا امتداد للحضارة الإسلامية، إن أجدادنا صنعوا عصورا ذهبية جهلها أولادنا وها أنا سأقص عليك بعضا من حكايتها وكيف استطعنا الوصول لذلك التطور فلعل ذلك المجد يعود بإعادة أسبابه.

بين القرن السابع ميلادي إلى الثاني عشر امتدت رقعة الإمبراطورية الإسلامية من الأندلس إلى مشارف الهند ، مما مكنها من اقتباس علوم من قبلها من الإغريق و الهنود و البابليين و الفراعنة.

يا ولدي أي نهضة لا تبدأ من فراغ إنما هي حلقة في سلسلة حضارات، كل حضارة تأخذ عن من قبلها أهم اكتشافاتهم ثم تزيد عليها بعد أن تترجمها بلغتها لتصبح جزء منها.

يا ولدي إن العلم الذي لا تدرسه أمة بلغتها لا يمكنها أن تنهض به لأنه يبقى علما دخيلا عليها، إن علوم النهضة لابد أن تكون جزء من الأمة حتى تدخل في عاداتها، في كلامها و أحلامها.

لما تولى هارون الرشيد الخلافة، كانت بغداد رمز الحضارة و متجه العلماء من جميع البلدان، فقام بفتح أبواب مكتبات قصره الغنية بالمخطوطات و الكتب للعلماء والدارسين، ثم قام ابنه المأمون سنة 820 ميلادي بإنشاء بيت الحكمة ببغداد أين يجتمع العلماء من كل أنحاء البلاد فأخذ العلماء يترجمون علوم من قبلهم خاصة علوم الإغريق كأرسطو و إقليدس و أرخميدس.

في القرن التاسع ميلادي كانت الأمة الإسلامية قد استوعبت و هضمت علوم من قبلها فذهبت تنتج و تبدع وتخترع طرقا جديدة و تحسن في العلوم القديمة و منها الرياضيات

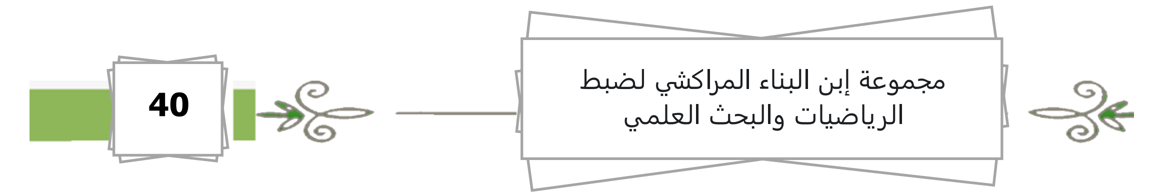
أول تحسين قام به المسلمون هو في نظرية الأعداد فأعمال من قبلهم من الإغريق في الميدان العددي تشوبها صعوبات في تمثيل الأعداد إذ الأعداد و الحسابات لم تكن كما تراها اليوم سهلة التمثيل والحساب فكانت قواعد كتابة الأعداد غير طردية، لكن المسلمون اقتبسوا من الهنود طريقتهم في الترميز و هو ما نعرفه اليوم بالأعداد العربية و التي تستعمل النظام العشري.

هذا النظام سهل مطرد، يمكن به تمثيل أي عدد طبيعي كان، بل زاد المسلمون في تحسينه وذلك باعتبار الصفر عددا كغيره، هذا النظام هو المستعمل اليوم في الحضارة الغربية .

بالجمع بين هذا النظام و الرياضيات الإغريقية صنع المسلمون طفرة في الرياضيات و ذلك بابتكار علم جديد اسمه الجبر، اخترعه العالم الرياضياتي الخوارزمي، فإن كان نيوتن و ليبيتز آباء الرياضيات الحديثة فجدها هو الخوارزمي.

قام الخوارزمي بدراسة المعادلات الديفونية و عممها لمعادلات كثير الحدود من الدرجة الثانية فأعطي ست حالات لهذه المعادلات و حلولا لكل معادلة منها.

التلميذ : لماذا ست حالات ؟ فنحن ندرس اليوم نوعان فقط كثير حدود من الدرجة الأولى و كثير حدود من الدرجة الثانية ؟



الأستاذ : إن كان مفهوم كثير الحدود واضحا لك اليوم فهو لم يكن كذلك في عصرهم كما أن الأعداد السالبة لم تكن معروفة آنَذاك، يمكن أن نعتبر الخوارزمي واضع أساس نظريات كثيرات الحدود ، فبدون أعداد سالبة الأمر ليس بهذه السهولة، كما أن المجاهيل المربعة لم تكن تعبر أعدادا مثل تصورك اليوم ، إذ القيم زمانهم لها مفهوم هندسي ولذلك لا وجود عندهم للأعداد السالبة لأنها لا تمثل قيمة هندسية، فمجموع مجهول مربع مع مجهول يعتبر عندهم مساحة مربع زائد مستطيل طول ضلعه واحد والآخر قيمة المجهول فهي جمع مساحات.

إن اختراع مفاهيم جديدة ليس بالأمر السهل.

استطاع الخوارزمي إعطاء خوارزمية لحساب حل لكل حالة من الحالات في إطار مفهوم العدد زمانهم و لذلك سميت باسمه الخوارزميات لأنه أول من ابتكرها.

إن المفهوم الجديد الذي جاء به الخوارزمي هو مفهوم المجهول، نعم كانت قبله محاولات لحل معادلات لكن لم تكن كمفهوم مجهول في معادلة كما نعرفه اليوم إنما كانت على شكل أسئلة هندسية.

الشيء الجديد الذي جاء به الخوارزمي هو إدخال مفهوم الشيء و الذي نستعمله لحد الساعة في جميع المعادلات إذ أن رمز المجهول المعروف بـ x ما هو إلا ترجمة من العربية للحرف ش والذي يعني شيء وبهذا يكون الخوارزمي قد فتح باب الخيال أمام من جاء بعده فبذكر مجهول مربع يأتي ذكر مجهول مكعب ثم مجهول بقوة كيفية.

هذا الذي قام به العالم المصري أبو كامل المتوفى سنة 318 هجري الموافق ل 930 ميلادي، إذ واصل أبحاث الخوارزمي لكن بإضافات جديدة إذ استعمل الأعداد غير الناطقة أو ما نسميه اليوم بالجذرية، كان هذا بمثابة نقلة جذرية في مفهوم الأعداد إلا أنها توقفت عنده بسبب غياب الترميز ، فتصور يا ولدي أنه يحتاج لسطور لتسمية عدد جذري إذ آنذاك تستعمل اللغة لا الترميزات كما نراه اليوم مما جعل أبحاثه صعبة الفهم.

واصل المسلمون الأعمال في كثيرات الحدود بنقلة نوعية إذ درس الكرجي المتوفى سنة 429 هجري الموافق ل 1020 ميلادي المجاهيل المكعبة و أضاف المعاملات الناطقة فأصبحت الأعداد الناطقة أعدادا كغيرها بجانب الأعداد الطبيعية.

أما السموأل المغربي المتوفى سنة 575 هجري الموافق ل 1180 ميلادي فزاد على أعمال الكرجي فدرس كثيرات الحدود ذات درجة كيفية بل أضاف كذلك مقاليب وحيدات الحد و اخترع جداول للتعبير عن كثيرات الحدود و مقاليبها و هو ما يشبه ما نفعله اليوم من كتابة كثيرات الحدود على شكل مجاميع وحيدات الحد.

عمل السموأل يعتبر قفزة نوعية نحو الترميز في الرياضيات و تعميم مفهوم كثيرات الحدود، بل واصل نحو تحليلها و اكتشف تشابها بين العمليات بينها و بين عمليات الأعداد مما يعتبر أول خطوة نحو مفهوم الزمر و الحلقات.



واصل غياث الدين بن مسعود بن محمد الكاشي المتوفى سنة 839 الموافق ل 1436 ميلادي أعمال السموأل فأكملها و ذلك بإدخال مفهوم الكسور العشرية فمكنه ذلك من حساب قيمة تقريبية لمضاعف العدد بي بحوالي ستة عشر رقما بعد الفاصلة و ذلك بمتتالية تراجعية واكتشف طريقة للعثور على حساب الجذور النونية لأي عدد وهي معمول بها لحد اليوم فكانت هذه أول خطوة في الحساب العددي و مفهوم المتتاليات والكتابة العشرية وبذرة لمفهوم النهايات.

التلميذ : أستاذ هو قريب جدا من عصر النهضة الأوروبية

الأستاذ : نعم فعند تأمل تاريخ وفاته نفهم كيف استطاع الغرب في القرنين التاليين تعميم مفهوم الأعداد بكتابة الفواصل و ابتكار مفهوم النهايات إذ تعتبر أعماله قاعدة لكل هذا بل أكثر من ذلك فقد قام أبو الحسن علي بن محمد بن علي القرشي الشهير بالقلصادي المتوفي سنة 891 هجري الموافق ل 1487 بتعميم الترميزات في الرياضيات فهو أول من رسم الكسور واستخدم رموزا في الجبر في كتابه كشف الأسرار عن علم الغبار، فاستعمل لعلامة الجذر الحرف الأول من كلمة جذر (ج) و هي أصل رمز الجذر التربيعي الذي نستعمله لحد اليوم واستعمل للمجهول الحرف الأول من كلمة شيء (ش) و هو أصل رمز المجهول الذي نستعمله اليوم كذلك، ولمربع المجهول الحرف الأول من كلمة مال (م)، ولمكعب المجهول الحرف الأول من كلمة مكعب (ك)، ولعلامة المساواة الحرف (ل)، وللنسبة ثلاث نقاط.

لولا هذه الثورة في الترميزات لما ازدهرت الرياضيات كما نراها اليوم.

التلميذ : إذن مفهوم كثيرات الحدود و الزمر و الحلقات والترميز الرياضي مصدره كل هذه الأعمال ؟

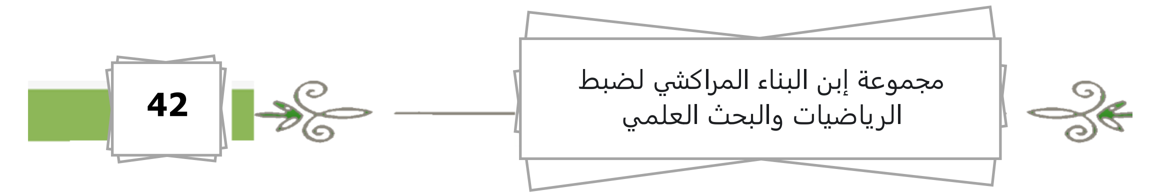
الأستاذ : نعم يمكن أن نعتبر الأعداد المركبة و الجبر كله مبني على هذه الأعمال ، لكن المسلمون لم يبدعوا في الجبر فقط بل كان لهم اليد الطولى في تطوير علم التحليل و هم أجداد اللوغاتم و الدالة الأسية.

التلميذ : كيف ذلك ؟

الأستاذ : زيادة على نظرية الأعداد فقد أخذ المسلمون علم حساب المثلثات عن من قبلهم فواصلوا دراسة الدوال المثلثية فبرهنوا على الكثير من قواعدها المألوفة اليوم لكنهم جاؤوا بشيء جديد ، إذ ربطوا بالعلاقات المثلثة الجمع بالجداء و وضعوا جداول للربط بينهما و حساب المثلثات، و هذا هو أول مفهوم للدالة إذ كل سابقة تربطها بصورة و هو أول مفهوم للوغارتم إذ ربطوا الجمع بالضرب بل هو أول مفهوم للتحليل إذ ربطت الدوال و التي هي علاقات في مجموعات بعملية الجمع و الضرب و هما مفهومان جبريان فبهذه الفكرة عرفت الدوال و السلاسل و النهايات إذ ما هي إلا تعبير للدوال في نظام جبري.

التلميذ : لكن النهايات فيها مفهوم الإبسيلون ؟ و هناك الاشتقاق و التكامل...

الأستاذ : كل هذه الأفكار مصدرها الحضارة الإسلامية فأصل الاشتقاق حساب الميل وذلك لحل المعادلات من المنحنى البياني للدوال و هذا ما قام به المسلمون إد رسموا القطوع الزائدة و الناقصة و حاولوا حل المعادلات هندسيا



بل ذهبوا لأكثر من ذلك فقد عمل الإخوة بن موسى و ثابث بن قرة وأبو الوفاء على حساب مساحات القطوع الناقصة.

واستعمل ابن الهيثم المتوفى سنة 430 هجري الموافق ل 1040 ميلادي مجموع ريمان في حساب الحجم الناتج من دوران المنحنيات حول محاورها.

وقد قام شرف الدين الطوسي المتوفى سنة 610 هجري الموافق ل 1213 ميلادي بدراسة حلول المعادلات هندسيا مما يعتبر بداية الجبر الهندسي و تمهيد لظهور مفهوم العدد المشتق.

التلميذ : إذن كل الأفكار التي نجدها اليوم من نظرية الأعداد و البنى الجبرية و الدوال النهايات و المشتقات و التكاملات كانت موجودة في الحضارة الإسلامية .

الأستاذ : بل جلها بذرت من العلماء المسلمين فكل ما تراه اليوم ما هو إلا تطوير لهذه المفاهيم ، فلولا أن الحضارة الإسلامية خمدت أضواؤها لكانت وصلت لما وصل إليه اليوم الغرب إذ جميع المفاهيم التي تراها اليوم أصلها الحضارة الإسلامية.

يا ولدي هذه لمحة سريعة على ما حققه أجدادنا في الرياضيات ولو ذهبنا نخوض في ما ابتكره المسلمون من المفاهيم لما وسعنا الوقت لذلك بل نحتاج لكتابة مجلدات إلا أني اقتصرت على أهم المفاهيم التي طورت الرياضيات المعاصرة و أصبحت كما نراها اليوم.

إن أصعب شيء في العلوم هو ابتكار الأفكار و هذا الذي قام به العلماء المسلمون، فلعله يعود يوما إليهم مجدهم و يواصلون مسيرتهم في اكتشاف العلوم.

لذلك يا وليد عليك بتاريخ حضارتك وباقتباس العلوم من الحضارات الحالية و اكتسابها بلغتك حتى تكون جزء من عاداتك فتتطور بها أمتك.

$$25x^6 - 30x^5 + 9x^4 - 40x^3 + 84x^2 - 116x + 64 - \frac{48}{x} + \frac{100}{x^2} - \frac{96}{x^3} + \frac{64}{x^4}.$$

Pour faciliter les calculs sur ces polynômes, al-Samaw'al adopte un système d'écriture avec des tableaux, dans lequel la position de la colonne correspond à l'exposant m du monôme considéré x^m. Pour notre exemple, il écrit ainsi

cubo-cubes	carré-cubes	carré-carrés	cubes	carrés	choses	unités	parties de chose	parties de carré	parties de cube	parties de carré-carré
25	moins 30	9	moins 40	84	moins 116	64	moins 48	100	moins 96	64

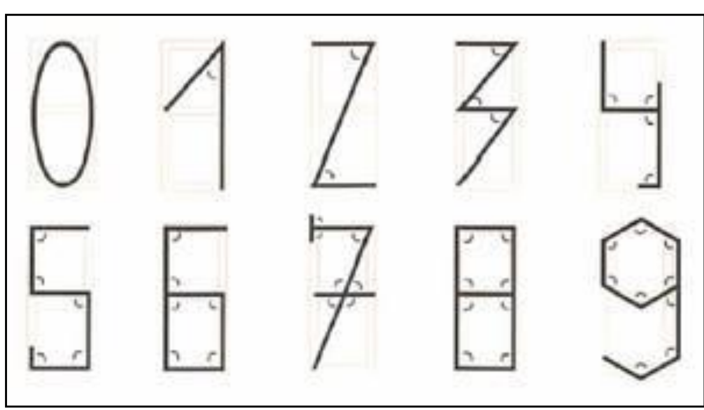




129

لجسم د كجسم ا ب الى المكافى ليس باصغر من جسم د وقد بينا انه ليس باعظم
منه كجسم ا ب ج د المكافى مساو لجسم ك د الذي هو مثل نصف اسطوانته فكل
مجسم مكافى فانه مساو لنصف اسطوانته وذلك ما اردنا ان نبين

وقد استعملنا في هذا الشكل انه اذا كان مقداران مختلفان وفصل من اعظمهما نصفه ومن
نصفه الباقي نصفه وفعل ذلك دائما فانا سننتهي الى مقدار اصغر من المقدار الاصغر



العبقرية العربية الإسلامية في الترميز الرياضي : عندما تصبح الرياضيات خوارزميات عقلية

إن أهم ميراث تركته الحضارة الإسلامية هو الترميز الرياضي.

فقد قام أبو الحسن علي بن محمد بن علي القرشي الشهير بالقلصادي المتوفي سنة 891 هجري الموافق ل 1487 بتعميم الترميزات في الرياضيات والتي بدأها قبله عدد من العلماء المسلمين.

فهو أول من رسم الكسور واستخدم رموزا في الجبر في كتابه كشف الأسرار عن علم الغبار، فاستعمل لعلامة الجذر الحرف الأول من كلمة جذر (ج) و هي أصل رمز الجذر التربيعي الذي نستعمله لحد اليوم واستعمل للمجهول الحرف الأول من كلمة شيء (ش) و هو أصل رمز المجهول الذي نستعمله اليوم كذلك، ولمربع المجهول الحرف الأول من كلمة مال (م)، ولمكعب المجهول الحرف الأول من كلمة مكعب (ك)، ولعلامة المساواة الحرف (ل)، وللنسبة ثلاث نقاط.

لولا هذه الثورة في الترميزات لما ازدهرت الرياضيات كما نراها اليوم.

فالترميز الرياضي يعتبر لغة قائمة بذاتها له قواعدها وأساليبها لكنه أكثر من ذلك فهو خوارزميات كتابية عقلية تغني عن تكرار صفحات من العمليات المنطقية والحسابية.

الترميز الرياضي برمجة عقلية إذ لو تأملنا حساب الكسور مثلا لوجدنا:

$$5/2 + 2/3 = 15/6 + 4/6 = 19/6$$

فهنا قد استعملنا خوارزمية كتابية ممثلة في توحيد المقامات، هذه الخوارزمية تغني عن إعادة شرح المبرهنات إنطلاقا من المسلمات وذلك عبر الترميز الرياضي.

وهذا ما يفسر سهولة الحسابات اليوم فاليوم في الحقيقة عند الحساب نطبق خوارزمية بتعويض مجاهيل عبر عبارات بسيطة أما في الماضي كان لابد من التعبير عن كل خطوة بعمليات ذهنية أو كتابات خاصة يطول كتابتها. عبقرية الترميز الرياضي تكمن في إختصار عمليات ومفاهيم رياضية معقدة في ترميزات بسيطة يمكن تحويلها لترميزات أخرى عبر قواعد رياضية.

فكلنا يعرف مميز كثير حدود من الدرجة الثانية وكيف يمكننا بسهولة عبر المميز كتابة

$$ax^2 + bx+c = a (x - x_0) (x - x_1)$$

دون الحاجة لإعادة برهنة التفكيك ومصدر المميز لأن البرهان الرياضي إستعمل ترميزات لمتغيرات يمكن استبدالها بأي قيمة من قيمها.

فالترميز الرياضي وما يشمله من مكممات وعمليات منطقية يجمع تحت طياته عددا غير منته من العمليات بالتطبيق. فهو خوارزمية عقلية أنتجت ما نعرفه اليوم بالبرمجة المعلوماتية.

البرمجة المعلوماتية ما هي إلا تعميم للغة الرياضية.

فاللغة الرياضية هي خوارزميات عقلية أما البرمجة المعلوماتية فهي خوارزميات آلية.





يا استاذ اشرح لي الرياضيات ؟

يا ولدي الرياضيات تتلخص في فكرة سهلة : عندما أريك خروفا فأقول لك هذا خروف ثم أريك خروفا آخر فأقول لك هذا خروف فإنك لا تقول لي لقد أخبرتني أن الخروف هو الأول وليس هذا... (المقصود تجريد العقل البشري لصفات الخروف)

التجريد طريق التطور والابداع.

الرياضيات علم تجريد وتجريدها يمر بالكتابة الترميزية المنطقية فتدرس فيها الكائنات عبر الترميز، لذلك لا نسمع بالمدور في الجامعة ولا برسم معلم في سبورة ولا بتمثيل دالة بيانيا.

فنستغني عن كل ذلك بالتعامل مع الخواص كترميزات، المشكل الذي وقع أن الرياضيات التي كانت تدرس كرياضيات حرفها البعض لتحويلها إلى رياضيات المهندسين أو ما يستخدم في التطبيقات، فنزع المنطق والتجريد من طور الثانوي للتعليم فكسر التصور والابداع فيها وأصبحت رياضيات إنتاج استهلاكي لا رياضيات بحث وتطوير وهنا يكمن الخطر فالأمة التي لا تخترع وتتطور مصيرها أن تكون تابعة للأمم الأخرى مستعبدة منهم.

ما هو شرط تمثيل مفهوم رياضي بمثال من الواقع ؟

ثلاث شروط مهمة عند التمثيل بالواقع:

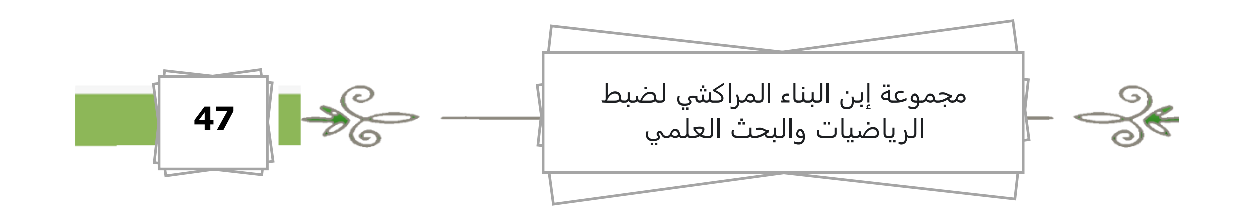
الأول أن يحمل المثال المفهوم الممثل به. الثاني أن يكون المفهوم واضح المعالم في المثال لأن القصد تقريب الفهم والغموض يفسد الفهم. الشرط الثالث أن يكون قليل الشوائب وإلا اختلط بمفهوم آخر فلا يؤدي دوره في شرح المفهوم الأصلي

المالانهاية:

هما نوعان :

المالانهاية العددية وهي عدم مقدرة حد عناصر المتتالية إلا لعدد منته منها.

والمالانهاية المجموعاتية وهي عدم مقدرة مقابلة المجموعة لعدد منته من العناصر الطبيعية وهي مراتب، إذن مفهوم المالانهاية منبعث من عدم مقدرتنا على الإحاطة بكم عناصر مجموعة



الأعداد لا حد لها

الأعداد لا حد لها ولا ينقض ذلك عدم وجود غير محدود فيما نلمسه وذلك أنه من ناحية الواقع ، الواقع ليس ما يدركه البشر، إنما إدراك البشر محدود لا أن الواقع محدود فإن لم يمكنك وضع ماء البحر في دلو فالمحدودية محدودية الدلو لا البحر.

ومن ناحية الرياضيات أن الرياضيات ما يمكن تصور إمكانه بالذهن لا ما يمكن أن نجده في الواقع فإن كان ما ندركه في الواقع محدودا فما يمكننا تصور إمكانه بالذهن فهو غير محدود و ما لم نجده اليوم نجده غدا فالرياضيات سابقة لعصرها.

من هو الرياضياتي ؟

كل مختص في علم يشترط فيه معرفة مضمونه علما وتطبيقا، والرياضيات لا تختلف عن غيرها من العلوم، فالرياضياتي هو العارف بمضمون الرياضيات تعاريفا وضبطا، أي عالم بمحتواها من نظرية المجموعات والبنى الجبرية إلى الطبولوجيا والقياس وغيرها من الفروع بإضافة كونه قادرا على تطبيقها والمقصود بالتطبيق البرهنة المنطقية باستعمال المبرهنات الرياضية، والرياضيات كغيرها من العلوم أصحابها يصنفون لدرجات.

فأدنى الدرجات معرفة المشتهر منها مع التطبيق.

ثم يأتي الإختصاص كالمختص في الهندسة التفاضلية مثلا وهذا يعرف غير المشتهر منها.

والدرجة الثانية هي درجة المنتج وهو الذي يفوق درجة الاستعمال إلر درجة الانتاج كصناعة مبرهنات جديدة وهذا الذي بطلب من الباحثين.

والدرجة الثالثة وهي العليا وهؤلاء يجددون فيفتحون فروعا جديدة كريمان وهلبرت وغودل وغيرهم، المشكل الموجود اليوم أنه في الأصل كل متخرج من الجامعة بعد أربع أو خمس سنوات لابد أن يكون في الدرجة الأولى لذلك كان قبلا يعطى لكن يدرس ثلاث سنوات شهادة ليسانس وهي متخرج أما أربع سنوات فشهادة Maîtrise وهو المتمكن.

لكن اليوم لأسباب عديدة أصبح المتخرجون لا يعتبرون من أصحاب الدرجة الأولى لأنهم لا يضبطون الضروري من الرياضيات.

وعموما الشهادات اليوم لم يعد لها معنى لانها أصبحت موجهة للعمل أكثر منها للعلم .




الرياضيات قائمة على طريقة فهم البشر للواقع وتتلخص في مبادئ هي :

الوجود : ومنه مسلمة وجود المجموعة

تكرار الموجود : ومنه إضافة عنصر لمثيله فنتحصل على الأعداد : 1,2,3..

تقسيم وتركيب الموجود : ومنه إتحاد وتجزئة المجموعات والعمليات الجبرية والزمر والحلقات والحقول وإنشاء المجموعات العددية

مقارنة وتمييز الموجود : ومنه إنشاء المجموعات إنطلاقا من عناصر و تعريف أصناف التكافؤ و علاقة الترتيب والتقريب وتمييز الإتجاهات وإنشاء الفضاءات الشعاعية

عدم إدراك جميع الموجود : ومنه النهايات والمالانهاية

وبتركيب هذه المفاهيم صنعت الرياضيات الجبر والتحليل والهندسة وغيرها من النظريات والمبرهنات إذ كلها ترجع لتركيب من هذه المفاهيم الأولية وهي مفاهيم مستنتجة من واقع البشر.

النظريات الرياضية تمر بثلاث مراحل:

مرحلة اكتشاف : تبدأ باكتشاف الخواص وبرهنتها كحل كثير حدود من الدرجة الثانية وخواص الأعداد الطبيعية و حساب المساحة بتكامل ريمان.

مرحلة الضبط و التعميم : وهنا تعمم الخواص إلى أقصى حد ممكن كجذور كثير الحدود من درجة كيفية ومجموعة الأعداد الحقيقية ومجموعة الأعداد المركبة و تكامل لوبيغ، كما تضبط البراهين والمصطلحات.

مرحلة التجريد أو ما يسمى البناء على نظام مسلماتي : و هنا تجرد أسباب ظهور الخواص لتبنى على نظام مسلماتي تبقى فيه البراهين صحيحة كالزمر و الحلقات و الحقول و الفضاء الطبولوجي و فضاء هلبرت و فضاء بناخ والنظام المسلماتي لتكامل لوبيغ.

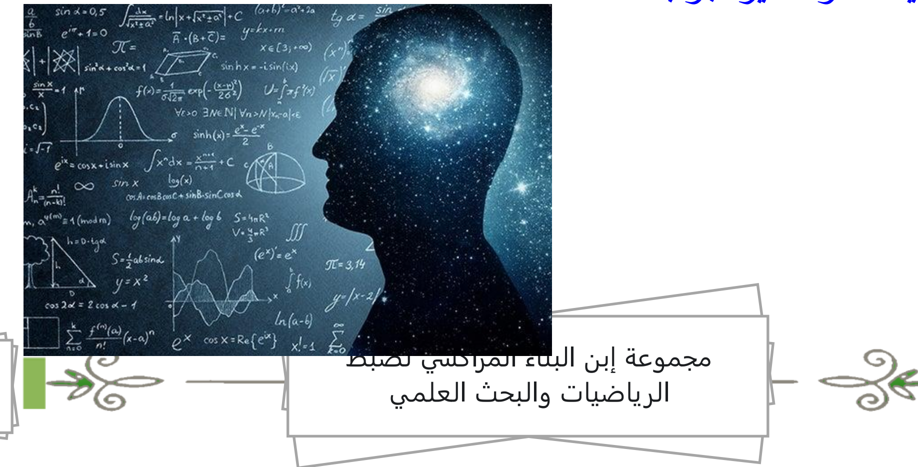
هذه المرحلة هي مرحلة نضج للنظرية.

هذه المراحل قد تتداخل تاريخيا فيما بينها.

البرهنة والتفسير

يا أستاذ لا تخلط بين البرهنة والتفسير أما البرهنة فهي مجموعة خطوات استدلالية منطقية مرتبطة للوصول إلى النتيجة أما التفسير فهو شرح سبب اختيارك لهذه الخطوات دون غيرها ومناسبتها للمطلوب...

البرهنة جواب كيف ؟ والتفسير جواب لماذا



عندما تصبح الرياضيات قاطرة العلوم ... ما لم ينتبه إليه المشتغلون عندنا بالرياضيات

التشريع الغربي والتشريع الإسلامي ...

إن المتأمل في التشريع الغربي وعلى رأسه التشريع الفرنسي ينتابه العجب من تشابه صفات صناعته بالتشريع الإسلامي خاصة الفقه المالكي، أقول هذا بحكم إقامتي بفرنسا لأكثر من عشرين سنة.

فقاعدتي العبرة بالمآلات وسد الذرائع وهما من صلب الفقه المالكي موجودتان بكثرة في القانون الفرنسي.

هذا العجب يزول إذا اطلعنا على الدراسات التاريخية حول هذا الميدان. (1)

ذلك أن جل التشريعات المعاصرة مستوحاة من التشريع الفرنسي وخاصة تشريع نابليون.

عندما أقام نابليون إمبراطورية واسعة وجد نفسه على رأس جمع هائل من المواطنين لا يحكمهم قانون موحد فكان أسهل شيء هو استيحاء قانون من تشريع موجود وكان هذا من الفقه المالكي في مصر. (2)

وقد ذكر الصحفي عائد عميرة في مقال له:

يقول المؤرخ الفرنسي غوستاف لوبون في كتابه "حضارة العرب"، إن الجنرال الفرنسي الأشهر نابليون بونابرت عند عودته إلى بلاده فرنسا راجعًا من مصر سنة 1801، أخذ معه كتاب فقهي من مذهب الإمام مالك بن أنس اسمه "شرح الدردير على متن خليل"، ويعتبر الفقه المالكي

أول فقه إسلامي رافق الأوروبيين. اه(3)

فالتشريع الغربي مبني على التشريع الإسلامي في خطوطه العريضة بل أحيانا في دقائقه.

وقد يتساءل بعض المبتدئين بل بعض المختصين عندنا في الرياضيات ممن نظرتهم للعلوم ضيقة ما دخل مثل هذه المواضيع في مجموعة رياضياتية ؟

والجواب أن العلوم الرياضياتية أوسع مما يظنه البعض فهي تتعدى العلم المجرد المدروس في المدارس إلى تطبيقات ميدانية في علوم شتى.

لذلك في محاولة لبناء رياضياتي الغد والتي تهدف إليه المجموعة نقوم بإعطاء نظرة واسعة للمشاركين لفتح أعينهم عن التطبيقات الهائلة للعلوم الرياضياتية في العلوم الأخرى.

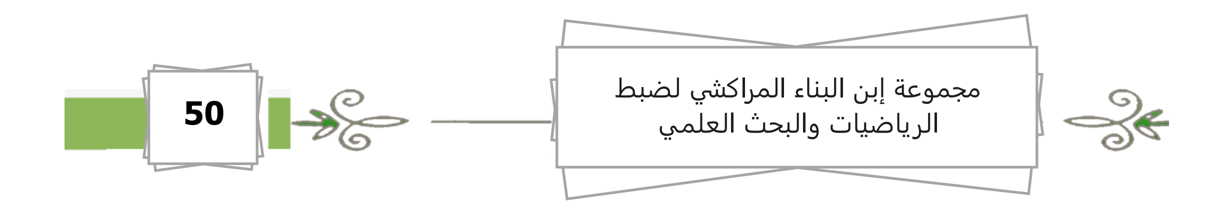
وقد نتطرق لأنواع كثيرة من المنطق غير المنطق الشكلي المشهور فكل هذا يساهم في توسعة تفكير المشاركين في المجموعة ونظرتهم للعلاقة بين الرياضيات وغيرها من العلوم.

الكلام في التشريع الغربي يقودنا إلى ما يسمى بالمنطق الديونتيكي أو بالأحرى أنواع عديدة منه.

هذا المنطق يحاول بناء قواعده على خصائص أربعة وهي : الواجب، الممنوع، الجائز، المخير. (4)

وما هذه إلا الأحكام الخمسة المعروفة في التشريع الإسلامي وهنا المندوب والمكروه مجموعة تحت المخير.

من الناحية الرياضية هناك محاولة صياغة مسلماتية لهذه القواعد باستعمال الترميز الرياضي المعتاد.



الأبحاث المعاصرة كثيرة في هذا الميدان منذ أن قام الفيلسوف الهولندي جورج هنريك فون رايت سنة 1951 بتطويرها والذي أنتجت بحوثه وجهتين مختلفتين أحدهما ترى إمكانية بناء منطق ظميري وأخرى ترى إمكانية بناء منطق قانوني كما تبناه وينبرجر في مقاله سنة 2001. (5)

هذه الأنواع الكثيرة من المنطق يعتمد بناؤها على طريقة المنطق الشكلي المعروف لكن بإدخال التعديلات المناسبة.

لمزيد حول علاقة التشريع الغربي بالتشريع الإسلامي والمنطق الديونتيكي يمكنكم الرجوع لهذه المصادر:

(1)

أثر الفقه المالكي في القانون المدني الفرنسي

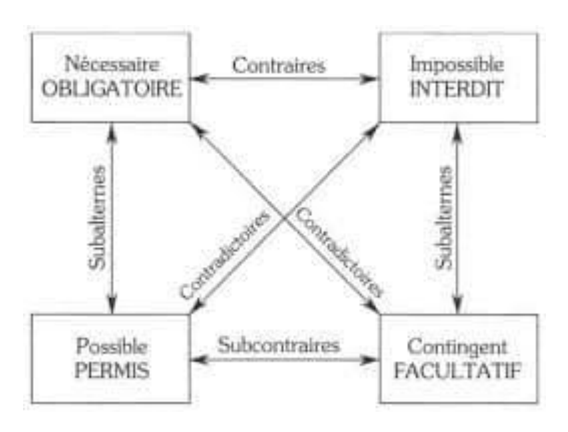
https://www.researchgate.net/.../330224360_athr_alfqh...https://m.youtube.com/watch?v=if9lIAHDWRk (2)

https://www.noonpost.com/content/22370 (3)

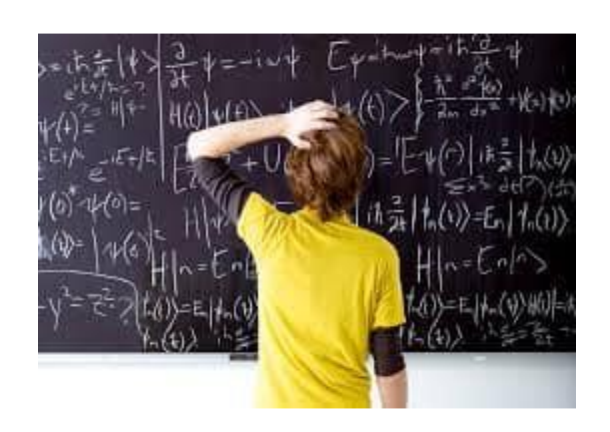
https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Logique_d%C3%A9ontique (4)

http://www.revueithaque.org/fichiers/Ithaque6/03Peterson.pdf (5)









الرياضيات مبنية على المجموعات.

كيف يرى العقل البشري الأشياء في الكون ؟

في الحقيقة هو يرى كل شيء كمعلومات ويفرق بين الأشياء بتمييز معلومات شيء عن آخر كما في الصورة، فكيف رأينا هذا الوجه لولا تمييزنا لمعلومات عن غيرها ؟

تمييز الأشياء هو بحذ ذاته مفهوم المجموعة.

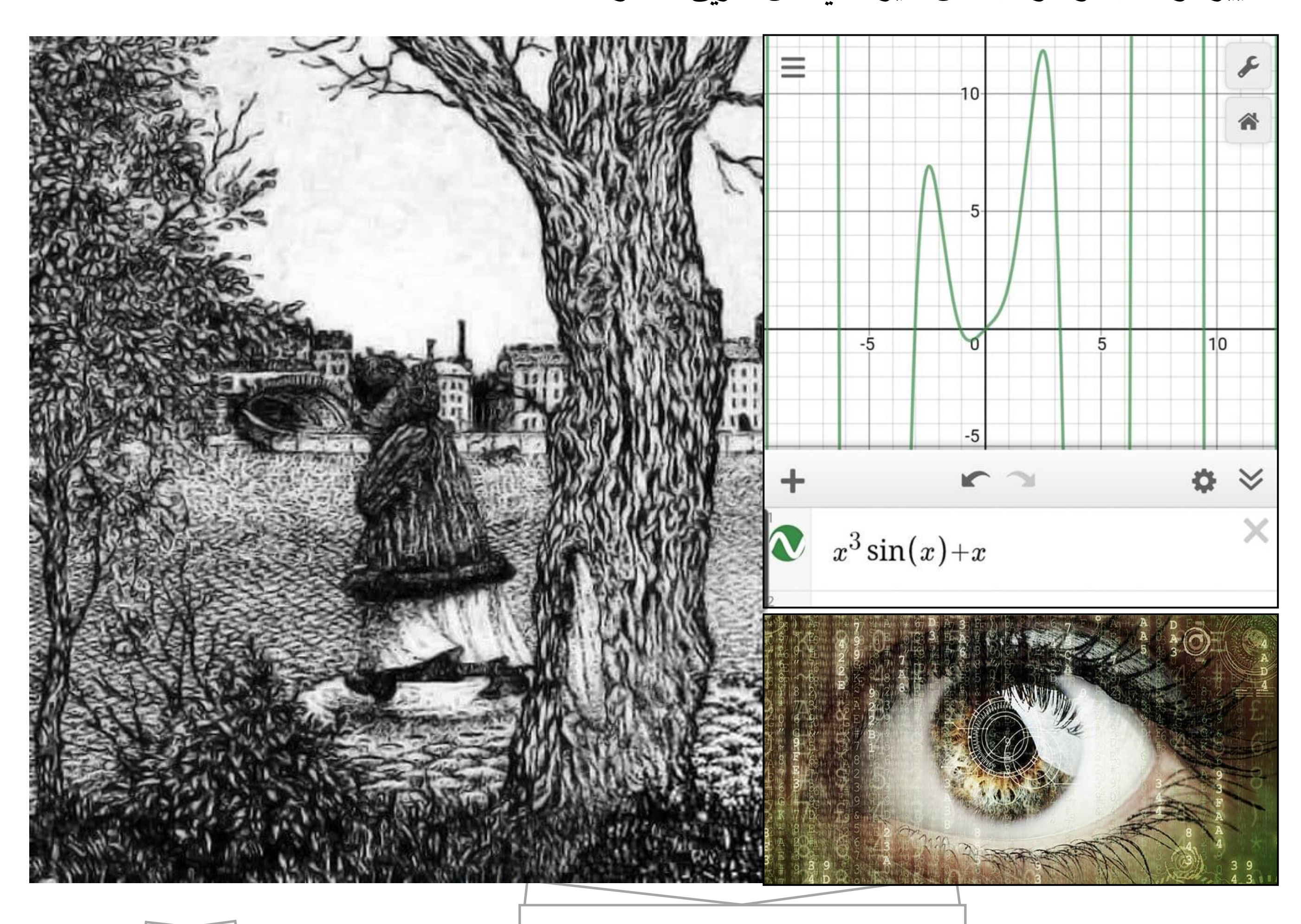
فالرياضيات مبنية على المجموعات لأن كل كائناتها هي مجموعة معلومات ومن بين هذا الدالة فالدالة ما هي إلا مجموعة من المعلومات لذلك نحولها بسهولة إلى مصفوفة في الإعلام الآلي.

ولذلك النظريات الفيزيائية الحديثة كنظرية الجاذبية الكمية بالحلقات ترى أنه لا وجود للزمان وأن الفضاء الزمكاني كله مجرد معلومات موجودة إلا أن العقل البشري هو الذي يعيشها متفرقة في ترتيب معين يسميه الزمن.

عند التطبيق نجد أن كل التمثيلات الرياضية تعود لمجموعة معلومات فما هو المنحنى الذي يرسمه برنامج ؟ هو مجموعة معلومات مكونة من 0 و 1 .

وما هي الصورة والفيديو ؟ نفس الشيء ملف مكون من مجموعة معلومات 0 و 1 .

فالرياضيات كلها مجموعات لأنها مبنية على النظرة البشرية للواقع والذي يراه عبد إدراكه للأشياء عن طريق تمييز أوصافها ومكوناتها عن غيرها أي عن طريق مجموعات.



الرياضيات باختصار

يا استاذ اشرح لي الرياضيات ؟

يا ولدي الرياضيات تتلخص في فكرة سهلة : عندما أريك خروفا فأقول لك هذا خروف ثم أريك خروفا آخر فأقول لك هذا خروف فإنك لا تقول لي لقد أخبرتني أن الخروف هو الأول وليس هذا...



ما هو الضبط الرياضياتي ؟

في هذا المقال سنحاول إعطاء نظرة مختصرة على الضبط الرياضياتي تاريخيا و عمليا لكن المكان لا يتسع لشرح جميع الحيثيات لذلك سنركز على المنطق الخوارزمي و الرياضيات الصياغية فهما المنتشران اليوم.

نظرة تاريخية:

سنة 1902 أرسل بيرتراند راسل رسالة إلى كوتلوب فريج يبين له فيها تناقض نظريته التي عكف على صناعها سنوات والتي أدخل فيها مسلمة الفهم غير المقيدة التي تتمثل في أن أي خاصية تشكل مجموعة.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Russell

هذه المسلمة تهدم نظرية المجموعات المسماة بنظرية المجموعات الساذجة وذلك لأنها تسمح بتصور وجود مجموعة جميع المجموعات والتي يشكل وجودها دورا لأنها بذاتها لابد أن تنتمي لنفسها.

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9orie_na%C3%AFve...

رسالة راسل تعتبر بداية أزمة الأساسيات في الرياضيات والتي لم تنته إلا بمبرهنة عدم الاكتمال لغودل إن سمينا ذلك إنتهاء....

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8mes_d...

تناقض راسل اعتمد فيه على مسألة سهلة جدا وهي إذا سلمنا أن أي خاصية قابلة للفهم تشكل مجموعة فهل مجموعة المجموعات التي لا تنتمي لنفسها تنتمي لنفسها ؟

إن قلنا نعم فحسب الخاصية هي لا تنتمي لنفسها وهذا تناقض و إن قلنا لا فحسب الخاصية لابد أن تنتمي لهذه المجموعة إذن لنفسها وهذا تناقض.

بهذا التناقض البسيط بدأت أزمة كبيرة كادت تعصف بالرياضيات لأنه لا يمكن بناء مبرهنات على رياضيات متناقضة.

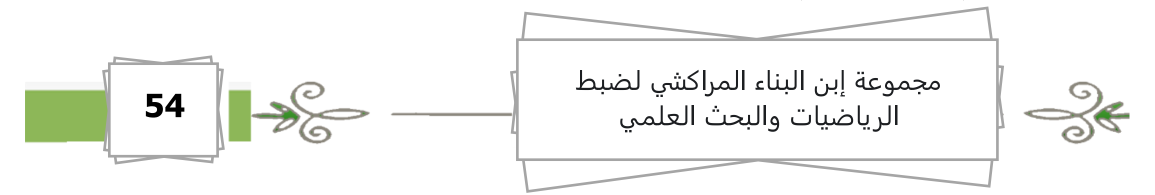
الحقيقية أن مثل هذه الأزمات ليست بالشيء الجديد في الرياضيات بل الرياضيات علم أزمات لا تكاد تظهر المفاهيم الجديدة فيها إلا بها.

قبل ذلك شهد اليونان تناقض زينون و الذي يقول : يتسابق آشيل مع السلحفاة وبما أن آشيل سريع جدا ترك السلحفاة تنطلق قبله لتصل إلى مئة متر ثم انطلق فلما وصل إلى مئة متر كانت السلحفاة قد تقدمت بمسافة أخرى فلما قطع آشيل هذه المسافة كانت تقدمت السلحفاة كذلك بمسافة و هكذا فعند زينون آشيل لن يلحق بالسلحفاة...

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Paradoxes_de_Z%C3%A9non

لم تحل هذه المتناقضة إلا ببروز مفهوم النهايات و رغم ذلك ظهرت تناقضات أخرى وليدة بروزها تحت ما يسمى بالحساب المتناهي الصغر.

سبب هذه التناقضات هو عدم ضبط مفهوم النهايات و كيفية حسابها رياضيا



حينها نادى كوشي بضرورة ضبط الرياضيات و سعى لذلك بدروسه في التحليل ورغم ذلك فقد وقع كوشي في اخطاء نتيجة عدم الضبط عندما جزم بأن المجموع غير المنتهي لدوال مستمرة هي دالة مستمرة لعدم تفريقه بين التقارب و التقارب المنتظم فلم يكن ذلك معروفا في زمانه ولا مستقرا.

هذه الأزمات دفعت بدورها الكثير من الرياضيين إلى محاولة بناء الرياضيات على أسس سليمة منهم بول الذي ضبط المنطق البولي ومنها أعمال كنتور وأعمال هلبرت الذي حاول ضبط الرياضيات بالصياغة.

تناقض راسل قسم العلماء إلى ثلاثة طوائف:

المنطقيين بزعامة راسل و ويتهايد ممن يحاولون حل الأزمة بنظام المسلمات

الصيغيين بزعامة هلبرت ممن حاول إعادة صياغة الرياضيات بالطوبولوجيا و فضاءات هلبرت

الحدسيين بزعامة برووير، بالنسبة إليهم الرياضيات حدسية وليدة حرية الإنسان في التفكير فلا يقبلون البرهان بالخلف ولا وجود قضايا لا يمكن الحكم عليها بالصحة و الخطأ.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Crise_des_fondements

انتهت أزمة الأساسيات بوضع نظرية المجموعات ZFC التي قبلت في المجتمع الرياضياتي ثم نشرتها مجموعة بورباكي عبر أعمالها.

فيمكننا اليوم أن نقول أن الرياضيات الشكلية والمستعملة عادة في المدارس والجامعات قائمة على نظرية المجموعات ZFC .

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9orie_des_ensembles...

إلا أن أزمة الأساسيات فتحت معركة فلسفية في بداية القرن العشرين بين أصحاب المنطق الشكلي بزعامة هلبرت وأصحاب المنطق الحدسي بزعامة بزعامة

براور Luitzen Egbertus Jan Brouwer

وتلاميذه V. Glivenko و Arend Heyting و غودل Kurt Gödel

فأصحاب المنطق الحدسي تبنوا مذهب أن الوجود الرياضي لكائن لابد أن يصحبه طريقة لبنائه لذلك رفضوا مسلمة الاختيار ومبدأ الثالث المرفوع.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Intuitionnisme

فإن كان أصحاب المنطق الحدسي بزعامة هلبرت استطاعوا بناء صرح رياضي من فضاءات طبولوجية وهلبرتية إلى المنوعات التفاضلية فإن أصحاب المنطق الحدسي نتج عنهم علم الخوارزميات الحسابية الذي أنتج ما نعرفه اليوم باسم الإعلام الآلي.

إن رياضيات اليوم وليدة أزمات البارحة.

فإذا نظرنا للضبط في الرياضيات وكيفيته: فيمكننا القول أن الضبط الرياضياتي هي الطريقة المتبعة في الرياضيات للحكم على القضايا بالصواب أو الخطأ.



لو رجعنا إلى أزمة نهاية القرن التاسع عشر و بداية القرن العشرين فسنلاحظ أن الفرع الوحيد الذي لم يتضرر بهذه الأزمة هي الهندسة وذلك راجع إلى أن الهندسة الإقليدية بناها إقليدس على مسلمات وعلى المنطق.

وعلى هذه الطريقة مشى الرياضياتيون في إعادة صياغة الرياضيات على نظرية المجموعات ZFC .

إذا نظرنا إلى الرياضيات وجدناها مكونة من مسلمات ، تعريفات و مصطلحات، ومنطق.

الرياضيات علم يبنى على فرضيات فكان من اللازم قبل بداية أي بناء أن تحدد قواعده أي تحدد المسلمات التي يبدأ عليها، هذه المسلمات لا بد أن لا تتعلق ببعضها و أن لا يستنتج بعضها من بعض وأن لا تناقض بعضها بعضا، نصف هذه المسلمات بالصحة و كل ما يخالفها بالخطأ.

من الأمثلة على ذلك نظرية المجموعات : ففيها نسلم بوجود المجموعة الخالية ونسلم أن كل خاصية داخل مجموعة تشكل مجموعة جزئية منها.

تعريفات و مصطلحات : وهي مسائل تكتب بهذه المسلمات أو على ما أنتجته من نتائج مبرهنة.

المنطق : وهو عبارة عن تطبيقات تنطلق من قضايا توصف بالصحة أو الخطأ لإنتاج قضية جديدة مركبة توصف بالصحة أو الخطأ ، فالمنطق لا يوصف بحد ذاته بالصحة أو الخطأ، فما هو إلا تطبيق من جداء ديكارتي لمجموعة ثنائية تحوي صحيح و خطأ نحو المجموعة نفسها فمثلا التكافؤ ينقل صحيح يكافئ صحيح نحو صحيح، و صحيح يكافئ خاطئ نحو خاطئ.

القضايا تشكل من تركيب المسلمات ببعضها مع التعريفات وكل قضية أنتجتها المسلمات عبر التطبيقات المنطقية توصف بنتيجة التطبيق من صحة أو خطأ، فإن كانت صحيحة تسمى مبرهنة.

وعليه البرهان الرياضياتي هو مجموعة عمليات منطقية متتالية مترابطة تبدأ من مسلمات وتعريفات أو مبرهنات وأحيانا فرضيات لتصنع مبرهنات جديدة أو نتائج تعتمد صحتها على صحة الفرضيات الموضوعة.

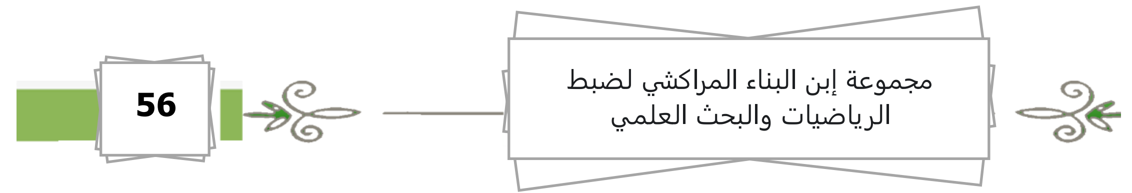
إذن إذا نظرنا إلى الضبط الرياضي فهو ينقسم إلى قسمين:

ضبط برهاني و ضبط اصطلاحي.

الضبط الاصطلاحي : أن تستعمل تعريفات مبينة إما عرفا أي تعارف الرياضياتيون على تعريفها فلا حاجة لإعادة تعريفها و إما تبيانا أن تكتب بالمسلمات و المصطلحات السابقة وعمليات منطقية كأن نصطلح أن التطبيق من مجموعة لأخرى هو مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي فالمجموعة مصطلح مبين من المسلمات و الجداء الديكارتي مصطلح مبين كذلك من نظرية المجموعات.

إذن الضبط الاصطلاحي نوعان : الضبط العرفي وهذا يشترك فيه الجميع و الضبط الخاص بكل مبرهن فله أن يصطلح ما يشاء مادام بين معنى مصطلحه بما سبق وهذا الذي يستعمل لبناء مفاهيم ومبرهنات جديدة.

الضبط العرفي أصله ضبط خاص ثم ينتشر بين الرياضيين كعلامة التكامل و المجموع و رمز الأسية و اللوغارتم و المجموعة الخالية إلى تعريف الحلقة والحقل ... إلى غير ذلك.



في الضبط الاصطلاحي تدخل المسلمات : إذ المسلمات ما هي إلا مصطلحات أعطيت لها صيغة الصحة.

الضبط البرهاني : و هو تحويل قضايا إلى قضايا أخرى عبر المنطق الخوارزمي و هو المنتشر اليوم و المنطق الخوارزمي يعتمد على أربعة تطبيقات بولية:

الإستلزام، التكافؤ، الربط، والفصل.

الرياضيات المستعملة اليوم مبنية على المنطق الخوارزمي و ضبطت بأعمال المنطقيين و الصيغيين ، وكان الفضل في نشر هذا الضبط لمجموعة بورباكي الفرنسية.

فهذا باختصار معنى الضبط و الأمر أوسع من ذلك فهناك أنواع أخرى من المنطق كما ذكرنا كالمنطق الحدسي لكن هذا المنتشر وعليه أي حكم لم يتصف بهذه الأوصاف فليس بمضبوط:

ضبط المسلمات

ضبط المصطلحات

ضبط العمليات المنطقية

مثال ذلك : عندما نقول

$0.9999999.... = 1$

فأول شيء نصنعه هو ضبط المصطلح أي ما هو معنى هذه الكتابة رياضيا و هنا هي نهاية مجموع متتالية هندسية.

لا نحتاج لضبط المسلمات هنا لأنها مضبوطة عرفيا فنحن داخل نظرية الأعداد المبنية على مسلمات ZFC

ضبط العمليات المنطقية و هنا نعتمد على مبرهنة مجموع متتالية هندسية و تعريف النهاية و كلاهما معروف لنصل إلى أن النهاية هي 1 .

فمتى كتبنا التعاريف نجد

$$0.999.... = \sum 9 \times 10^{(-n)} = lim \frac{9}{10} \times \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)}{\left(1 - \frac{1}{10}\right)} = 1$$



مجموعة بورباكي : ما لها وما عليها

بعد أزمة الأساسيات في بداية القرن العشرين، أطلق دافيد هلبرت برنامج عمله الشهير في الرياضيات لبنائها على أسس سليمة وهي نظرية المجموعات ZFC ، استعان هلبرت في ذلك بالمنطق الشكلي وكان هذا على حساب المنطق الحدسي، إذ أصبحت الرياضيات مجرد كتابة منطقية شكلية.

ورغم أن حلم هلبرت كان صناعة رياضيات متينة تجيب على أي قضية رياضية، فإنه اصطدم في بداية الثلاثينيات بمبرهنة عدم الاكتمال لغودل والتي تقتضي باستحالة بناء ذلك.

في فترة الثلاثينيات كانت الرياضيات التدريسية ضعيفة بعيدة عن الضبط الرياضي الذي أدخله هلبرت ومن سار على نهجه.

كما أن اكتشافات نهاية القرن التاسع عشر لم تكن تدرس.

قام مجموعة من الرياضياتيين الفرانكفوريين تحت مسمى مجموعة بورباكي بنشر رياضيات النصف الثاني من القرن التاسع عشر واعادة بنائها على نظرية المجموعات.

فساهموا في ضبط الرياضيات بل صنعوا رياضيات القرن العشرين بحيث لا يوجد باحث إلا وتأثر بهم.

قاموا بتوحيد طريقة الكتابة والضبط ونشروا الكثير من المبرهنات كتوطئة زورن والرموز كالمكمم العمومي والوجودي والاستلزام ورمز المجموعة الخالية.

تأثير بورباكي وصل لأوجه في الستينيات بحيث دفع إلى موجة إصلاح رياضيات في التعليم ما قبل الجامعي تحت مسمى الرياضيات الحديثة .

فأدخل التجريد بشكل مجحف كادت معه تختفي هندسة إقليدس وكانت عبارة ديودني الشهيرة وهو أحد أعمدة مجموعة بورباكي : ليسقط إقليدس.

تلقت مجموعة بورباكي انتقادات عديدة خاصة من رواد المدرسة الحدسية وممن انتقد طريقتهم كارل سيجل بعبارته الشهيرة : ليس بتكرار هوم هوم يمكننا صناعة نظريات جديدة ذات أهمية .مشيرا بذلك لصلاة البوذيين للوصول للمعرفة.

Carl Ludwig Siegel, déclare : « Ce n’est pas en répétant “Hom, Hom”, qu’on démontre des théorèmes sérieux » : « Hom » étant une opération mathématique formelle, et une allusion au « Om Om » d’une célèbre mantra (incantation) bouddhiste.

ذلك أنه إن كانت الكتابة الشكلية الحديثة للرياضيات قوية من حيث ضبط الرياضيات وبرهنة المبرهنات فإنها في ذاتها لا تصنع مفاهيم جديدة.

وفي هذا يقول قبله آرنولد دونجوي سنة 1949 :

En 1949 Arnaud Denjoy dénonce les « professions de doctrine de M. Dieudonné » et écrit :

« Une école mathématique française jouissant d'une notoriété universelle, se rassemble sous les enseignes [...] d'un chef mythique, N. Bourbaki. Ce personnage [..] ressuscite en lui certaines des antinomies paradoxales qu'il se flatte d'avoir balayées des cerveaux mathématiques [...]. L'axiomatisation des théories mathématiques parvenue à une maturité suffisante, tel est le principe de Bourbaki. Axiomatiser, c'est faire le tableau complet des hypothèses nécessaires à l'édification logique déductive de la dite théorie. C'est ensuite, ce niveau une fois atteint, effacer toutes les notions imagées qui soutenaient la pensée du chercheur dans son travail de découverte. Cette rupture avec la source des intuitions originelles, est une nécessité fondamentale pour le bourbakiste [...]. Le symbolisme mathématique peut, dans une brève période, rendre aisée une vaste synthèse des théories connues, plus ou moins développées. Mais pour acquérir de nouvelles notions fécondes, il faudra faire éclater ces moules par le recours direct aux réalités, qui ne se laisseront jamais embrasser toutes dans un système clos de formes perpétuellement adéquates.»

فصناعة مفاهيم جديدة تحتاج للحدس وتجريد الواقع وتصور أن ما صنع سابقا كاف لصناعة أي رياضيات تنقضه مبرهنة غودل.

مؤخرا انتقد الرياضي الروسي فلاديمير آرنولد مدرسة بورباكي :

Le grand mathématicien russe, Vladimir I. Arnold, invoque lui l'héritage d'Henri Poincaré contre Bourbaki :

« The French mathematical school was brilliant for several centuries, up to the penetrating works of Leray, H. Cartan, Serre, Thom, and Cerf. The Bourbakists claimed that all the great mathematicians were, using the words of Dirichlet, replacing blind calculations by clear ideas. The Bourbaki manifesto containing these words was translated into Russian as "all clear ideas were replaced by blind calculations." The editor of the translation was Kolmogorov. His French was excellent. I was shocked to find such a mistake in the translation and discussed it with Kolmogorov. His answer was : I had not realized that something was wrong in the translation since the translator described the Bourbaki style much better than the Bourbakists did. Unfortunately, Poincaré left no school in France. »

كل الأفكار الواضحة عوضت بحسابات عمياء...

لذلك فشلت إصلاحات الرياضيات الحديثة إذ التلاميذ لا يقدرون على التجريد فلابد من فترة حدسية للمرور من الواقع إلى الرياضيات وكان يتم ذلك عبر هندسة إقليدس وبناء عقلي لسنوات.

اليوم العصر الذهبي لمجموعة بورباكي وراءنا ولم يعد لديها ذلك الدور المهم الذي لعبته لعشرات السنين.

وكيفما كان عملهم فإنه لا أحد ينكر أن العصر الذهبي للرياضيات بدأ بأعمال ريمان ثم كنتور وويستراس ومن كان معهم ثم بورال و لوبيغ وفي المنطق زارملو وراسل ودفعه لأوجه برنامج هلبرت ونشرته مجموعة بورباكي.

أما اليوم فقد دخلنا في مرحلة الضعف فكل الرياضيات الحديثة ما هي إلا أعمال لحل معضلات هلبرت الشهيرة.

بل فقد تدريس الرياضيات نكهته إذ تحول من أفكار حية واضحة تعبر عن الواقع إلى كتابات شكلية غامضة لا يقدر على تشفيرها إلا نخبة من الرياضياتيين.

إن الرياضيات بدأت من تجريد الواقع ولخدمة الواقع لكن محاولة دفعها للتجريد لأقصى الحدود حتى في صناعتها وتدريسها جعلها لغة بلا روح ودفع لضعفها وكرهها من الجيل الجديد.

مراجع:

http://images.math.cnrs.fr/Influence-et-reception-de...

http://www.les-mathematiques.net/.../histoire...



بسم الله الرحمن الرحيم والصلاة والسلام على أشرف المرسلين.

من بن شعبانة عبد الحكيم إلى كل من انتسب إلى علم من المسلمين أما بعد فهذا ما لا ينبغي على مشتغل بعلم جهله:

تصحيح ما شاع من أخطاء :

خطأ ربط الوجود بالمادة ونسبة ذلك للعلم

خطأ الفصل بين العلم الشرعي والعلوم الدنيوية

الفكر العلماني في لاوعي المثقف العربي

خطأ إعتبار العلم الشرعي مختلفا في صناعته عن باقي العلوم.

نواصل مواضعنا في الضبط العلمي وموضوعنا اليوم مخصص لمسائل شائكة انتشرت بين الناس فبنيت عليها أفكار خاطئة، بل هو من أهم المواضيع التي سنتطرق إليها لأن القلة القلة من يدركه بين المسلمين.

ونبتدئ ذلك بسؤال الملحد : لا يمكن إثبات وجود الله علميا!!!

هذا السؤال يقودنا لإلقاء الضوء على نظرة العلم للوجود.

الوجود في العلم:

لقد إكتشف العلم الكثير من الجسيمات والتي سماها المادة كالإلكترون والبروتون والفتون وغيرها فكل هذه صنفها العلماء داخل مفهوم المادة إذ ما نراه في الكون مكون بها.

لكن إكتشافات العلم تجاوزت هذه المفاهيم بل وصلنا اليوم لدرجة من التقدم جعلتنا نقيس تأثير الحاذبية على الفضاء الزمكاني في ما يسمى بالموجات الجاذبية.

فالفضاء الزمكاني كائن فيزيائي غير مكون من المادة ورغم ذلك تدرسه الفيزياء وله وجود مثبت علميا.

بل تعد الأمر لاكثر من ذلك إذ نظّر الفيزيائيون نظريات تتكلم عن المادة السوداء والتي لا نعرف ما هي بالضبط ولا هل هي موجودة وكذلك الطاقة السوداء بل الأكوان المتعددة.

كما أن مفهوم المادة غير محصور في المكتشف إذ لا تزال الإكتشافات قائمة وآخرها بوزون هيغ.

ففي الحقيقة العلم لا يقول أن كل ما هو موجود مكون من مادة إنما هذا من الأخطاء الشائعة بل نجدها عند الكثير من المثقفين.

والملحد يبني نظرته لله عز وحل على هذا الخطأ فيظن أن كل موجود هو مادة وهذا لجهله بالميادين العلمية وطرقها في إثبات الوجود.

الإنسان بحواسه لا يثبت الوجود إلا عن طريق المادة وذلك لا يعني أن كل شيء مكون من مادة.

بل حتى العلوم الشرعية فقد تلقيناها بالسند أبا عن جد عن طريق السمع ومشاهدة النبي عليه الصلاة والسلام فتلقي العلوم حسي سواء منها الشرعي وغير الشرعي.

فالعلم يستعمل المادة ليثبت وجود ما يتجاوز المادة لأن كل ما يؤثر في المادة فهو موجود.



علميا إثبات الوجود هو إثبات تأثيره وكل ما نفعله هو تبادل المعلومات عن طريق المادة معه فليس من شيء أن تقوم النسبية على ثبات سرعة للضوء إذ تعتبر تبادل المعلومات لا يكون إلا بالضوء على أكبر سرعة.

عندما ترى حجرا فتقول هو موجود فكل ما فعلته هو قياس تاثير إنعكاس الضوء عليه عبر جهاز النظر.

بل حتى الإلكترون عندما نحاول قياسه نحوله إلى فوتون.

فهذا الذي تقوم به العلوم فعندما يقاس نسبة السكر في الدم فالعملية تتم عبر تأثيره في مواد كيميائية فالمختبر لا يعد حبات السكر في دمك إنما يحول تأثيرها لمسائل حسية تدركها حواسنا.

فكيف نعرف أن هناك حقلا مغناطيسيا لولا أن رأينا المغناطيس يسحب الحديد ؟

وكيث أثبتوا بوزون هيغ في المسرع السويسي ؟ إنما اثبتوا وجوده بتأثيره عبر تحويل ذلك بأجهزة إلى منحنيات نراها بأعيننا.

فالصواب أن الوجود يثبت بالتأثير في المادة لا أنه هو مكون من مادة.

لذلك سؤال الملحد خاطئ إنما الصواب هل يمكن للعلم إثبات تأثير الله عز وجل في كوننا والجواب نعم فنحن نرى خلقه والقوانين التي يسير عليها فوجود النظام الكوني في حد ذاته دليل على وجود الله.

وهنا لابد من تصحيح خطأ ثان وهو حصر الإثبات العلمي في ما تدرسه العلوم والتجربة وهذا خطأ إذ لو رأيت أثر مشي في الصحراء فتقول أن هناك من مر منها فقد أثبت ذلك علميا.

ألم نثبت وجود الديناصورات بآثارها وما تركته من حجريات وراءها ؟

بل العلم نفسه كالفيزياء يستعمل الكون كمختبر كبير لمراقبة ما يحدث في الكون لإثبات وجود الجسيمات إذ لا تحتاج دائما لمختبر وتجربة لتثبت وجود شيء.

فهذه النسبية أثبت صحتها أول مرة من خلال مراقبة انحراف الضوء عند مروره بجوار الشمس وروقب ذلك عند كسوفها.

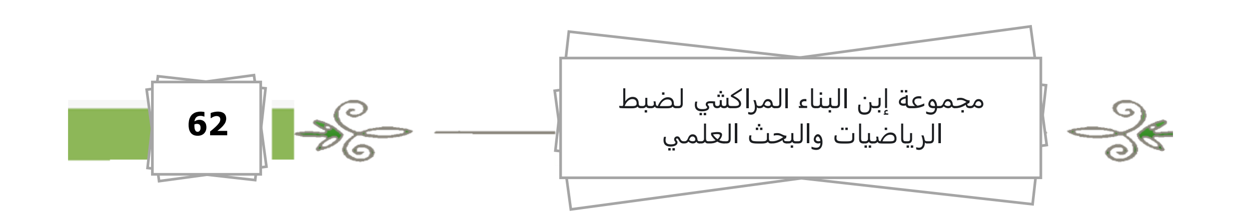
بل هناك جسيمات أثبت وجودها عبر مراقبة الإشعاعات القادمة من الفضاء.

وهذا نبتون أثبت وجوده أول مرة بالحسابات لتأثيره فيما جاوره.

لذلك الوجود العلمي واسع جدا لا يتعلق بمجرد التجربة.

وهنا نصحح خطأ آخر كذلك وهو البعض يظن أن عدم تحريف القرآن ليس مثبت علميا وكل هذا مشكله حصر العلم في بعض الميادين.

فعندما تدرس في الجغرافيا القطب الشمالي أو الجنوبي وانت لم تره ولا تعرف احدا رآه فكيف تثبت وجوده ؟ الإثبات يمر عبر تواتر النقل عن من رآه وكذلك الشرع فقد وصل القرآن إلينا عبر التواتر لهذا هذا التوتر إثبات علمي لعدم تحريفه.



وهنا نصحح خطأ آخر كذلك وما أكثر أخطاء عدم الضبط فعندما يقول الملحد أثبت عدم تحريف القرآن فهو في تصوره القرآن كتاب مطبوع لابد ان يدرس كمخطوطة لكنه لا يشكك في وجود رجل إسمه فيثاغورث لأنه تواتر عنده النقل على وجوده!!!

هذا التناقض في تفكيره نابع عن عدم علمه بأن القرآن منقول بالسماع و بالتواتر لا عبر الكتابة كغيره من الكتب وكذلك نابع عن خطأ آخر وهو حصره الإثبات العلمي في بعض الطرق التي سمع بها فلا ينتبه لوجود التواتر كدليل علمي في الكثير من العلوم كالتاريخ مثلا وفي اللسانيات ودراسة اللغات.

الإشكال اليوم أن هذا التفكير العلماني نقل عبر المدرسة جراء الترجمة الحرفية للبرامج المدرسية حتى كاد لا يكاد مثقف ينجو منه فالجميع يظن أن هناك فرقا بين ميدان العلوم الدنيوية والعلوم الشرعية وأن الإثبات العلمي متعلق بالوجود المادي وأن الشرع خارج عن ذلك.

وفي مقابل هذا نجد كذلك المشتغلين بالشرع يخطئون بظنهم ان العلم الشرعي لا تحكمه قواعد مثل العلوم الدنيوية وهذا خطأ.

بل من الناحية العلمية كلاهما ينطلق من طريقة واحدة في الإثبات والبرهنة فصدق الشرع نعلمه من الأدلة الحسية التي نراها ومن العلوم التي تلقيناها عبر الحس من النبي عليه الصلاة والسلام.

وإنطلاقا منها صدقنا بالكتاب والسنة ثم حللنا ما جاء فيهما علميا عبر تحليل عقلي يسمى بأصول الفقه وهي قواعد عقلية مبنية على نظام مسلماتي مثل البناء الرياضي تماما ومسلماتها إثنتين أن القرآن من عند الله عز وجل وأنه عربي وكل ما يأتي بعدها من قواعد فهو بتفكير عقلي سليم مثله مثل جميع قواعد العلوم.

إلا أن مسلمة كون القرآن عز وجل من عند الله برهناها بما نراه من خلق الله عز وجل ومن إعجاز في القرآن وكونه عربي بما نقل إلينا تواترا و بنص القرآن.

فعندما نقول القاعدة الأصولية الأمر يقتضي الوجوب ذلك لأننا إصطلحنا كما نصطلح في جميع العلوم من مصطلحات أن اَلْوَاجِبُ: هُوَ مَا أُثِيبَ فَاعِلُهُ، وَعُوقِبَ تَارِكُهُ، ثم نظرنا في القرآن فوجدنا أن من لا يفعل ما يؤمر به يعاقب لقوله تعالى : فَلْيَحْذَرِ الَّذِينَ يُخَالِفُونَ عَنْ أَمْرِهِ أَن تُصِيبَهُمْ فِتْنَةٌ أَوْ يُصِيبَهُمْ عَذَابٌ أَلِيمٌ {النور :63}،

فهذا إصطلاح واستعملنا مسلمة القرآن من عند الله عز وجل فكل ما فيه صحيح وفيه أن من يخالف أمره يعاقب إذن ذلك يستلزم أن الأمر يقتضي الوجوب لأنه داخل في تعريفه.

فهذا تفكير عقلي سليم نستعمله في جميع العلوم وهو مشابه للإستلزام الرياضياتي.

فمن الناحية العلمية لا فرق بين العلوم الشرعية وغيرها من العلوم فكلها مبنية على تفكير عقلي سليم صنعت منه قواعد تضبطها.



في الماضي لم يكن هناك فرق بين كون العلم الشرعي علما عقليا وغيره من العلوم فمثله مثل غيره إلا أنه أشرفها لأنه حاكم عليها، بل نجد في الماضي الفقهاء أطباء ورياضياتيين وفيزيائيين ويمارسون الكثير من العلوم.

التفريق جاء بعد عصر الإنحطاط عندما رجعت إلينا العلوم الدنيوية عن طريق الغرب حتى ظنت الطبقة المثقفة أن الدين ليس على نمطها لعدم معرفتهم بالشرع وظن المشتغلون بالشرع أن الشرع ليس منها لعدم معرفتهم بالعلوم الدنيوية بل حاربوها بدعوى أنها دخيلة ومن علوم الهيئية فليت شعري لو رجعوا للتاريخ لوجدوها علومنا تركناها وتبناها الغرب فلما ترعرعت عنده وكبرت رجعت إلينا فأنكرنا نسبها.

ولو عاش الإمام الشاطبي رحمه الله بيننا لنادى علينا بالجهل فهو صاحب الموافقات والمنادي بخدمة العلوم الدنيوية للشرع.

التفكير العلمي مبني على قواعد عقلية متينة نجدها في جميع العلوم ومنها العلم الشرعي فكلها علوم من عند الله عز وجل فقد فطر الكون كله على نفس القوانين.

بل من شروط نهضتنا أسلمة العلوم وهو تنقيحها لتخدم العلم الشرعي وتضبط به فصناعة الأنسولين صيدلية لكن نحتاجه حلالا من بقر حلال لا من خنزير وكيف نحج بلا طائرة ونصلي بلا ماء.

فنحتاج للطبيب المتمكن من الشرع طبيا بل المفتي الطبيب والمهندس الشرعي وصانع ثياب شرعي وإقتصادي شرعي وجميع العلوم نحتاج فيها من يتقنها من ناحية علمها ومن ناحية تعلقها بالشرع فهذا شرط لازم للنهضة.

لابد من إكتساب العلوم وأسلمتها لتخدم ديننا.

الوجود يتعدى وجود المادة والحس إنما المادة نستعملها لمراقبة تأثير الموجودات فيها لنثبت وجودها وخواصها أما العلم فهو واسع جدا ومن أنزل الوحي هو ذاته من علم البشر العلوم الأخرى وأمرنا بها لخدمة الشرع.



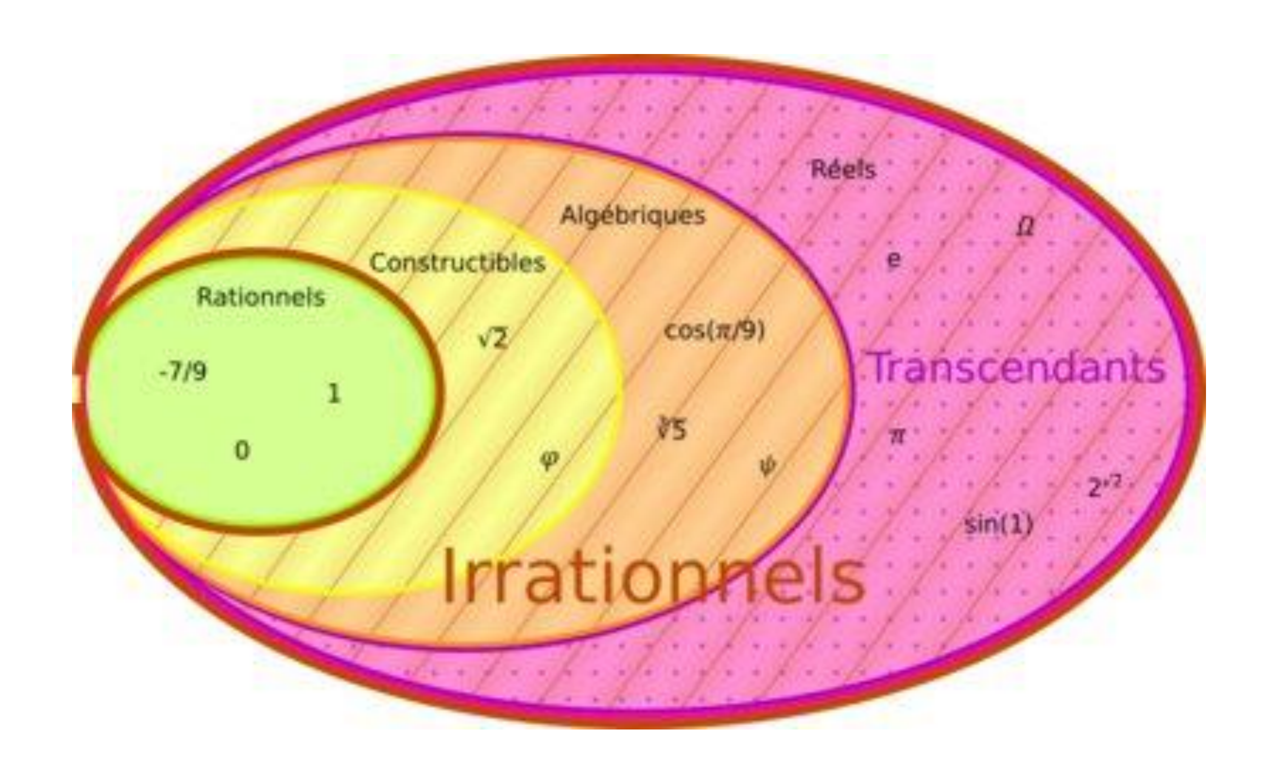
نظرية الأعداد



للتذكير:

مجموعة الأعداد الطبيعية **N** , مجموعة الأعداد الصحيحة **Z** , مجموعه الأعداد الناطقة **Q** ,
مجموعة الأعداد الحقيقية **R** , مجموعة الأعداد العقدية **C**
مجموعة الأعداد العشرية **D** أي كتابتها العشرية منتهية.
الأعداد الجبرية هي التي تكون جذرا لكثير حدود معاملاته صحيحة، فيها الحقيقية وفيها العقدية
الأعداد المتسامية هي الأعداد الحقيقية غير الجبرية

R و R^2 مجرد مجموعات لكن عند الكلام على البنيات الجبرية فتجاوزا نعبر عن
الحقل $(R,+,\times)$ بـ R وعن الفضاء الشعاعي $(R^2,+)$ على الحقل R بـ R^2
لكن متى رأيتم احدا يخلط بين هذه المفاهيم فلا تقبلوا منه هذا التجاوز بل لابد أن يبين على أي بنية جبرية يعمل فهل هي الفضاء الشعاعي R^2 أو مجموعة الأعداد المركبة والتي هي كذلك معرفة على R^2 .



يا أستاذ حدثني عن المجموعة ؟

المجموعة هي إمكانية تمييز عناصر بخصائص انطلاقا من عدم التمييز والذي نصطلح عليه بالمجموعة الخالية .

نقول إمكانية التمييز احترازا من عدم الإمكانية كمجموعة جميع العناصر فهذه لا يمكن تمييزها فهي غير موجودة.

مثلا لو أخذت من مجموعة أقلام قلمين لأشكل مجموعة فكل ما فعلته هو تمييز القلمين عن الباقي وبدون أن يتغير منهما شيء وهذا ما يفسر انتماء العنصر لأكثر من مجموعة إذ لا أحد يمنعني من استعمال أحد القلمين في إنشاء مجموعة أخرى.

في نظرية المجموعات نسلم بوجود المجموعة الخالية فهذه أول مجموعة ثم نسلم بإمكانية صناعة مجموعة انطلاقا من عنصر فيكون الوحيد فيها.

إذن الأصل المجموعة الخالية ثم تشكيل المجموعات انطلاقا من عناصر.

أما مجموعة المجموعات فهي غير موجودة وهذا ما يسمى بمتناقضة راسل ، فلو فرضنا أن هناك مجموعة عناصرها مكونة من جميع المجموعات التي يمكن أن نتصورها فسنحصل على تناقض بهذه القضية:

داخل هذه المجموعة، نكون مجموعة جزئية المتكونة من العناصر التي لا تنتمي لنفسها، و نسميها المجموعة م.

السؤال المطروح : هل المجموعة م تنتمي لنفسها أو لا ؟

إن قلنا لا تنتمي لنفسها فحسب تعريف المجموعة م بكونها مكونة من العناصر التي لا تنتمي لنفسها فلابد أن تنتمي لنفسها لانها داخلة في تعريفها و هذا تناقض.

و إن قلنا المجموعة م تنتمي للمجموعة م فحسب تعريف م بكونها مكونة من العناصر التي لا تنتمي لنفسها فلا بد أن لا تنتمي لنفسها و هذا تناقض كذلك....

إذن لا توجد مجموعة مكونة من جميع المجموعات التي يمكن تصورها.

وأصل المشكل أنه لو تصورنا مجموعة مكونة من جميع المجموعات فستشمل نفسها كعنصر فنحصل على دور إذ لبناء هذه المجموعة نحتاج لنفسها لأن البناء يتم عن طريق تمييز العناصر فكيف نميز هذه المجموعة كعنصر لبنائها كمجموعة ونحن لم نبنها بعد ؟

لذلك نظرية المجموعات ZF أضافت شرطا للخروج من هذا المأزق وهو أن لا تنتمي المجموعة لنفسها.



الصفر والمجموعة الخالية

في الحقيقة الصفر لا معنى له إلا في نظام العد أي باستعمال الجمع أو ما يقابله كالترتيب الجيد في مجموعة الأعداد الطبيعية.

أما المجموعة الخالية فوجودها مسلمة وهي لا تملك أي عنصر.

عدم وجود عناصر للمجموعة الخالية يمكن صناعة الصفر منه وذلك عن طريق تجريد الخصائص فخاصية وجود عناصر في مجموعة مع خاصية اتحاد المجموعات يمكن صناعة الأعداد الطبيعية بهما، فيصبح الصفر يقابل المجموعة الخالية من حيث عدم وجود العناصر أو المجموعة الخالية ممثلة عن الصفر ثم يضاف للمجموعة عنصرا عنصرا لصناعة الأعداد.

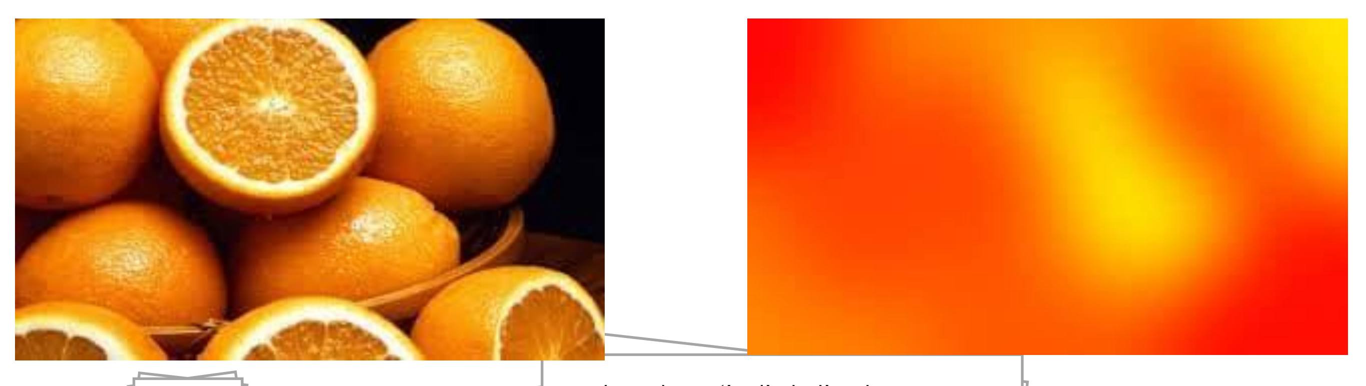
إذن مفهوم المجموعة الخالية أعم من مفهوم الصفر فالصفر ما هو إلا خاصية من خصائصها تمثل عدم وجود عناصر.

وإن أردنا ضرب مثال من الواقع فالصفر بالنسبة للمجموعة الخالية كاللون البرتقالي بالنسبة للبرتقال.

$\mathbb{N}:$

$$\begin{cases} 0 = \emptyset \\ n+1 = n \cup \{n\} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 = \emptyset \\ 1 = \{\emptyset\} \\ 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ 4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \\ \dots \end{cases}$$

$$\{\emptyset\} = \{\quad\} = \{\quad\}$$



حدثني يا أستاذ عن الأعداد الطبيعية

ما هو العدد الطبيعي ؟

لو تأملنا في تاريخ الحضارات لوجدنا أن الإنسان قد عرف الأعداد الطبيعية منذ القدم عن طريق مقابلة عناصر المجموعات بأصابع يده ثم بالأشياء كالحصيات ثم بالكتابة، وكأن الإنسان عرف التطبيقات قبل العد.

فلما كانت الأصابع أسهل شيء للعد كان النظام العشري الخيار الأفضل عند الكثير من الحضارات، إلا أن بعضها اختار أنظمة أخرى كالمايا فنجد عندهم نظام عد عشريني و كالبابليون أين نجد عندهم نظامين عشري و ستيني، وبهذا تكون الحضارات انتقلت إلى الترميز بعد التدوين.

لكن كيف نصنع بطريقة مضبوطة رياضيا هذه المجموعة ؟ فالصناعة الرياضية تعتمد في قاعدتها على مسلمات وتبنى بالمنطق الرياضي، فكان لابد من إعادة صناعة هذه المجموعة الحدسية على قواعد متينة.

هناك عدة طرق لصناعة مجموعة الأعداد الطبيعية سنختار أسهلها و أقربها إلى واقعنا و هي طريقة نيومان و التي تعتمد على نظرية المجموعات زرميلو فرانكل.

تعتمد هذه الصناعة على مسلمات نظرية المجموعات و التي نجد منها:

نسلم بوجود المجموعة الخالية ونرمز لها بـ $\varnothing$ على أن هذا الترميز جاء متأخرا، وضع من طرف أندري وايل في حملة نشر الرياضيات التي قامت بها مجموعة بورباكي الفراكنفونية

المسلمة الثانية هي وجود مجموعة أجزاء المجموعة ، فإذا أخذنا مجموعة أجزاء المجموعة الخالية نجدها تحوي عنصرا و هي المجموعة الخالية $\{\varnothing\}$، في الحقيقة هدة المجموعة هي التي تشكل لنا العدد "واحد" : 1

فكأننا اخترنا ممثلا عن العدد واحد بصناعة كائن رياضي له هذه الخاصية و الرياضيات كلها خواص إلا أنه يجب التنبيه إلى أن هذا ليس من باب أصناف التكافؤ بسبب متناقضة مجموعة جميع المجموعات غير موجودة.

ثم نستخدم مسلمة الإتحاد اتحاد مجموعتين يعطي مجموعة : فيكون تعريف كل عدد طبيعي موالي بالعدد الطبيعي الذي سبقه اتحاد المجموعة التي عنصرها هي مجموعة العدد الطبيعي السابق نفسه فنجد $\{\{\varnothing\},\varnothing\}$ وهنا استعملنا كذلك مسلمة أنه بعنصر يمكننا تشكيل مجموعة هو بداخلها و لوحده.

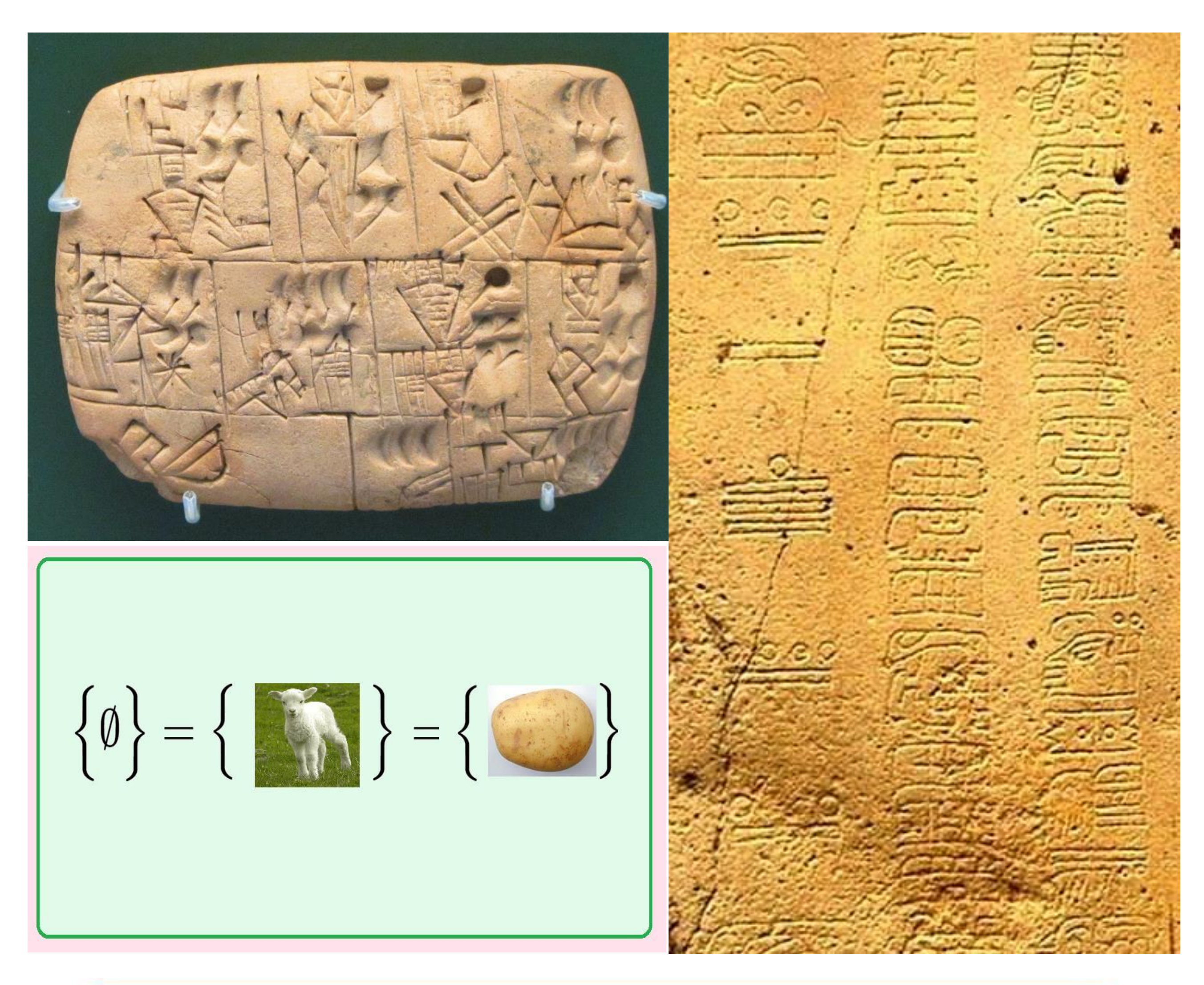
فهذا هو العنصر الموالي للواحد و نرمز له بإثنين و هكذا نكون قد عرفنا مجموعة الأعداد الطبيعية كما هو في الصورة.

لكن نحتاج مسلمة المالانهاية لكي نستمر و نوحد بعدد غير منتهي فنشكل مجموعة الأعداد الطبيعية.

مبدأ هذه الطريقة سهل و هو أنك إذا أردت أن تعرف لأحدهم ما هو الخروف فأفضل طريقة أن تريه خروفا، هكذا إذا رأى خروفا آخر يشبهه يعرفه.

لو نظرنا إلى العدد "واحد" $\{\emptyset\}$ الذي صنعناه فنلاحظ أنه إذا أخذنا أي مجموعة لها تقابل مع مجموعتنا فعدد عناصرها سيكون واحد ، فالمسألة مسألة تقابل بين المجموعات فما العدد الواحد إلا خاصية نراها في الواقع فجردناها عن الأشياء لتعلق في أذهاننا كمفهوم رياضي.

https://fr.wikipedia.org/.../Construction_des_entiers...



$\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} 0 = \emptyset \\ n+1 = n \cup \{n\} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 = \emptyset \\ 1 = \{\emptyset\} \\ 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ 4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \\ \dots \end{cases}$$

Liste des chiffres cunéiformes babyloniens de 0 à 59.

		unités									
		...0	...1 𒁹	...2 𒈫	...3 𒐈	...4 𒐉	...5 𒐊	...6 𒐋	...7 𒑂	...8 𒑄	...9 𒑆
dizaines	0...		𒁹	𒈫	𒐈	𒐉	𒐊	𒐋	𒑂	𒑄	𒑆
	1... 𒌋	𒌋	𒌋𒁹	𒌋𒈫	𒌋𒐈	𒌋𒐉	𒌋𒐊	𒌋𒐋	𒌋𒑂	𒌋𒑄	𒌋𒑆
	2... 𒎙	𒎙	𒎙𒁹	𒎙𒈫	𒎙𒐈	𒎙𒐉	𒎙𒐊	𒎙𒐋	𒎙𒑂	𒎙𒑄	𒎙𒑆
	3... 𒌍	𒌍	𒌍𒁹	𒌍𒈫	𒌍𒐈	𒌍𒐉	𒌍𒐊	𒌍𒐋	𒌍𒑂	𒌍𒑄	𒌍𒑆
	4... 𒐏	𒐏	𒐏𒁹	𒐏𒈫	𒐏𒐈	𒐏𒐉	𒐏𒐊	𒐏𒐋	𒐏𒑂	𒐏𒑄	𒐏𒑆
	5... 𒐐	𒐐	𒐐𒁹	𒐐𒈫	𒐐𒐈	𒐐𒐉	𒐐𒐊	𒐐𒐋	𒐐𒑂	𒐐𒑄	𒐐𒑆



Chiffre maya	Valeur	Chiffre maya	Valeur
𝋠	0	𝋪	10
𝋡	1	𝋫	11
𝋢	2	𝋬	12
𝋣	3	𝋭	13
𝋤	4	𝋮	14
𝋥	5	𝋯	15
𝋦	6	𝋰	16
𝋧	7	𝋱	17
𝋨	8	𝋲	18
𝋩	9	𝋳	19

نظرات في مفهوم الأعداد

العدد تكميم للتكرار فهو مبني على تكرار الوجود.

عقل الإنسان يقوم بتجريد خواص الأشياء في الواقع ليعطي لها وجودا ذهنيا ومن هذه الخواص الوجود ذاته فالإنسان أعطى للوجود وجودا ذهنيا منفكا عن غيره ثم كرره فالواحد ما هو إلا تكميم لوجود شيء فمتى تكرر وجودان اصطلح عليهم البشر العدد الإثنين وهكذا مع التكرار أعطى الإنسان اسما لكل كمية من التكرار : واحد، إثنين ثلاثة، أربعة...

فالتكرار والعدد شيء واحد كما نص على ذلك ابن البنا المراكشي في كتابه تلخيص الحساب (صورة المخطوط).

الرياضي استعمل نفس طريقة البشر في التفكير لصناعة مجموعة الأعداد الطبيعية فبناها على مسلمات أولها وجود المجموعة الخالية فجعلها كعنصر من مجموعة لصناعة العدد واحد ثم وضع هذا الواحد داخل مجموعة وبجانبه المجموعة الخالية كعنصر ثان فصنع الإثنين وهكذا كرر الوجود عن طريق المجموعات

$0=\{\}$

$1=\{0\} = \{\{\}\}$

$2=\{0 , 1\} = \{\{\} , \{\{\}\}\}$

$3=\{0, 1, 2\} = \{\{\}, \{\{\}\} , \{\{\} , \{\{\}\}\} \}$

.....

أما عملية الجمع فهي مجرد اتحاد مجموعتين من العناصر فالجمع ضم تكرار لتكرار.

أما الضرب فهو تكرار التكرار فعندما نقول $3 \times 4 = 12$ فنحن نكرر 3 أربع مرات و3 نفسها تكرار للواحد فالضرب تكرار.

لكن واجهت البشرية منذ القدم مشكلة الترميز للتكرار فكلما كررنا الوجود صنعنا عددا جديدا فكان لزاما إعطاء أسماء لكل هذه الأعداد وكتابتها.

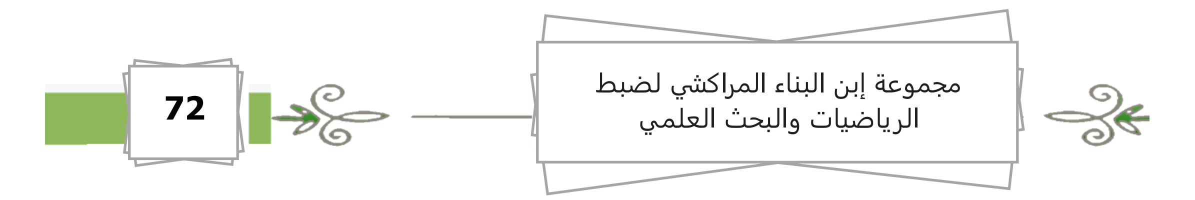
بعد قرون من صناعة ترميزات وصلنا اليوم لطريقة كتابة تجمع بين سهولة الترميز والتوافق مع العمليات الجبرية من جمع وضرب وهذا ما نسميه الكتابة العشرية.

فالكتابة العشرية طريقة ترميز خوارزمية للأعداد مبنية على العمليات الجبرية الجمع والضرب.

كون الكتابة العشرية مبنية على الجمع والضرب يجعلها متوافقة مع توزيع الضرب على الجمع ومن هنا نشأت جداول الضرب فجداول الضرب تساعد البشر على القيام بعمليات جبرية على الترميز في الأساس العشري وذلك باستغلال خاصية توزيع الضرب على الجمع.

البشر لم يتوقف عند تكرار الوجود بل نظر كذاك لخواص أخرى كتفكيك الموجود لكنه نظر إلى أجزاء الموجود كتكرار أجزاء تعطي الموجود.

الثلث مثلا ما هو إلا جزء إذا تكرر ثلاث مرات أعطى الكل وهكذا نشأت الأعداد الناطقة.



فالعدد الناطق هو مقارنة بين عددين طبيعيين من ناحية الجزء والكل فهو مقارنة تكرار بتكرار كما نص على ذلك ابن البنا المراكشي في كتابه السابق الذكر.

ثم قام البشر بالترميز لهذه المقارنة بطريقتين الطريقة المباشرة وهي الكسور $2/3$

وغير المباشرة عن طريق محاولة كتابة هذه الكسور في نظام عشري فهي مقارنة بأجزاء من قوى لعشرة.

لكن المشكلة في هذه الكتابة هو وجود أعداد لا يمكن التعبير عليها بتكرار منته مثال ذلك

$1/3 = 0.333...$

ومن هنا ظهر التكرار غير المنته في الكتابة العشرية الذي طرح بدوره سؤالا عن ماهية الكتابة الكيفية لأرقام بعد الفاصلة والذي أنتج في النهاية الأعداد الحقيقية.

لو تأملنا في تاريخ الأعداد لوجدناها مجرد محاولة البشر لتكميم الوجود ومقارنته مع بعضه مع فكرة التكرار والمقارنة غير المنتهيين.

أما الأعداد المركبة فهو تنوع في التكرار والذي توسع ليعطي مفهوم الفضاء الشعاعي إذ الأشعة هي مجرد أعداد موجهة والوجهة هي مجرد نوع.

فالعدد التخيلي i هو وجود واحد مثل الواحد 1 لكنه من نوع مختلف لذلك نمثله في المعلم في محور y العمودي على خلاف 1 الذي نمثله في محور x الأفقي.

العمليات التي نقوم بها على الأعداد المركبة هي تكرار للوجود مع تكرار لتغيير وجهة ف

$i \times i = -1$

هو تكرار تغيير وجهة نمثله بتكرار دوران $pi/2$ مرتين ليعطي الزاوية pi والتي تنطبق مع -1

فالأعداد والفضاءات الشعاعية مبنية على : التكرار، مقارنة التكرارت، تنوع التكرارات، ولمسة من المالانهاية.


الباب الأول من الكتاب

اعلم ان الرسم الذي للعدد فيه انما هو تنبيه
على ما في النفس وهو من عرض وفصل وقد ظن بعض
الناس انه حد وان حده كثرة مؤلفة من احاد
او من وحدات وليس ظنه بصحيح لان الكثرة نفس
العدد وليس كالجنس للعدد وحقيقة الكثرة
انها مؤلفة من وحدات فقول القايل كثرة مؤلفة
من وحدات كقوله كثرة فان الكثرة اسم للمؤلف
من احاد وقوله من احاد ومن وحدات لفظ بالجمع
وهذا اللفظ لا يفهم معناه ولا يعرف الا بالكثرة

لنضبط الرياضيات معا

يا أستاذ هل فهمت فعلا برهان إقليدس في أن عدد الأعداد الأولية غير منته ؟

إن من أصعب الأمور في الرياضيات خصوصا وفي العلوم عموما توضيح دقائق العلوم، إذ مثل هذه الأمور موجهة لمن ينتسب إلى الرياضيات وأغلبهم في قناعة من أنفسهم أنهم قد فهموا الرياضيات وهضموها فلا يحتاجون لمن يوضح لهم الأمور.

لو أخذنا كمثال برهان إقليدس في عدد الأعداد الأولية فقد بناه كما يلي:

لنأخذ عددا منتهيا من الأعداد الأولية ولنأخذ العدد n المكون من جدائها زائد واحد.

هذا العدد الجديد يقبل قاسما أوليا وهذا القاسم لا يمكنه أن يكون من مجموعتنا الأولى لأن جميع عناصرها لا تقسم n فهو عدد جديد.

إذن ما بينه إقليدس أنه كلما أخذنا مجموعة من الأعداد الأولية استطعنا إضافة عدد جديد لها فهو برهان بصناعة تطبيق متباين لمجموعة الأعداد الطبيعية في مجموعة الأعداد الأولية عن طريق تعريف تراجعي لمتتالية إذن هو برهان مباشر.

البعض يظن أن برهان إقليدس بالخلف وهذا غير صحيح لكن الفرق خفي جدا وسنبينه هنا:

إذا استعملنا : البرهان بالخلف أي فرضنا أن مجموعة الأعداد الأولية منتهية ثم بينا وجود عدد جديد لا ينتمي إليها إذن هذا تناقض إذن العكس صحيح فهي غير منتهية.

فالمشكل هنا أننا استعملنا مبدأ الثالث المرفوع وهو إذا كانت القضية خاطئة فعكسها صحيح وهذا لم يقم به إقليدس إنما برهانه مباشر وبنائي.

فإقليدس برهن مباشرة على كون المجموعة غير منتهية ولم يستعمل مبدأ الثالث المرفوع.

قد يقول البعض البرهانين متكافئين وهنا نقول له:

هذا صحيح في ظل المنطق الكلاسيكي لا المنطق الحدسي الذي يرفض هذا المبدأ.

الأمر الثاني : قد تعلمنا من الرياضيات المعاصرة أنه مع الصحيح والخطأ هناك القضايا غير القابلة للتقرير فلذلك طريقة البرهنة المدرسة في مدارسنا طريقة بدائية إذ لا تأخذ بعين الاعتبار مشاكل القضايا المنطقية المعاصرة والتي قادتنا إلى مبرهنة عدم الاكتمال لغودل.

يمكننا أن نتساهل في ظل الرياضيات التعليمية لتلاميذ الثانوي في مثل هذه الدقائق لكن متى وصلنا إلى المستوى الجامعي وجب التنبيه على مثل هذه الفروق لكي لا نقع في براهين خاطئة نظنها صحيحة.

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8me_d...




Actualisée, sa démonstration se présente comme suit : soit $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ une liste finie de nombres premiers distincts. Si *N* désigne leur produit, les nombres premiers déjà énumérés ne peuvent pas diviser *N* + 1 ; or, tout nombre possède un facteur premier, donc il existe un nombre premier qui ne fait pas partie de la suite donnée. Le résultat selon lequel tout nombre possède un facteur premier est prouvé dans les propositions 31 et 32 du livre VII des Éléments, par descente infinie[3]. On peut aussi le démontrer ainsi : *q* le plus petit diviseur strictement supérieur à 1 de l'entier naturel *N* + 1 est nécessairement premier, car tout diviseur de *q* est un diviseur de *N* + 1, donc est 1 ou *q*[4].

L'argumentation utilisée par Euclide permet de construire par récurrence une suite injective (q_n) de nombres premiers : q_n est défini comme le plus petit facteur premier de $1 + \prod_{k<n} q_k$. Cette démonstration directe n'est donc pas une démonstration par l'absurde, contrairement à ce qui a été souvent affirmé[5]. De fait, comme le remarque Gérald Tenenbaum, la preuve d'Euclide « est trop simple pour être ineffective[6] » : la construction permet de montrer que le *n*-ième nombre premier p_n est inférieur ou égal à $2^{2^{n-1}}$.

يا أستاذ حدثني عن الأعداد الأولية

يا ولدي : إن الإنسان لما اكتشف الأعداد الطبيعية، اكتشفها كمجموعات من العناصر يمكن المقابلة بينها كخمس خرفان و خمس أحجار وخمس خشيبات، و لما اكتشف الجمع و الضرب كاتحاد مجموعات و اكتشف توزيع الضرب على الجمع طرح في ذهنه سؤالا ؟ ما العلاقة بين الجمع و الضرب و كيف يمكن أن نقسم المجموعات على عدد آخر من المجموعات المتساوية ؟ فيمكنك قسمة أربعة أشياء على مجموعتين كل منهما فيها شيئين و يمكنك قسمة تسع أشياء على ثلاث مجموعات كل منهما فيها ثلاثة أشياء لكن هل يمكنك قسمة سبع أشياء على أكثر من مجموعة ؟

التلميذ : لا

الأستاذ : سرعان ما لاحظ الإنسان أن هناك مجموعات لا يمكن قسمتها على مجموعات غير وحيدة العنصر فسمى هذه الأعداد الأولية وبما أن المسألة تتعلق بالقسمة على أكثر من مجموعة فالعدد واحد ليس منها لأنه لا يفكر أحد في قسمته فهو بذاته وحيد عنصر بعكس المجموعة المتعددة العناصر.

السؤال الذي طرح نفسه ، كم يوجد من مجموعات بهذا الشكل ؟ هل هناك عدد معين، أم أننا نجد مجموعات كثيرة لها نفس الخاصية ؟

أقدم كتابة للأعداد الأولية وجدت على عظم بجانب بحيرة إيدوارد في الزئير بإفريقيا والتي تعود إلى أكثر من عشرين ألف سنة ، يسمى هذا العظم بعظم إيشانغو و كتب عليه : 11،13،17،19 ، هل هي مجرد صدفة أم أعداد أولية مقصودة ؟ لا ندري.

لكن الذي نعلمه أن الإغريق اهتموا بالأعداد الأولية فنجد ذكرا لها عند أرسطو في شكل هندسي لكن الفضل يرجع إلى إقليدس حيث وضع في كتابه العناصر قواعد الحساب.

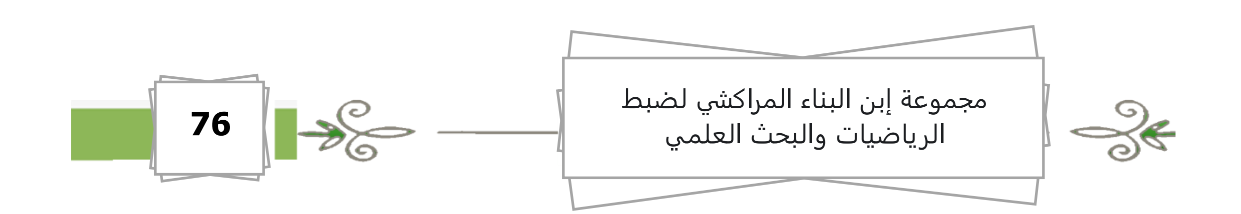
قام اقليدس ببرهنة أن عدد الأعداد الأولية غير منته بفكرة بسيطة جدا إذ قال لو كان عندنا مجموعة فيها أعداد أولية فيكفي أن نضربها ببعضها و نضيف إليها واحد لنصنع عددا لا يمكننا قسمته على أي عنصر من المجموعة.

فلا بد أن يكون هذا العدد الجديد إما أوليا أو يقبل القسم على عدد أولي ليس في المجموعة.

فمهما أخذت من أعداد أولية ووضعتها في مجموعة فهناك عدد أولي خارجها، في الحقيقة هذا هو بعينه تعريف المالانهاية.

وقد استطاع الإغريقي اراطوسطان وضع خوارزمية لتحديد الأعداد الأولية وهي بحذف مضاعفات الأعداد في جدول إلى أن تبقى الأعداد الأولية لكنها طويلة جدا و تحتاج جداول كبيرة.

بعد الاغريق ترك الرياضياتيون الأعداد الأولية جانبا ذلك أن أهميتها لم تتضح لهم بعد بسبب عدم تكوين مضبوط لمجموعة الأعداد الطبيعية.



أهمية الأعداد الأولية تكمن في أنها لبنة بناء الأعداد فكل عدد يفكك لجداء قوى منها ، فإذا أردنا معرفة طبيعة مجموعة بعملياتها فأفضل طريقة هي دراسة توزيع عناصرها بالنسبة لعملياتها.

بالنسبة للأعداد الطبيعية هذا يعني أن الأعداد الأولية نقطة جمع بين خاصية الجمع و الضرب فمن ناحية لا تنتج بضرب غيرها من الأعداد و من ناحية أخرى هي منتجة بمجموع متكرر لواحد.

التلميذ : هل توجد علاقة تعطيان جميع الأعداد الأولية ؟

الأستاذ : في بداية القرن السابع عشر قام العالم ماران ميرسان بمحاولة صناعة علاقة تنتج الأعداد الأولية فزعم أن إثنين مرفوعة بقوة طبيعية و ننقص من ذلك واحد تعطي علاقة للأعداد الأولية $2^n - 1$

يعرف هذا العدد اليوم بإسمه، لكن فرانك نيلسون بين أن هذه العلاقة لا تعطي عددا أوليا من أجل أس يساوي 67:

$2^{67} - 1$

رغم أن هذا العدد لا يشكل دائما عددا أوليا فله قيم كثيرة أولية فهو يستعمل لحد اليوم في إيجاد أعداد أولية كبيرة

كذلك فيرما زعم بعده أن إثنين أس اثنين أس نون ناقص واحد عدد أولي.

$2^{(2^n)} - 1$

التلميذ : كيف يمكننا أن نجد هذه الأعداد ؟

الأستاذ : سؤال مهم جدا ،هذه الأعداد كيف هي مرتبة و موزعة بين الأعداد الطبيعية ؟ و هل لها عبارة تولدها ؟

لقد حاول الكثير من العلماء جاهدين معرفة سر الأعداد الأولية ما هي علاقتها كيف تحسب ... لكن باء ذلك بالفشل إلى أن جاء أولر أحد كبار العلماء في الرياضيات و كان حسابا ماهرا فقد حسب جدولا للأعداد الأولية من واحد إلى مئة ألف !!!! وبين خطأ فرضية فيرما الذي زعم أن إثنين أس اثنين أس نون ناقص واحد عدد أولي.

$2^{(2^n)} - 1$

لكن للأسف أولر لم يجد صيغة ظاهرة من جدوله الذي صنعه بل كتب أن هناك شيئا غامضا لم تكتشفه النفس البشرية بعد فيكفي النظر إلى جدول الأعداد الأولية ليتبتن أنه لا توجد علاقة ظاهرة بينها.

لم يكتشف العلماء زمانها علاقة مبسطة للأعداد الأولية لكنهم وضعوا فرضيات حولها منها فرضية غولدباخ و التي تقول هل يمكن كتابة أي عدد طبيعي كمجموع لعددين أوليين ؟

اهتم كذلك العلماء ببعض الأعداد الأولية الغريبة فمثلا 3 و 5 بينهما 2 و 5 و 7 بينهما إثنان و17 و19 بينهما إثنان هذه الأعداد تسمى التوائم فهل هناك عدد غير منتهي من التوائم ؟

لا أحد يعرف لحد اليوم لكن هناك مبرهنات كثيرة حول هذه الفرضيات.



سنوات بعدها جاء العالم الكبير غوص، حين كان سنه 16 سنة ، فكر فقال إن لم يمكن إيجاد صيغه للأعداد الأولية فهل يمكن حساب عددها في جدول محدود ، كم عددها إذا حسبنا الأعداد الاولية الأقل من عدد طبيعي معين ؟

فقام باحصائها و استخلص إلى أن عددها يقارب عدد خانات الجدول مقسوم على لوغارتمه .... و كان هذا أول استنتاج لمبرهنة عدد الأعداد الأولية حيث تعطي كثافتها بين الأعداد الطبيعية.

غوص كان عالما لا يحب نشر أبحاثه إن لم تكن مبرهنة لذلك لم ينشر ما أكتشفه حول هذه الأعداد إلى أن جاء ليجاندر فنشره بل زاد في تقريب حسابات غوص.

التلميذ : لكن هذه الملاحظة جاءت من استقراء الأعداد الأولية فهل هذا مقبول في الرياضيات ؟

الأستاذ : يا ولدي الرياضيات تحتاج لبرهنة مضبوطة لكن أحيانا هي كالفيزياء تحتاج لتجربة ثم استخلاص قانون منها ثم برهنته فما قام به غوص هو الذي يقوم به غيره من العلماء محاولة النظر الى الأعداد لعلهم يكتشفون شيئا مميزا ثم يصنعون له علاقة فيبرهنونه، كثيرا من العلماء يعتمدون هذه الطريقة فلا تتردد في استعمالها إن احتجت لذلك، أحيانا التعويض قد يعطيك أفكارا.

تقريبات غوص خولت للروسي بافنوتي ستيبيشاف سنة 1852 برهنة تقريب لعدد الأعداد الأولية اذ برهن أن في جوار المالانهاية عدد الأعداد الأولية الأقل من عدد طبيعي n هو محصور بين 0.921 مضروب في n تقسيم لوغارتمه و 1.106 مضروب في n تقسيم لوغارتمه و هذا حصر جيد مكن هدمار و بواسون سنة 1896 ببرهنة أنها فعلا تكافئ n تقسيم لوغارتمه في جوار المالانهاية

يرمز اليوم لهذه الدالة و التي تعطي لكل عدد طبيعي عدد الأعداد الأولية الأقل منه ب بي

$pi(x) \sim n/ln(n)$

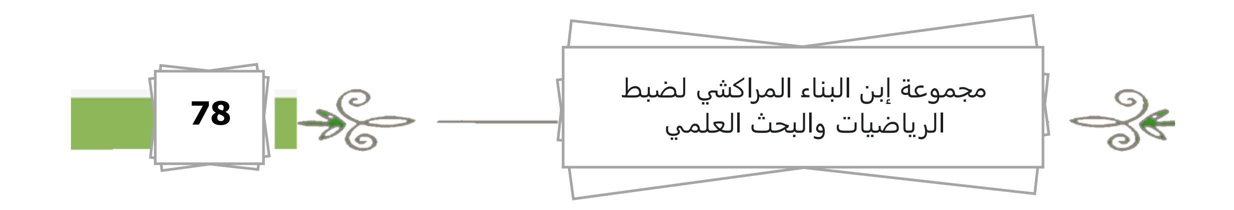
في الحقيقة غوص قام بعمل أفضل إذ قرب عدد الأعداد الأولية بدالة لوغارتم التكامل وهي تكامل مقلوب اللوغارتم وهنا قد ربط بين الأعداد الأولية و بين عالم الدوال الحقيقية التي نستطيع دراستها بمشتقاتها و تقاربها.

لكن رغم ذلك هذه الدالة لا تعطي صيغة للأعداد الأولية إنما تعطي كيفية توزيعها في جوار المالانهاية.

لم يستمر الأمر طويلا حتى تتلمذ على غوص عبقري آخر اسمه ريمان الذي بابتكاراته قلب الرياضيات رأسا على عقب فهو صاحب تكامل ريمان و مبرهنات عديدة في أساسيات الرياضيات المعاصرة.

ريمان كان يؤمن بقوة التحليل العقدي فقام بالاهتمام بمشكلة قديمة حلت من قبل من العالم أولر و التي تعرف بمسألة بال أو بازل نسبة للمدينة السويسرية بال ، والتي تسأل مجموع مقلوب مربعات الأعداد الطبيعية غير المعدومة كم يساوى ؟

لقد برهن أولر أن مجموعها هو مربع العدد بي تقسيم ستة بطريقة عجيبة جدا



إذ أخذ النشر المحدود للدالة الجيبية فقسمه على x ثم اعتبره ككثير حدود ينعدم عند كل مضاعفات π ومنه هي تكتب كجداء غير نهائي لكثيرات حدود أحادية جذرها مضاعف ل π ثم حسب معاملات هذه الجدآت و قارنها مع معاملات النشر المحدود فوجد من ناحية معامل x^2 يساوي سلسلة جمع مقاليب مضاعفات مربعات الأعداد الطبيعية غير المعدومة مقسومة على π مربع و من ناحية أخرى مقلوب $3!$ أي مقلوب 6 فاستنتج أن السلسلة تتقارب إلى π مربع على 6.....

بالطبع هذه الطريقة لا تعد برهانا لكنها أعطت قيمة السلسة و جعلت أولر مشهورا ، سنوات بعدها قام آول بتقديم برهان مضبوط عن طريق التكاملات.

أولر قام بأكثر من ذلك فقد أعطى علاقة لحساب جميع مجموع مقاليب الأعداد الطبيعية غير المعدومة بقوى زوجية ، لكن لم يتمكن من حساب القوى الفردية و المسألة لم تحل لحد اليوم.

أولر بحسابه لهذه المجاميع عرف ما يسمى اليوم بالدالة زيتا، وهي الدالة التي ترفق لكل عدد مجموع مقاليب الأعداد الطبيعية غير المعدومة المرفوعة بقوة هذا العدد فهي خليط بين الأعداد الطبيعية و الدوال الأسية

في محاولة أولر لحساب قيمة المجموع استطاع أن يحول هذا المجموع إلى جداء مقاليب أعداد تحسب فقط بأسس أعداد أولية بدل الطبيعية و هنا استطاع أولر الربط بين سلسلة مجاميع إلى جداء يتعلق فقط بالأعداد الأولية، يعرف اليوم هذا الجداء بجداء أولر.

مع تطور الرياضيات قام العلماء بتمديد القوة في هذا المجموع إلى قوى حقيقية كيفية بل عقدية كذلك مما أعطى معنى للدالة زيتا في مجموعة الأعداد المركبة لكن بقيت في مجال الأعداد الجزء الحقيقي الأكبر من واحد و هذا مفهوم لأن اقل من ذلك يجعل السلسة متباعدة.

ريمان كان من المؤمنين بقوة التحليل العقدي فقام بتمديد هذه الدالة تحليليا إلى جميع المجموعة العقدية ما عدا الواحد ثم حاول دراستها.

التلميذ : لكن يا أستاذ كيف يمكن دراسة دالة معرفة بمجموع غير منته ؟

الأستاذ : ذلك ممكن بالتكاملات، لا تنسى يا ولدي أن ريمان مخترع تكامله و الذي يعتمد على المجاميع وهذا الذي فعله ريمان اذ حاول دراسة الدالة و ربطها بدالة أخرى تسمى الدالة غاما و هي دالة تكاملية تمثل تمديد العاملي في الأعداد الطبيعية.

لدراسة دالة لابد من دراسة أصفارها فقام ريمان بحساب أصفار الدالة زيتا فبين بسهولة أنها لا تنعدم عند الأعداد العقدية ذات الجزء الحقيقي الأكبر من الواحد، ثم انطلق يدرس الأعداد الأخرى ، فبعلاقته التي وجدها بين الدالة زيتا و الدالة غاما استطاع بسهولة أن يبين أنها لا تنعدم كذلك عند الأعداد ذات الجزء الحقيقي الأقل من الصفر ماعدا الأعداد الزوجية السالبة و هذه نسميها الأصفار البديهية.

ثم انطلق يدرس الدالة على الأعداد التي جزؤها الحقيقي بين الصفر و الواحد .... فشيء حدسي ظهر للعيان و هي أن الأصفار الأولى التي حسبها بواسطة طرق تقريبية جزؤها الحقيقي يساوي النصف ....



ومن هنا بدأت حكاية حدسية ريمان من أصعب الحدسيات التي تركت أثرها في قرننا و لحد اليوم .... إذ لم يتمكن أحد بعد برهنة ذلك....

هل جميع أصفار الدالة زيتا غير البديهية جزءها الحقيقي يساوي النصف ؟

في سنة 1900 قام هلبرت في الإجتماع العالمي للرياضيات بباريس بطرح 23 سؤالا في الرياضيات تمثل مسار الرياضيات للأجيال القادمة و الرتبة السادسة عشر تظهر حدسية ريمان.

أنتج الرياضياتيون نتائج كثيرة حول هذه الفرضية منها ما يعادلها و منها ما ينتج إن كانت صحيحة و منها ما ينتج إن كانت خاطئة ومنهم من برهن أن جذورها غير منتهية في مجال معين....

بظهور الحواسيب استعملوها لحساب أصفار الدالة زيتا فتحققوا من صحة فرضية ريمان إلى عشرة ألاف مليار صفر لكن كل فرضية في الرياضيات تحتاج لبرهان وبقي حل هذه المسألة حلم كل رياضياتي.

التلميذ : لكن ما الفائدة من حلها يا أستاذ ؟

الأستاذ : الدالة زيتا تربط بين الأعداد الطبيعية و العقدية و بين المنقطع و المستمر و الأعداد الأولية.

في كتابتها تظهر الأسية و الأعداد الأولية موزعة بعلاقة مع الدالة اللوغارتمية، حتى مجاميع قوى الأعداد الطبيعية عندما نكامل الكثير الحدود الذي يعطي علاقتها بين الناقص واحد وواحد نجد قيم الدالة زيتا عند القوة المستعملة...

بعض العلاقات في الدالة زيتا تشبه علاقات في ميكانيك الكم بل المسافة بين أصفار الدالة زيتا احصائيا تشبه قيم المصفوفة الهرميتية العشوائية و التي تستعمل في ميكانيك الكم.

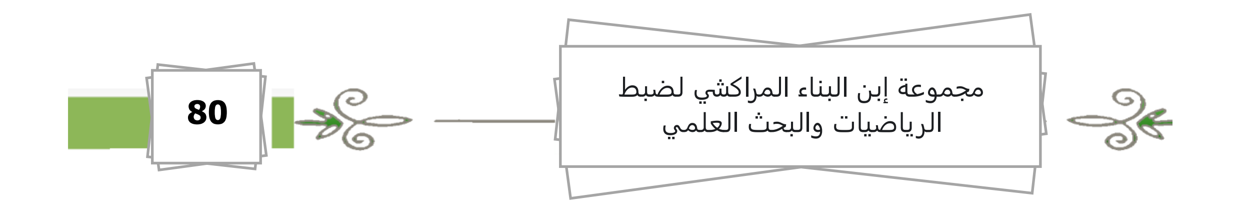
الدالة زيتا تعبر عن زبدة الرياضيات وتدفعنا لنتساءل عن طبيعة الرياضيات خصوصا و عالمنا عموما ، مما هو مكون ، ما هي الأعداد الطبيعية، ما هي الأعداد الحقيقية، ما هي هذه الدوال و كيف لمجموع غير منته لمقاليب أن يعبر عن أساسيات بناء الأعداد الطبيعية.

ما علاقة كل هذا بميكانيك الكم ؟ هل عالمنا هو مجرد بناء من أعداد أولية ؟ هل كل الظواهر الفيزيائية ما هي إلا خلاصة عمليات بسيطة من جمع و ضرب...

الدالة زيتا تجمع بين جميع فروع الرياضيات و الآن بدأنا نكتشف علاقات لها بالفيزياء، فحل حدسية ريمان سمثل خطوة أساسية في فهم الرياضيات و توجيهها في القرون القادمة.

قال ديفيد هلبرت : لو استيقظت ألف سنة بعد اليوم لكان أول سؤال لي هل برهنت حدسية ريمان ؟

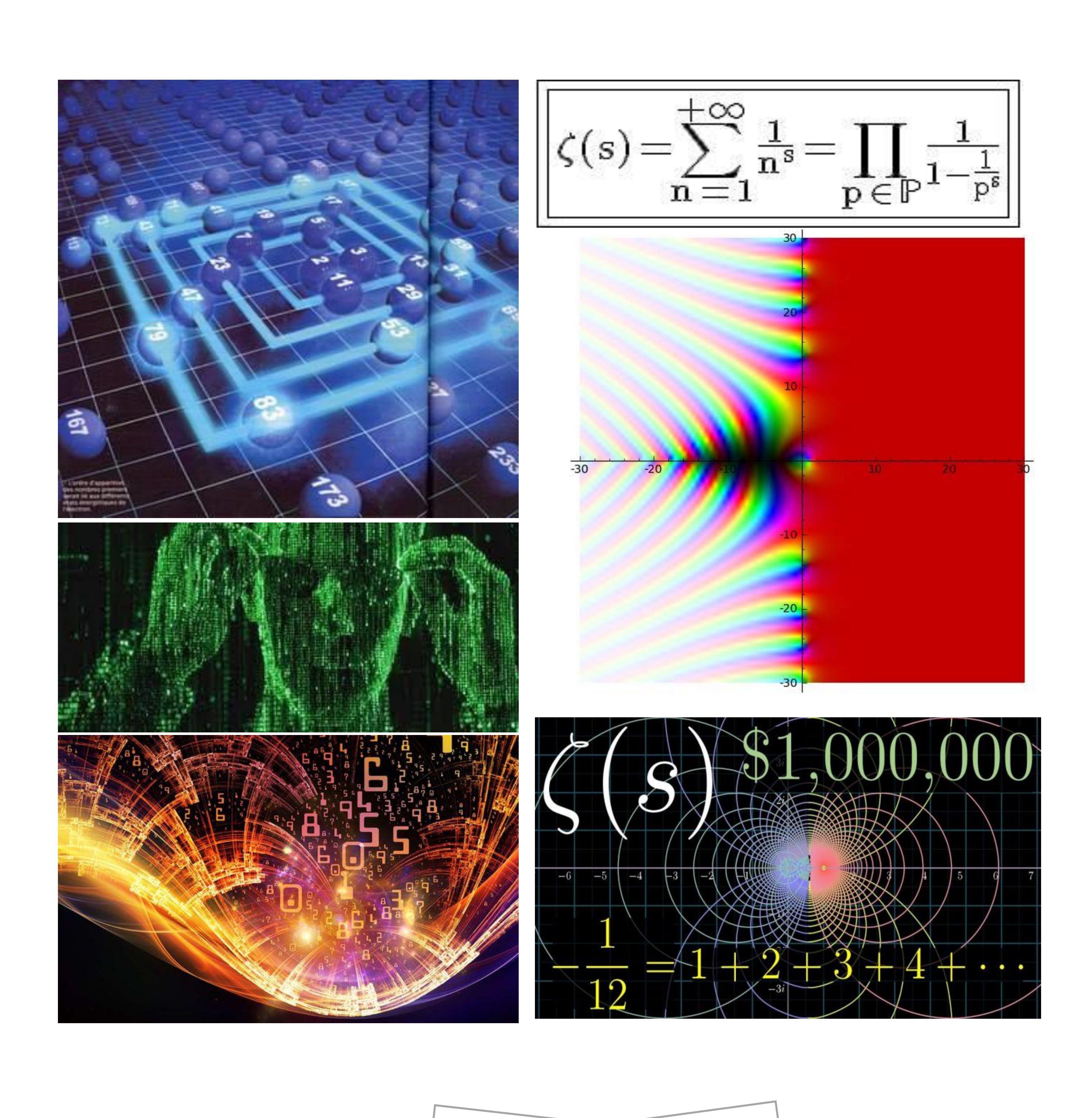
مازال العلماء يدرسون الأعداد الأولية لحد اليوم سواء عدديا أو تحليليا كما فعل ريمان و لهم نتائج عديدية، ففي سنة 2009 برهن الصيني الأمريكي زهانغ يتانغ أنه يوجد عدد غير منته من الأزواج الأولية التي الفارق بينها أقل من سبعين مليون ، حسن هذا الحصر بعد ذلك إلى 246 ، و برهن غرين و تاو سنة 2004 أنه يمكنا أن نجد أعدادا أولية بالعدد الذي نريد بحيث الفارق بينها تباعا متساوي.



سنة 2000 برهن كيت بال وريفوال أن قيم الدالة زيتا عند الأعداد الفردية تحتوي على عدد لا نهائي من الأعداد غير الناطقة.

رغم كل ما أنتج حول الأعداد الأولية و الدالة زيتا ، لم نستطع لحد اليوم أن نجيب على سؤالنا الأول : ماذا تمثل الأعداد الأولية بالنسبة لعالم الرياضيات...

لعل حدسية ريمان تحتاج اختراع رياضيات جديدة تغير نظرتنا للرياضيات و للعالم بأسره......



هل الصفر عدد طبيعي ؟

في الرياضيات كل الكائنات تبنى على مسلمات والأعداد الطبيعية منها.

مجموعة الأعداد الطبيعية تبنى من مسلمات بيانو أو من مسلمات ZF التي تشمل مسلمات بيانو.

نظرية المجموعات ZF تعطي مسلمات كفيلة ببناء N وبالتحديد خاصية التتابع فهذا أهم شيء فيها أي كل عنصر له عنصر يتبعه وله عنصر سابق ماعدا عنصر البداية فليس له سابق.

بقي معرفة بماذا نبدأ ؟ بالواحد أو الصفر ؟

من الناحية الرياضية حتى لو بدأنا بـ 10 فسنصنع نفس مجموعة الأعداد الطبيعية إذ لا معنى ل 0 أو 1 أو مليار من حيث أنها عناصر في مجموعة.

لكن متى يظهر لهذه الأعداد معنى ؟ هو يظهر عندما نزود N بعمليات جبرية فهنا يصبح هناك فرق بين 0 و 1 و غيره من الأعداد.

لكن عادة عندما نزود N بالعمليات فنحن نمر ل Z لأنها زمرة وهي أسهل من حيث الدراسة.

فإذا كان الأمر كذلك هل لوجود الصفر معنى في N إذا جردت من البنية الجبرية ؟

من هنا يأتي الخلاف بين المدارس فالمدرسة الفرنسية تعتبره عددا طبيعيا أما الأنجلوساكسونية فتعتبر الأعداد الطبيعية تبدأ من 1 .



مجموعة الأعداد الطبيعية : هل الصفر عدد طبيعي ؟

في الرياضيات كل الكائنات تبنى على مسلمات ومجموعة الأعداد الطبيعية بعناصرها منها.

مجموعة الأعداد الطبيعية تبنى من مسلمات بيانو أو من مسلمات ZF التي تشمل مسلمات بيانو.

(Théorie des ensembles de Zermelo–Fraenkel)

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9orie_des_ensembles...

هذه النظرية تعطي مسلمات كفيلة ببناء N بشكل سلس وبالتحديد خاصية التتابع فهذا أهم شيء فيها أي كل عنصر له عنصر يتبعه.

من أشهر الطرق لصناعة مجموعة الأعداد الطبيعية طريقة ديدكاند (Richard Dedekind) الذي يعود إليه تسميتها بـ N .

طريقة ديدكاند الأصلية تصنع N بدون الصفر.

سنستعرض هنا طريقة نيومان von Neumann وهي قائمة على نظرية المجموعات ZF و تستعمل خوارزمية التتابع المنطقية لبناء هذه المجموعة إنطلاقا من المجموعة الخالية:

فحسب مسلمة المجموعة الخالية توجد مجموعة ليس بها عناصر يرمز لها عادة بـ $\varnothing$ على أن هذا الترميز جاء متأخرا، وضع من طرف أندري وايل في حملة نشر الرياضيات التي قامت بها مجموعة بورباكي الفراكنفونية.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Axiome_de_l%27ensemble_vide

فنرمز لها بالصفر وستشكل الممثل عن الصفر $A_0 = \varnothing = 0$

فانطلاقا منها نشكل مجموعة وحيدة العنصر $A_1 = \{\varnothing\} = 1$

والتي نرمز لها بواحد ثم من المجموعة الجديدة نشكل مجموعاتنا بطريقة تراجعية عن طريق مسلمة الاتحاد

$$A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\} = n+1$$

فكأننا نختار عن كل عدد طبيعي مجموعة بعدد عناصرها تمثل هذا العدد وذلك عن طريق صناعتها بمسلمات نظرية المجموعات ZF .

يجب التنبيه إلى أن هذا ليس من باب أصناف التكافؤ بسبب متناقضة راسل والتي تنص على أن مجموعة جميع المجموعات غير موجودة. بهذه الطريقة في الصناعة سنجد

$0 = \varnothing$

$1 = \{\varnothing\}$

$2 = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$3 = \{\varnothing,\{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

....

فهنا العنصر الموالي يظهر من المنطق الخوارزمي.



لكن لصناعة N كاملة نحتاج توحيد هذه المجموعات وهنا سنلجأ لمسلمة اللانهاية لكي نستمر و في عملية تشكيل المجموعات A_n بشكل غير منته.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Axiome_de_l%27infini

يمكن النظر في هذا الرابط لمزيد من التفصيل حول طريقة صناعة N .

https://fr.wikipedia.org/…/Construction_des_entiers…

لو تأملنا جيدا صناعة مجموعة الأعداد الطبيعية فسنجد أنه من الناحية الرياضياتية حتى لو بدأنا بـ 10 فسنصنع نفس المجموعة فالعدد 0 أو 1 أو مليار من حيث أنها عناصر في مجموعة لا فرق بينها ولذلك نجد أن هناك تقابلا بين N و أي جزء غير منته منها.

لكن متى يظهر لهذه الأعداد معنى ؟

يظهر ذلك عندما نزود N بعمليات جبرية فهنا يصبح هناك فرق بين 0 و 1 و غيره من الأعداد.

لكن عادة عندما نزود N بالعمليات فنحن نمر ل Z لأنها زمرة وهي أسهل من حيث الدراسة.

فإذا كان الأمر كذلك فهل لوجود الصفر معنى في N إذا جردت من البنية الجبرية ؟ خاصة وأن فائدتها ستكون للعد والعد نفسه لا يحتاج لعمليات جبرية.

لعل البعض سيذكر القسمة الإقليدية والمضاعفات والقواسم المشتركة وما شابه ذلك لكن كل ذلك يدرس في الحلقة Z .

فمن هنا يأتي الخلاف بين المدارس فالمدرسة الفرنسية تعتبر الصفر عددا طبيعا أما الأنجلوساكسونية فتعتبر الأعداد الطبيعية تبدأ من 1 .

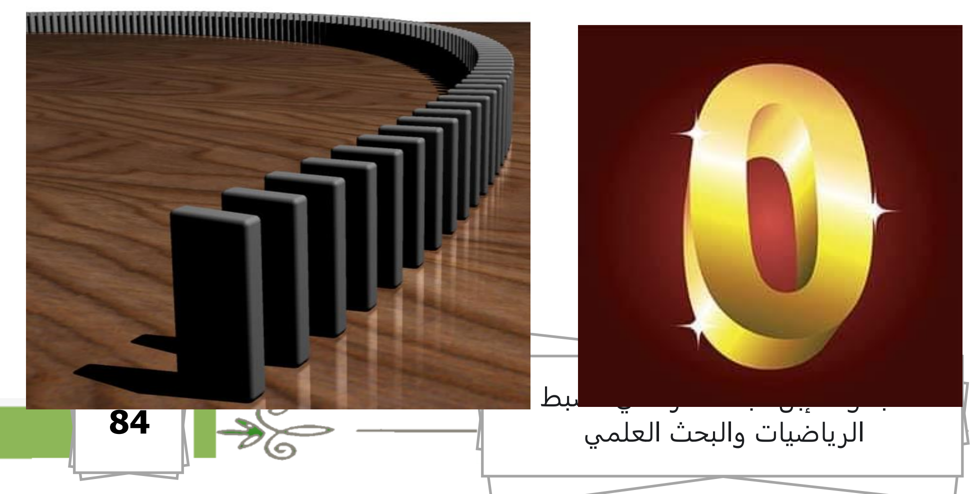
وكما ذكرنا الخلاف تاريخي أما من حيث البناء الرياضياتي فلا توجد مشكلة إنما الأمر لا يتعدى مسألة الاصطلاح وصياغة المبرهنات حسب هذا الاصطلاح.

فمتى دخلنا ميدان الاصطلاح والترميز فالمسألة مفتوحة ولا تتعدى عن طريقتنا في التعبير عن الرياضيات.

أما من الناحية الفلسفية هل الصفر ممثل في الواقع بعدم وجود الشيء أو غير ممثل ؟

فهذا يرد بسهولة عليه بسؤال آخر من منكم رأى بأم عينيه ممثلا عن مليار مليار في الواقع ؟

فمتى اتفقنا على أن العدد مفهوم تجريدي ورياضياتي فصناعته تكون ضمن المسلمات الرياضياتية أما الاصطلاحات فوظيفتها توحيد التخاطب ونقل المعرفة وفي حالة الرياضيات تسهيل البرهنة عن طريق الكتابات الخوارزمية.





البرهان بالتراجع ؟ ما تركيبته الجينية ؟

البرهان بالتراجع مبني على فكرة نقل الخصائص مع الإستغراق،

فلو نظرنا إلى شرط البرهان بالتراجع على مجموعة الأعداد الطبيعية نجدها:

أن يحقق العنصر الأول الخاصية

إذا حقق عنصر خاصية فالذي يليه يحققها كذلك.

في الحقيقة هذان الشرطان يخفيان مفهوما أبسط من ذلك وهو أن مجموعة الأعداد الطبيعية مرتبة بالتتابع بحيث تبدأ من الصفر وأينما كان عدد فما قبله عدد منته من العناصر أي إذا انطلقنا من الصفر فسنصل إلى أي عدد نريد بعد عدد منته من التنقلات وإن كانت مجموعة الأعداد الطبيعية غير منتهية.

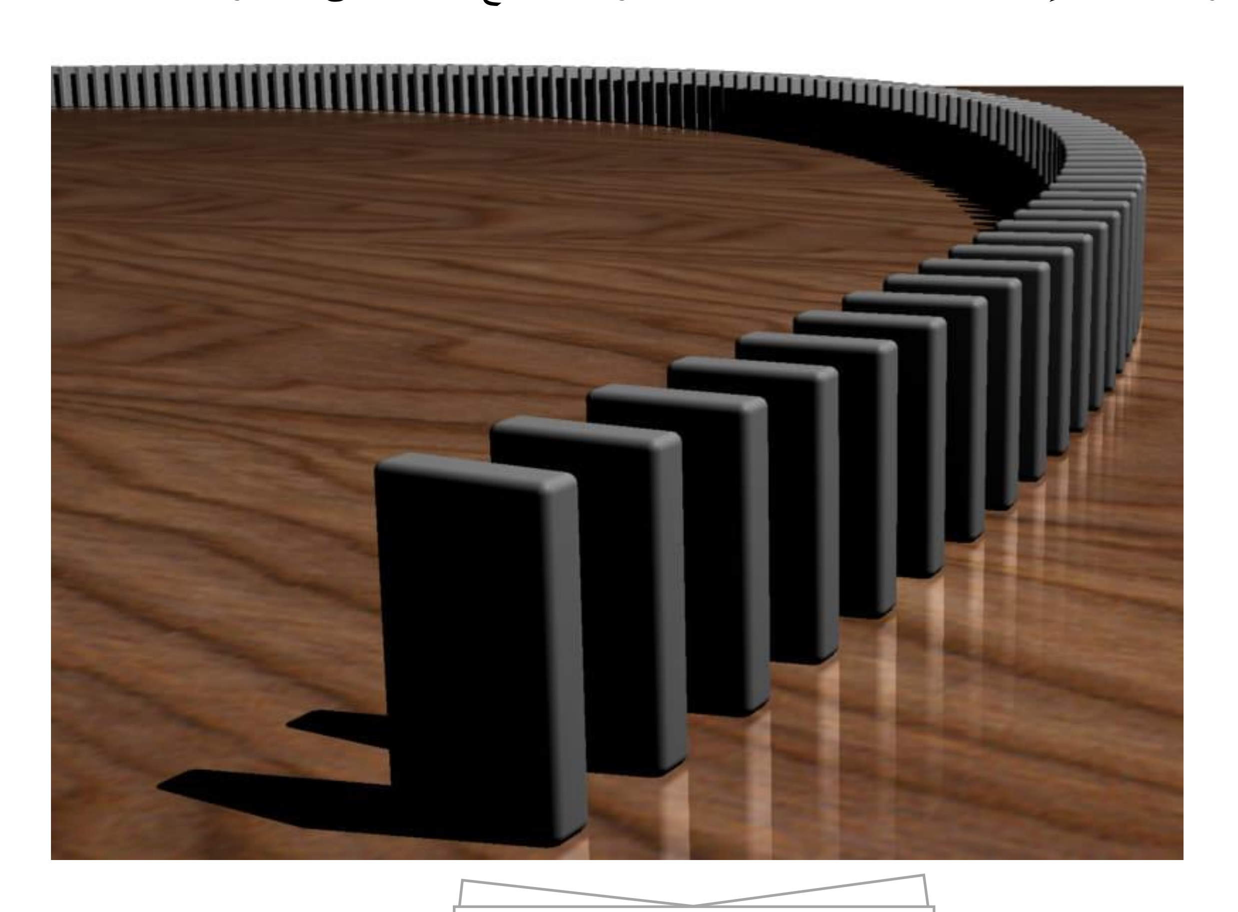
فخاصية الوصول هذه نسميها الإستغراق وهي تحتاج لشرطين:

ترتيب جيد أي كل مجموعة جزئية لها عنصر اصغري.

أي عنصر ما قبله يوجد عدد منته من العناصر.

ثم يأتي البرهان بالتراجع فيقول إذا كانت خاصيتي التي اريد برهنتها محققة عند العنصر الأول وتحقق شرط التعدي أي إذا كانت محققة لعنصر فهي محققة للذي يليه فالخاصية ستتعدى من العنصر الأول للذي يليه ثم للذي يليه ولا يوجد عنصر وإلا وسنصل إليه بعد عدد منته من التنقلات فإستغراق التعدي مضمون.

فيمكن أن نقول البرهان بالتراجع مبني على خاصية جينية موجودة في الأعداد الطبيعية بل هي من تصنعها فإذا أردنا تعميمه فإما نقيده بهذه الخصائص الجينية أو نعدلها مع الحفاظ على مضمونها.



الدالة زيتا لريمان ، لماذا ؟

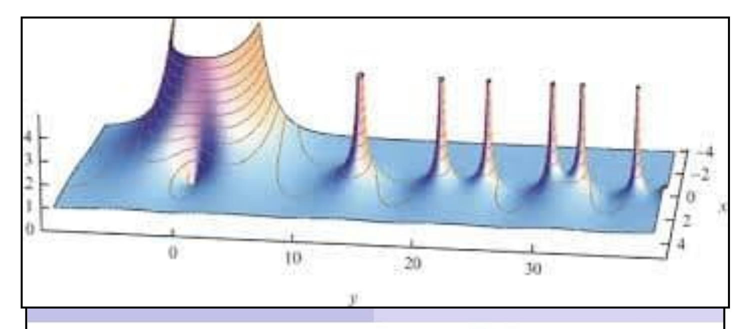
على نقيض ما يعتقده البعض، توجد صيغ عديدة للأعداد الأولية، لكنها غير صالحة للدراسة لأن الرياضيات المتوفرة عندنا اليوم لا تدرس إلا الصيغ التي تراكيبها بسيطة وذلك عبر تقريبها سواء عبر التحليل أو تفكيكها عبر الجبر والتقريب هو أفضل ما نحسن فعله اليوم.

لكن الأعداد الأولية خاصيتها عدم التفكيك جبريا ومتقطعة فبعيدة على الاستمرار وهو عمدة التحليل.

منذ أن وضع ريمان الدالة زيتا فقد أعطى طريقا جديدة ربطت بين الأعداد الأولية والتحليل العقدي ففتح طريقا لما يسمى بنظرية الأعداد التحليلية.

الصعوبة اليوم في دراسة الأعداد الاولية ليست إيجاد صيغة لها فقط إنما هي إيجاد صيغة قابلة للدراسة بآليات الرياضيات المكتشفة اليوم أو صناعة آليات جديدة لدراسة ما وصلنا إليه من صيغ.

الرياضيات تقفز نوعيا كلما جاء مفهوم جديد لتصنع به آلة جديدة : البنى الجبرية، الاشتقاق، المكاملة....



En 1971, grâce à la théorie de Turing (et de Robinson, Matiyassevitch) , Jones, Sato, Wada et Wiens donnèrent une formule permettant de déterminer tous les nombres premiers (!!!)

$$\begin{aligned}(k+2)[1&-(wz+h+j-q)^2-(2n+p+q+z-e)^2\\ &-(a^2y^2-y^2+1-x^2)^2-(e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2)^2\\ &-(16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2)^2\\ &-(((a+u^2(u^2-a))^2-1)(n+4dy)^2+1-(x+cu)^2)^2-(ai+k+1-l-i)\\ &-((gk+2g+k+1)(h+j)+h-z)^2-(16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2)^2\\ &-(p-m+l(a-n-1)+b(2an+2a-n^2-2n-2))^2\\ &-(z-pm+pla-p^2l+t(2ap-p^2-1))^2\\ &-(q-x+y(a-p-1)+s(2ap+2a-p^2-2p-2))^2\\ &-(a^2l^2-l^2+1-m^2)^2-(n+l+v-y)^2]\end{aligned}$$

N. Jacon (Université de Franche-Comté) Histoire des nombres premiers 32 / 37

Utilisation du théorème de Wilson



Le théorème de Wilson permet facilement de montrer que la fonction $f(n) = 2 + (2(n!) \bmod (n + 1))$ produit tous les nombres premiers, et seulement eux, quand n parcourt tous les entiers positifs : $f(n) = n + 1$ si $n + 1$ est premier, et $f(n) = 2$ sinon[8].

يا أستاذ حدثني عن الأعداد الناطقة ؟ ما هي ولماذا تكتب بعدد فوق عدد ؟

الأستاذ : يا ولدي سأحدثك عن مفهومها و تعريفها، لكن قبل ذلك هل تعرف أصل الأعداد ؟

التلميذ : لا

الأستاذ : العدد يا ولدي في الأصل خاصية لاحظها الإنسان في الأشياء مرتبطة ارتباطا وثيقا بالمجموعات، فما هي المجموعة يا ولدي ؟

التلميذ : المجموعة ؟ هي مجموعة من العناصر !!!

الأستاذ : يا ولدي المجموعة هي تميزنا لعناصر عن غيرها بعد أن لم تكن مميزة فعندما تكون مجموعة من الأقلام فما فعلته هو مجرد تمييزها عن غيرها لكنها تبقى أقلاما وما تتغير البتة فكأنك أعطيتها خاصية التمييز بجمعها بعضا لبعضا و من هنا سميناها مجموعة.

لقد لاحظ الإنسان منذ القدم أنه يمكنه مقابلة هذه المجموعات ببعضها فكم تضع والدتك من ملعقة عند الغذاء ؟

التلميذ : تضع ملعقة لكل فرد من الأسرة

الأستاذ : نعم فقد لاحظ الإنسان أنه يمكنه مقابلة الأشياء التي ميزها في مجموعات ببعضها فأستعمل هذه الخاصية لعدها و ذلك بمقابلتها بأصابع يده بداية ثم تطور ليقابلها بحصيات ثم بالكتابة فكان يضع مثلا خطا مقابل كل عنصر في مجموعته.

ثم اخترع الأعداد و الأرقام فكل عدد طبيعي ما هو إلا خاصية تقابلها مجموعة عناصر معينة فيمكنك أن تقابل بها أي مجموعة في واقعنا لتعرف عدد العناصر فيها، و بهذه الطريقة كان الإنسان يعد ما يملكه أو ما يستدينه.

بحكم أن أول مقابلة للعناصر قام بها معظم البشر مع أصابع أيديهم اخترعوا النظام العشري إذ هناك عشر أصابع ، لكن سرعان ما أصبح الأمر معقدا إذا زاد عدد العناصر فأبدعت كل حضارة بطريقتها لتقييد الأعداد الكبيرة.

لكن الإنسان لاحظ أنه يمكنه مقارنة الأعداد بعضها ببعض بل جمعها بضم المجموعات لبعضها فاخترع عملية الجمع و المقارنة فكان هذا أول ابتكار لخصائص مركبة من عدة أعداد.

سرعان ما تنبه الإنسان كذلك إلى أنه يمكنه عد المجموعات ذاتها فكل بيت أسرة مثلا مكون من عدد من الأفراد والقرية من بيوت فالمجموعة نفسها تعد كوحدة من حيث خاصيتها كمجموعة.

فكل هذه الخصائص نشأت من الطبيعة من ملاحظة الإنسان و تجريده لهذه الخصائص فأعطاها وجودا في ذهنه لتسهل عليه تسيير أمور حياته اليومية بل حتى الأيام قام بعدها ثم جمعها في أشهر و الأشهر في سنة ليساعده ذلك على معرفة الفصول.



لكن الذي يهمنا في موضوعنا أن الإنسان لما لاحظ أهمية جمع العناصر في مجموعات و عد هذه المجموعات بدل العناصر لأنه أسهل وأقل تكلفة فاكتشف بذلك عملية الضرب ثم راح يقارن العنصر في مجموعته.

التلميذ : كيف يمكن أن نقارن العنصر بمجموعته ؟

الأستاذ : إذا تعودت على وضع إثنتا عشرة بيضة في علبة و الدجاجة تبيض بيضة في اليوم فأنت تعلم أنه يلزمك إثنتا عشر يوما لتملأ العلبة فهنا قد قارنت البيضة بعلبتها، لكن ماذا يحدث لو عندك دجاجتان ؟

التلميذ : يلزمني ستة أيام لملأ العلبة لأنه كل يوم كل دجاجة تبيض بيضة فهما بيضتان.

الأستاذ : ها أنت قد قارنت عدد بعدد لكن ليس من ناحية الكبر و الصغر لكن من ناحية التضاعف إذ العلبة فيها ست أزواج من البيض، و بما أن الإنسان بفطرته يجرد الخصائص فقد أدرك أن هذه الخاصية تتكرر بين الأعداد بغض النظر عن الأشياء.

التلميذ : كيف ذلك ؟

الأستاذ : لو أخذت عنقود عنب فيه أربع وعشرون عنبة و تريد قسمته على ست أفراد فكم تعطي كل فرد ؟

التلميذ : أربع لكل فرد

الأستاذ : ولو قسمت عليهم علبة البيض التي فيها إثنتا عشر بيضة ؟

التلميذ : بيضتان لكل فرد

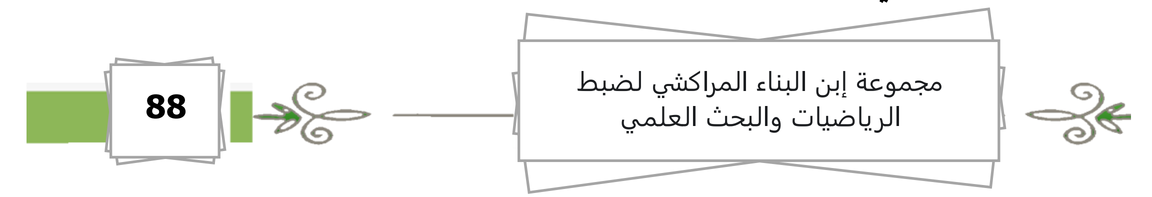
الأستاذ : لكنك تلاحظ أن العلبة مكونة من ست مجموعات في كل منها بيضتين و العنقود من ست مجموعات كذلك لكل وحدة أربع عنبات ، فيمكنك مقابلة ستة بسته و كأنك تقول أن أربع عنبات مقابل أربع و عشرين عنبة يساوي بيضتان مقابل إثنتى عشر بيضة.

فهذه خاصية مركبة تنتج من مقارنة عددين لكنها ازدادت وضوحا عندما أدرك الإنسان أنه يمكنه تجزئة الأشياء و خاصة المسافات فلاحظ الإنسان أن أي مسافة يختارها يمكنه أن يجزئها إلى عدد مسافات متساوية فلو أخذنا عشر أمتار فما هي إلا عشر مرات لطول سميناه المتر فنحن نقارن طولا بطول لكن لو عكسنا المقارنة فسنجد أن المتر لو ضاعفناه عشر مرات وجدناه عشر أمتار.

وكذلك المتر نفسه يمكنك أن تقسمه إلى جزئين متساويين فعدد الجزئين هو إثنين لكن كل جزء هو نصف المتر.

والأهم من ذلك أننا يمكننا جمع هذه الأجزاء ثم إعادة مقارنتها بالمتر، فلو أخذنا ربع متر و ربع متر حصلنا على نصف متر، بل لو أخذنا خمس أرباع متر حصلنا على متر وربع فبهذا يمكننا تكرار الجزء ليتجاوز الكل، فالأمر يبدو سهلا في المسافات و من المسافات إنتقل إلى الهندسة بحكم تعاملنا مع طول قطع مستقيمة.

من هذه الملاحظات كان من البديهي عند الإنسان أن هناك خصائص مركبة من عددين.



التلميذ : إذن الإنسان إكتشف العدد الناطق بالضرب و القسمة ؟

الأستاذ : الأمر ليس بهذه السهولة فكون الإنسان لاحظ هذه الخاصية فلا يعني ذلك أنه اعتبرها كعدد قائم بذاته إذ هي في ذهن القدامى مقارنة بين عددين لا عدد واحد فلا معنى للجمع بين مقارنة بين عددين و عدد فكأنك تجمع بين الطول و المساحة و هذا غير معقول في ذهن القدامى.

لكن الأمر له معنى في المسافات متى جمعنا أجزاء من نفس المسافة لذلك كانت للأعداد الناطقة وجود هندسي عند القدامى كطول لكن لم يكن لها وجود كعدد و إن كانوا يعرفون بعض الكسور كالنصف و الثلث.

التلميذ : لكن كيف كانوا يجمعون بين الكسور ؟

الأستاذ : لكي تجمع مثل هذه الخصائص تحتاج أن تكون متجانسة لأنه في ذهن الإنسان القديم لم تكن الرياضيات مضبوطة كاليوم فلم يكن بوسعه فصل الخصائص عن الأشياء ، فكان لابد من المرور بالأشياء بتوحيد طبيعتها لجمعها و هذا لم يكن بالبديهي البتة ، فلو كان عندك علبة فيها اثنتا عشر بيضة، فأعطيتك اثنين منها ثم أربعة فسأعطيك في النهاية نصف ما في العلبة، قد يبدو الأمر سهلا في البداية لكنه سهل هنا لأني استعملت نفس العلبة.

لكن لو أعطيتك بيضتين من علبة فيها اثنتا عشر بيضة و أربع من علبة ثانية فعندك ست بيضات من أصل أربع و عشرين بيضة فالأمر مختلف هنا تماما و لا يبدو أن هناك علاقة بين المقارنة مع علبة و المقارنة مع علبتين إلا أن تقول البيضتان في المرة الأولى إنما هما بيضتان من أربع و عشرين بيضة و هنا يجب جمع العلبتين فالأمر صعب التصور.

التلميذ : هو فعلا صعب لكننا اليوم نحسب الكسور و نجمعها و نضربها ؟

الأستاذ :

عرفت الحضارات القديمة بعض الحسابات على الأجزاء سواء هندسية كما هو عند الإغريق أو ما يعرف بعين حورس عند الفراعنة، لكن لعل النظام البابلي لحساب الساعات و هو مقسم لستين جزء كان أحسنها من الناحية الجبرية وهناك نظام شبيه عند الرومان، لكن تبقى كسور محددة مقابل الحساب الهندسي الإغريقي والذي لا يعطيها مفهوم العدد.

كل هذه الحسابات التي تراها اليوم إنما جاءت عن طريق الإسلام بإدخال علم المواريث ، إذ الميراث محدد بالأسهم مقابل تركة واحدة فالمفهوم الجديد الذي أدخله الإسلام هو توحيد المقارنة، فلاحظ أنك تقارن عددا بعدد لكن لو وحدت ما تقارن به و جعلته كأصل أمكنك مقارنة الخاصية بين أي عددين أردت ما دمت تعتبر أن العدد الثاني هو الواحد بالنسبة إليك.

التلميذ كيف ذلك ؟

الأستاذ : في الحقيقة العدد الناطق ما هو إلا مقارنة بين عددين وهذه المقارنة أعطوها قيمة هي : عدد مرات تكرار عدد للحصول على آخر أو العكس فهي خاصية في اتجاهين، فإذا كررت اثنين ست مرات أعطتك إثنا



عشر و إذا كررت أربعة ست مرات أعطتك أربع و عشرون ، فالإثنين مقابل الإثنا عشر هي الأربعة مقابل الأربع و العشرين.

و إذا عكست فالإثنا عشر مقابل الإثنين هي الأربع و العشرين مقابل الأربعة ، ألا يذكرك ذلك بشيء ؟

التلميذ : أليس هذا الإختزال و المقلوب ؟

الأستاذ : نعم ، فنلاحظ أن خاصية التكرار موجودة في عدد غير منته من الثنائيات لكن يمكن أن نختار أصغرها و هذا ما نسميه بالإختزال أما عكس المقارنة بين العددين فهو المقلوب.

التلميذ : وما علاقة ذلك بعلم المواريث ؟

الأستاذ : الشيء الجديد الذي جاء به الإسلام هي مقارنة كل الأعداد بالواحد و هي التركة ، و ذلك أنه قسم التركة على أجزاء بين جزء هو نصفها و جزء هو سدها و جزء هو ثمنها....

فنحتاج في النهاية قسمة التركة على عدد يمكننا به قسمته على إثنين و ثلاثة و ثمانية ... لكي نعطي كل وارث حقه فكان لابد من المرور بالمضاعفات مع ابقاء المقارنة بالتركة و التي هي واحد.

فاذا أردنا اعطاء فرد النصف و الآخر الثلث فنحتاج قسمة التركة على ستة أجزاء ، فنعطي الأول ثلاثة أجزاء و الثاني جزئين فيكون النصف هو ثلاث أجزاء من ستة والثلث هو جزئين من ستة و مجموع النصف مع الثلث هو خمس أجزاء من ستة.

التلميذ : هذا توحيد المقامات ؟

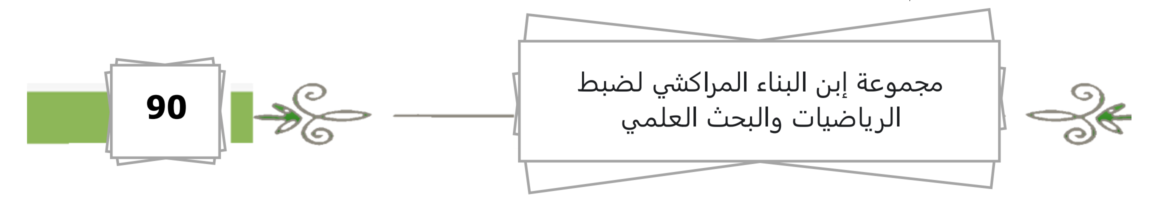
الأستاذ : نعم إذن توحيد المقامات هذا هو الذي جعلنا قادرين على جمع هذه المقارنات فمتى كنا نقارن بالنسبة لنفس العدد أمكننا الجمع لأننا نجمع أجزاء من العدد الذي نقارن به.

فعندما نقول خمسة على ثلاثة فما هو إلا تكرار لثلث الواحد خمس مرات أي تكرار واحد من ثلاثة خمس مرات.

فالعدد الناطق هو مقارنة بين عددين باعتبار المقام جزء من الواحد فإذا جمعت أمثاله مقدار المقام وجدت الواحد، فالعدد الناطق هو مضاعفات لجزء من الواحد لكن تجزئات الواحد كيفية فمتى أردت جمع عددين ناطقين لابد أن تجمع نفس التجزئات لذلك يلزمك مقام متساوي لتتساوى قيمة التجزئات ثم تجمع البسطين لانهما يعبران عن تكرار لنفس التجزئة .

لكن الحضارة الإسلامية لم تتوقف عند هذا بل مزجت هذه الأعداد الجديدة مع ما ورثته من علم الهندسة المعروف عند الإغريق، ففي الهندسة يمكنك مقارنة الأطوال بل أي قطعة مستقيمة اذا قسمتها أعطت قطعا بل يمكنك أن تضيف طولها على القطعة الأصلية فيصبح أكبر ، فإذا كانت عندك قطعة مستقيمة يمكن بسهولة إضافة لها نصفها لتصبح متر ونصف أو ثلاث أنصاف أمتار .

عندما ربط المسلمون بين المقارنات بين الأعداد و حساب الأطوال في الهندسة أنتجوا مجموعة جديدة سموها بالأعداد المنطقة أو ما نعرفه اليوم بالأعداد الناطقة.



أول من إعتبر الأعداد الناطقة أعدادا كغيرها هو الكرجي المتوفى سنة 429 هجري الموافق ل 1020 ميلادي أضاف المعاملات الناطقة لمعادلات كثيرات فأصبحت الأعداد الناطقة أعدادا كغيرها بجانب الأعداد الطبيعية.

التلميذ : هل العدد الناطق قسمة ؟

الأستاذ : ليس بقسمة يا ولدي فالقسمة عملية ضرب في المقلوب ، لكنه خاصية لثنائية من الأعداد، بجعل أحدهما مكونا من الآخر ، فإن كانت الستة مكونة من ثلاث أزواج ، فالإثنين إذا كررته ثلاث مرات أعطاك الستة ، فهي خاصية مشتركة بين عددين، لكنها ليست قسمة لأن القسمة يا ولدي تحتاج ثلاثة أعداد لا عددين قاسم وهو مقلوب و مقسوم و ناتج و الناتج نفسه هو العدد الناطق الذي تبحث عنه.

كل ما في الأمر أن الأعداد الناطقة حقل فالذي لا ينتبه لذلك يظن أن الأعداد الناطقة ناتجة عن قسمة عدد صحيح على آخر لكن هذا خطأ لأن الخط الفاصل بين العددين في الكسر في الحقيقة هو مجرد ترميز ابتكره المسلمون لكنه تطور فأصبح يستعمل للقسمة كذلك في عصرنا الحالي و من هنا جاء هذا التشابه.

العدد الناطق كمفهوم هو قيمة لا عملية و كتشبيه فكون الستة هي إثنان مضروبة في ثلاثة فلا يعني أن الستة ضرب.

فاذا عرفت أنها خاصية بين عددين بالتكرار في أحد الإتجاهين كان من السهل رؤية الأعداد الطبيعية كعدد ناطق إذ العدد طبيعي ما هو إلا تكرار للواحد.

أما الجمع بين الأعداد الناطقة فما هو إلا جمع خاصية كل جزء منهما مقابل الكل بخاصية واحدة لجزء جديد مقابل نفس الكل فسدس شيء إذا جمعته بثلث نفس الشيء أعطاك نصف هذا الشيء.

فالجمع بين الكسور هو جمع أجزاء من نفس النوع أو أعداد مقارنة بنفس العدد فتجمع إثنين مقارنا بستة مع واحد مقارنا بستة ليعطيك ثلاثة مقارنا بستة لذلك نوحد المقامات لكي نقارن بنفس العدد.

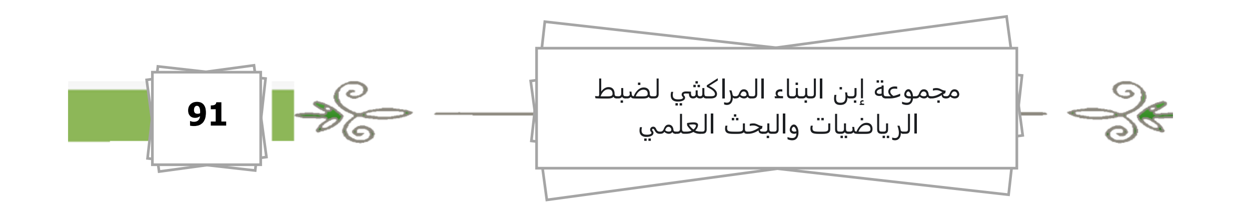
أما الضرب فما هو إلا مقارنة جزء من الكل و الذي بنفسه هو جزء من كل آخر فضرب نصف شيء في ثلث شيء ما هو إلا نصف ثلث الشيء الأخير فيعطينا السدس.

أما بناؤها فيستفاد من مفهومها فمتى كان العدد الناطق خاصية بين عددين بالتكرار فيمكن مساواة التكرار بين ثنائيتين.

التلميذ : كيف ذلك ؟

الأستاذ : إذا أخذت إثنين و ستة فيلزمك تكرار الإثنين ثلاث مرات للحصول على ستة ، و إذا أخذت أربعة وإثنا عشر فليزمك كذلك تكرار الأربعة ثلاث مرات للحصول على إثنا عشر.

فإذا ضربت الإثنين من الثنائية الأولى في إثنا عشر حصلت على أربع و عشرين ، وإذا ضربت الأربعة من الثنائية الثانية في ستة حصلت على أربع و عشرين كذلك.



فيمكننا مساواة الثنائيتين بضرب كل طرف ثنائية في الطرف الآخر من الثنائية الثانية و هذا ما نسميه في الرياضيات بعلاقة تكافؤ.

إذن رياضيا العدد الناطق هو مجموعة الثنائيات الصحيحة التي إذا ضربت كل طرف منها في الطرف الآخر من ثنائية أخرى حصلت على نفس العدد وهذا ما يعرف بالتناسب.

فالأعداد الناطقة رياضيا ما هي إلا صنف تكافؤ داخل الجداء الديكارتي لمجموعة الأعداد الصحيحة في نفسها.

لم يصل العلماء لهذا التعريف إلا في نهاية القرن التاسع عشر بقدوم بيانو و إعادة بناء الرياضيات بشكل مضبوط.

التلميذ : إذن العدد الناطقة مجموعة ثنائيات ؟

الأستاذ : نعم يا ولدي فكل الأعداد مجموعات ، فالعدد الطبيعي ما هو إلا مجموعة كذلك وفي النهاية الرياضيات مبنية على نظرية المجموعات.

لنضبط الحدس الرياضي معا : السلسلة المتناسقة.

لماذا سلسلة مجموع مقلوب n المسماة السلسلة المتناسقة

متباعدة رغم أن مقلوب n يؤول للصفر ؟

$$\lim H_n = \lim 1+1/2+...+1/n = +\infty$$

لأول وهلة يظهر لدينا حدس ببطئ هذه المتتالية مقارنة مع مجموع السلسلة وقد نحاول التعبير عن هذا الحدس بمقارنة هذه السلسلة باللوغارتم مرورا بتكامل $1/x$

هذه الطريقة تستدعي آلات تحليلية متعلقة بعمليات جبرية تجعلنا نطرح السؤال : هل فعلا المسألة مسألة بطء أو أن هذا الحدس يخفي شيئا اعمق ؟

لو رجعنا للسلسلة المتناسقة فسنجد من طرق برهنة عدم تقاربه استعمال الخاصية الكوشية وذلك بحساب

$$H2n - Hn = 1/(n+1) + ... + 1/2n \geq 1/2n + ... + 1/2n = 1/2$$

وهذا دليل على التباعد لأن الخاصية الكوشية تقول القارب مكافئ ل $\lim U_n - U_m = 0$

لو تأملنا في الخاصية الكوشية فسيظهر لنا أن الرتبة n غير مهمة في النهايات إنما المهم أن تكون كل حدود المتتالية في نفس الجوار ما عدا عدد منته منها مهما اخترنا طولا للجوار.

لابد ان نتذكر ان النهاية لا تتعلق بالمتغير n إنما تتعلق بحدود المتتالية كقيم ولذلك لو غيرنا ترتيب حدود متتالية فإن طبيعة تقاربها لا تتغير.

لكن من أين يأتى حدس بطئ التقارب الذي لاحظناه في السلسلة المتناسقة ؟

هذا الحدس يأتي من محاولتنا الربط بين المتتالية والرتبة n بعلاقة جبرية أو تحليلية وإن كان هذا الحدس له حظ من النظر كون المتتالية مقلوب n لها عبارة جبرية لكنه ليس السبب الأصلي للمشكلة.

إنما السبب أنه في المجموع عملية الجمع لا تهمها الرتب إنما الذي يهمها القيمة التي نضيفها كيفما كان عدد قيم المتتالية المضافة.

وهذا ما تعطيها لنا خاصية كوشي في المجموع $\lim (U_{n+1} + U_{n+2} .... + U_m) = 0$

هذه الخاصية تعطينا كنتيجة لازمة لتقارب السلسلة $\lim U_n = 0$

كنها تعطينا كذلك شيئا زائدا وهو أنه كيفما كان طول الجوار المختار للصفر لابد أن يكون ما نضيفه للجمع كيفما كانت عدد حدود المتتالية المضافة انطلاقا من رتبة داخل هذا الجوار.

ومن أجل هذا لو أخذنا مجموع المتتالية $(-1)^n/n$ نجدها متقاربة.

لكن لماذا ندرس معايير تقارب مثل معيار كوشي ودالمبير وبيرتراند والتي تتعلق بـ n ؟

الجواب هذه المعايير تمثل حالات خاصة جدا من السلاسل تحاول مقارنة السلاسل بسلاسل جبرية فهي تقريب جبري طبولوجي وهو تقريب جيد لكنه ليس عام.



ففي الحالة العامة لا توجد علاقة بين المجموع والرتبة n ولفهم ذلك يمكننا صناعة مجموع متتالية لا علاقة له جبريا أو تحليليا بالرتبة وسنجد انه متباعد.

لنختر عددا كيفيا n_1 و نضع متتالية تساوي $U_n = 1$ من أجل كل قيم n من 0 إلى n_1

ثم نختر عدد كيفي $n_2 > n_1$ ولنضع $U_n = 1/2$ من أجل كل n اكبر من n_1 وأقل أو يساوي n_2

ونواصل هكذا فيكون من أجل n أكبر من n_k وأقل أو يساوي

n_{k+1}

$U_n = 1/k$

فسنصنع متتالية لا علاقة لقيمتها بـ n جبريا ولا تحليليا ونهايتها 0 لكن رغم ذلك مجموعها متباعد.

كان بإمكاننا تعويض الطريقة السابقة بـ $U_n = 1/(n_{k+1} - n_k)*k^2$ لنحصل على مجموع متقارب.



الجذور النونية : نظرة جبرية

ظهر التربيع في الأعداد منذ القدم مع ظهور المربع في الهندسة، وقد وضعت علاقة فيثاغورث قاعدة للقوى في العمليات الجبرية.

هذه المربعات الهندسية المتمثلة في المساحة طرحت على البشر تساؤلا جديدا وهو إذا علمت المساحة فهل يمكن معرفة طول الضلع ؟

هذا ما نسميه اليوم بالجذر التربيعي.

دعونا نحلل هذه العمليات الجبرية ونربطها بالواقع.

فالعدد في الأصل هو تكميم للتكرار فما نسميه 3 ماهو إلا ترميز لتكرار معين هو شيء مع مثله مع مثله.

الترميز العددي مكننا من تكميم التكرار بطريقة يسهل التعامل معها.

أما عملية الجمع فما هو إلا تكميم لتكميم تكرارين بالتكرار الموافق للكل فعندما نكتب $3 + 2 = 5$ فنحن نقول شيء مع مثله مع مثله ومعه شيء مع مثله هو شيء مع مثله مع مثله مع مثله مع مثله.

فكما تلاحظون ترميز $3+2 = 5$ عوض سطرين من الكتابة.

أما الضرب فهو تكرار التكرار فعندما نكتب $3 \times 2 = 6$ فنحن نقول شيء مع مثله مع مثله ، ومل مع سبق مع مثله هو شيء مع مثله مع مثله مع مثله مع مثله مع مثله.

فالكتابة في النظام العشري سهلت العمليات الحسابية التي هي في الأصل مجرد تكميمات للتكرار.

لكن ماذا عن التربيع ؟ فلو اتبعنا مع سبق التربيع هو تكرار تكرار بقدر نفسه فهو حالة خاصة من الضرب.

أما التكعيب فهو تكرار تكرار شيء قدر نفسه ثلاث مرات وهكذا ننتج القوى الطبيعية.

السؤال الذي يطرح نفسه ماذا عن الجذر النوني ؟

فكما ذكرنا سابقا يطرح البشر تساؤلا حول العمليات العكسية فإذا أمكننا انتاج عدد من تكرار تكرار نفسه فالسؤال المطروح هل كل عدد هو نتيجة لتكرار تكرار نفسه ؟

فإذا نظرنا للأعداد الطبيعية فيما بينها وجدنا أن هناك أعداد تحقق هذا ك 4 انطلاقا من 2 و 9 انطلاقا من 3 .

لكن هناك أعداد لا يظهر لنا لأول وهلة أن لديها سابقة من هذا النوع ك 2 و 3 مثلا.

لكن علاقة فيثاغورث تخبرنا بوجود عدد عند تربيعه نجد 2 ؟ بل لكل عدد طبيعي يمكن رسم مثل هذا العدد.

مثل هذه الملاحظة إنما تخبر عن قصور الرياضيات المبنية على الأعداد الطبيعية وأن هناك رياضيات أوسع يمكنها تكميم هذه الأعداد الجديدة.

وهذا الذي حدث ببناء البشر لمجموعة الأعداد الجبرية والتي لا تعطي فقط جذورا للأعداد الموجبة بل تصنع جذورا لأعداد سالبة وبكم يتحاوز مجرد التطبيق ؟



لكن كيف يمكن ذلك ؟

هنا الرياضيات تستعمل طريقة سد الفراغات فمتى كتبنا $a^2 = -1$

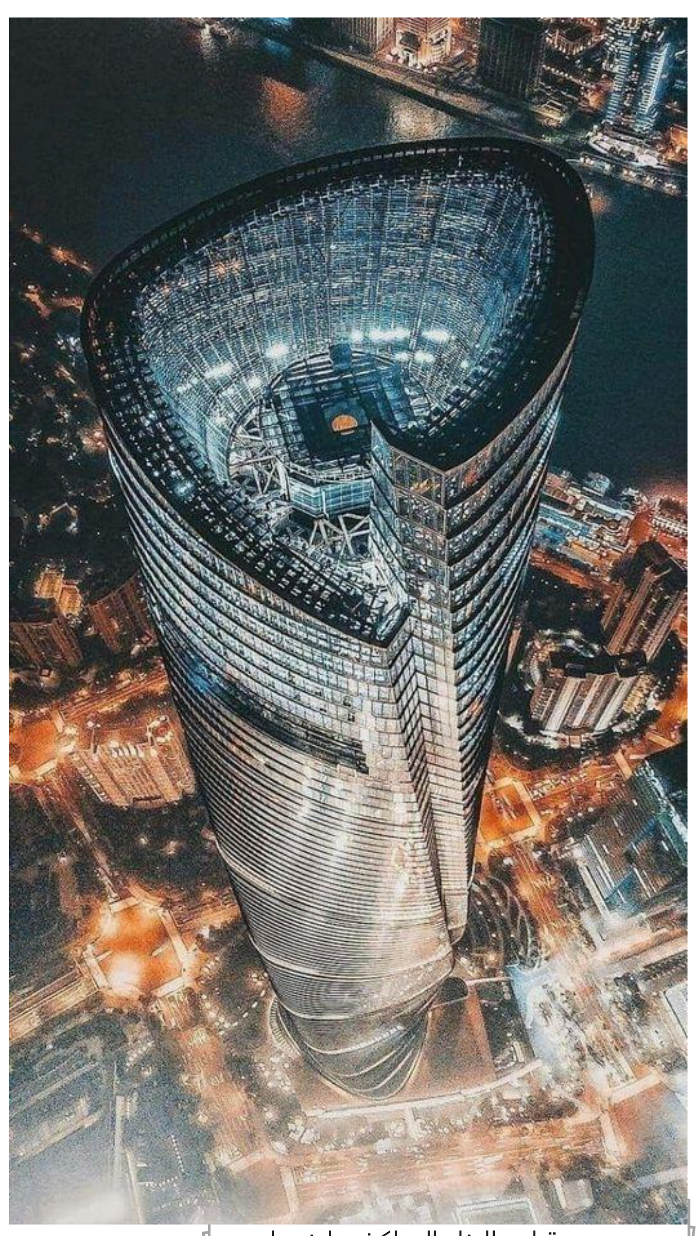
وقلنا لا نجد هذا a في مجموعة الأعداد الناطقة فالرياضيات تقول لنا يمكنكم افتراض وجوده إذ لا أحد يمنعنا من اضافة عنصر جديد i بحيث $i \times i = -1$

لكن قد يقول قائل لماذا لا أفترض عنصر جديد b بحيث $b \times 0 = 1$

الجواب أن لا احد يمنعك من ذلك لكن عملية الضرب هذه التي عرفتها لا تصنع حلقة على عكس العدد التخيلي i .

استغرق بناء الأعداد الجبرية قرونا من الزمن لا لصعوبة ذلك وإنما لأن أدوات البناء الرياضياتي لم تكن نضجت بعد.

أما اليوم مع نظرية المجموعات والفئات زودت الرياضيات بآليات قادرة على صناعات الكائنات الرياضيات بكم هائل لم يعد معها العقل البشري قادرا على تصورها.





يا أستاذ حدثني عن الأعداد الحقيقية ؟

يا ولدي قبل أن أحدثك عن تاريخها وعن معناها أخبرني كيف تقسم مئة حلوة ومئة دينار بالعدل بينك وبين أخويك ؟

التلميذ : أعطي لكل واحد منا 33 حلوة و تبقى حلوة أقسمها على ثلاثة لكل واحد منا ثلث ، أما النقوذ فأعطي كل واحد منا 33 دينار و 33 سنتيما.

الأستاذ : لكنه بقي سنتيم واحد من المئة دينار ؟ كيف تقسمه

التلميذ : لا يمكن قسمته لأنه ليس لدينا قيم نقدية أقل من السنتيم.

الأستاذ : إذن هي ليست مشكلة قسمة إنما مشكلة عملة أو ليس لديك بالعملة ما تعبر به عن ثلث سنتيم، وقد رأيت كيف أمكنك تقسيم الحلوى بالتعبير عن الثلث.

لكن لو قسمت واحد على ثلاثة فعلى كم تحصل ؟

التلميذ : أحصل على 0.333 لكن الأرقام لا تنتهي بعد الفاصلة

الأستاذ : وماذا يحصل لو أخذ أرقاما عشوائية بعد الفاصلة غير منتهية فهل هذا عدد ؟

التلميذ : نعم

الأستاذ : هل يمكنك كتابته كعدد ناطق أي قسمة عدد صحيح على آخر ؟

التلميذ: لا ليس دائما

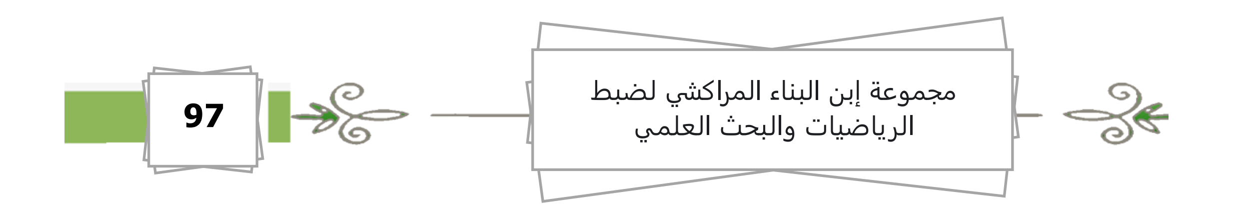
الأستاذ : يا ولدي إن الأعداد الحقيقية قديمة قدم الأعداد الطبيعية، فلما اهتم الإنسان بالهندسة واكتشف الدائرة و مبرهنة فيثاغورث سرعان ما تنبه إلى وجود مقاييس لا يمكن التعبير عنها بالأعداد الطبيعية ولا بالأجزاء.

فمبرهنة فيثاغورث تنص على أن مربع الوتر يساوى مجموع مربعي الضلعين القائمين، لكن ما العمل إذا كان طول كل من الضلعين هو الواحد ؟

أما اليوم فمن السهل على أي تلميذ أن يجيبك أن طول الوتر هو الجذر التربيعي لإثنين لكن هذا الجواب ما كان بالسهل في عصر الإغريق إذ لم يكن لديهم علم بالجذور بل حتى الكسور لم تكن عندهم كأعداد مثل اليوم، لكنهم كانوا يعبرون عليها بأجزاء الأطوال هندسيا.

فقد استطاع الإغريق أن يبرهنوا أنه من غير الممكن أن نجد قطعة مستقيمة كجزء يمكننا بها قياس هذا العدد وهذا ما نسميه اليوم بأن الجذر التربيعي لإثنين ليس بعدد ناطق.

بتطور نظرية الأعداد و بإستعمال الإنسان لبعض الكسور حاول تقريب هذا العدد بالكسور العشرية و هي مقاليب قوى لعشرة وهذا الذي فعلته عندما طلبت منك قسمة مئة دينار على ثلاثة فهذا الذي نسميه الكتابة عشرية فهي محاولة كتابة العدد بمجموع قوى موجبة أو سالبة لعشرة.



كان الهنود أول من اكتشف الصفر وقد مكنهم ذلك من كتابة الكثير من الأعداد الناطقة بإستعمال الكتابة العشرية وتقريب بعضها كما فعلت بقسمة المئة على ثلاثة بل اكتشفوا أكثر من ذلك أن الأعداد الناطقة عند تقريبها بالأرقام بعد الفاصلة فإما تظهر عددا منتهيا من الأرقام و إما عددا دوريا يتكرر بعد الفاصلة ككتابة

$1/2 = 0.5$

أو $1/3$ يقترب 0.3333

أو $12/7$ يقترب من 1.71428571428

والسؤال الذي طرح نفسه ، إذا كان أي عدد ناطق يمكن كتابته على قدر المستطاع بالأعداد العشرية فهل العكس صحيح ؟

لما اهتم العرب بالأعداد أتموا بناء الأعداد الكسرية وأعتبروها أعدادا كغيرها وبرسم القطوع الزائدة و الناقصة سرعان ما اكتشفوا الأعداد الجبرية فقسموا الأعداد إلى ثلاث أنواع:

الطبيعية ، الناطقة، و الصماء فاعتبروها أعدادا كغيرها وقاموا بتقريبها بالحسابات العشرية لكن بقي السؤال مطروحا عن طبيعة هذه الأعداد.

قام نيوتن ولوبيز في القرن السابع عشر بتأسيس علم جديد يسمى الحساب المتناهي الصغر و ذلك بمحاولة حساب ظل مماس المنحنى، كان هدف نيوتن حساب السرعة و التي نعبر عليها اليوم بمشتق المسافة بالنسبة للزمن فسرعان ما ظهر من ذلك مفهوم النهاية.

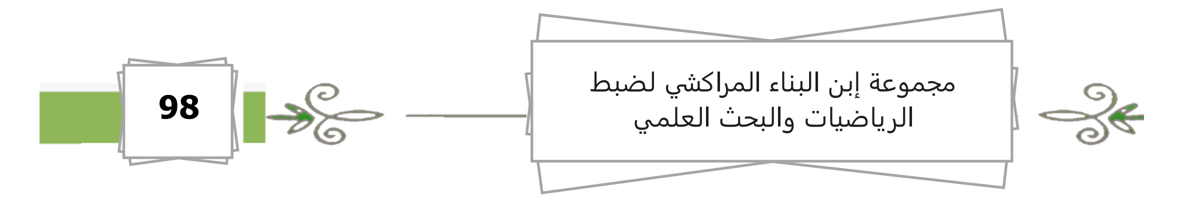
فكان من الطبيعي أن يستعمل علماء الرياضيات النهايات لحساب المساحات و الأحجام و ذلك بتقطيعها لأجزاء صغيرة مما أظهر مفهوم المجاميع غير المنتهية فاخترعوا السلاسل العددية والتي هي مجموع لمتتالية عددية.

حاولوا حساب نهاية هذه المجاميع بالطريقة المعهودة بمحاولة تقريبها بالكتابة العشرية لكن لم يصلوا لكتابة ناطقة لها بل برهنوا أن بعضها ليس بناطق لكن بقي السؤال المطروح هل هي جبرية ؟ أي هي حلول لكثيرات حدود ناطقة ؟

أحدث علم الحسابات المتناهية الصغر ثغرة في البراهين الرياضية ذلك أن نيوتن إستعمل بحدسه مبرهنات كمبرهنة القيم المتوسطة و التزايدات المنتهية و التي لا تصح رياضيا في مجموعه الأعداد الناطقة لكن نيوتن كانت له نظرة مستمرة للأعداد نتيجة نظرته للزمن.

كان لزاما على العلماء صناعة مجموعات جديده تستوعب كل هذه البراهين الناتجة من علم التحليل.

وجب انتظار قدوم أولر ليعتبر هذه القيم الجديدة كأعداد سنة 1770 و حوالي 70 سنة بعدها ليبرهن الرياضي ليوفيل سنة 1844 أن هذه السلاسل لا تتقارب إلى جذور كثيرات حدود ... فسميت هذه الأعداد بالأعداد المتسامية فعلى هذا يمكن تقسيم الأعداد إلى جبرية و هي التي تكون جذرا لكثير حدود ناطق و متسامية و هي التي ليست من هذه.



في الحقيقة سبب تأخر معرفة الرياضيين للأعداد الحقيقية هو قلة الضبط الرياضي السائد في تلك القرون فكان أغلب عملهم يعتمد على الحدس مما ينتج تناقضات عديدة.

أول من نادى بضرورة ضبط الرياضيات هو العالم كوشي أين حاول إعطاء مفهوم رياضي للنهاية بإستعمال متتالية عددية مرتبة بأعداد طبيعة والنظر إلى قيمتها عندما يكون العدد الطبيعي كبيرا بالقدر الكافي فاستطاع بذلك برهنة ما يسمى اليوم بتقارب المتتاليات الكوشية وهي أن أي متتالية متقاربة فالفرق بين أي حد من حديها عند قيم كبيرة لترتيبهما الطبيعي يقترب من الصفر.

فكانت هذه الفكرة كافية لبناء الأعداد الحقيقية ، إذ استعملها العالم ميراي سنة 1869 و من بعده كنتور سنة 1872 لصناعة مجموعة الأعداد الحقيقية.

التلميذ : لكن ما هو العدد الحقيقي ؟ هل يمكننا تصوره.

الأستاذ : في الحقيقة العدد الحقيقي ما هو إلا متتالية متقاربة ، فلو طلبت منك كتابة العدد π ؟ فكيف ستجتبه ؟

التلميذ : أكتب 3.14

الأستاذ : هل هذا هو العدد π بالضبط ؟

التلميذ : لا هذا مجرد تقريب

الأستاذ : هل من تقريب أفضل ؟

التلميذ : نعم

3.14159265359

الأستاذ : هل متى ينتهي التقريب ؟

التلميذ : لا ينتهي هناك عدد لا نهائي من الأرقام بعد الفاصلة

الأستاذ : في الحقيقة ما كتبت إلا مجموع أجزاء لقوى لعشرة فهذه سلسلة غير منتهية ، إذن العدد الذي كتبته يمكن التعبير عليه بمتتالية متقاربة.

الأعداد الحقيقية ما هي إلا متتاليات ناطقة متقاربة أو بمعنى أدق متتاليات ناطقة لكوشي، لأن مفهوم التقارب لا معنى له إن لم تكن لدينا نهاية معرفة في مجموعة.

فإذا جمعنا كل هذه المتتاليات الناطقة الكوشية و قسمناها لمجموعات، في كل مجموعة نضع المتتاليات التي فرقها ينتهي إلى الصفر فكل مجموعة تمثل عددا حقيقيا و هذا ما يسمى في الرياضيات بصنف التكافؤ.

الفكرة ليست جديدة، فكذلك الأعداد الناطقة مكونة بنفس الطريقة ، فما الفرق بين

1/2 ، 4/8، 12/24 ؟

التلميذ : هي نفس العدد الناطق بعد الاختزال



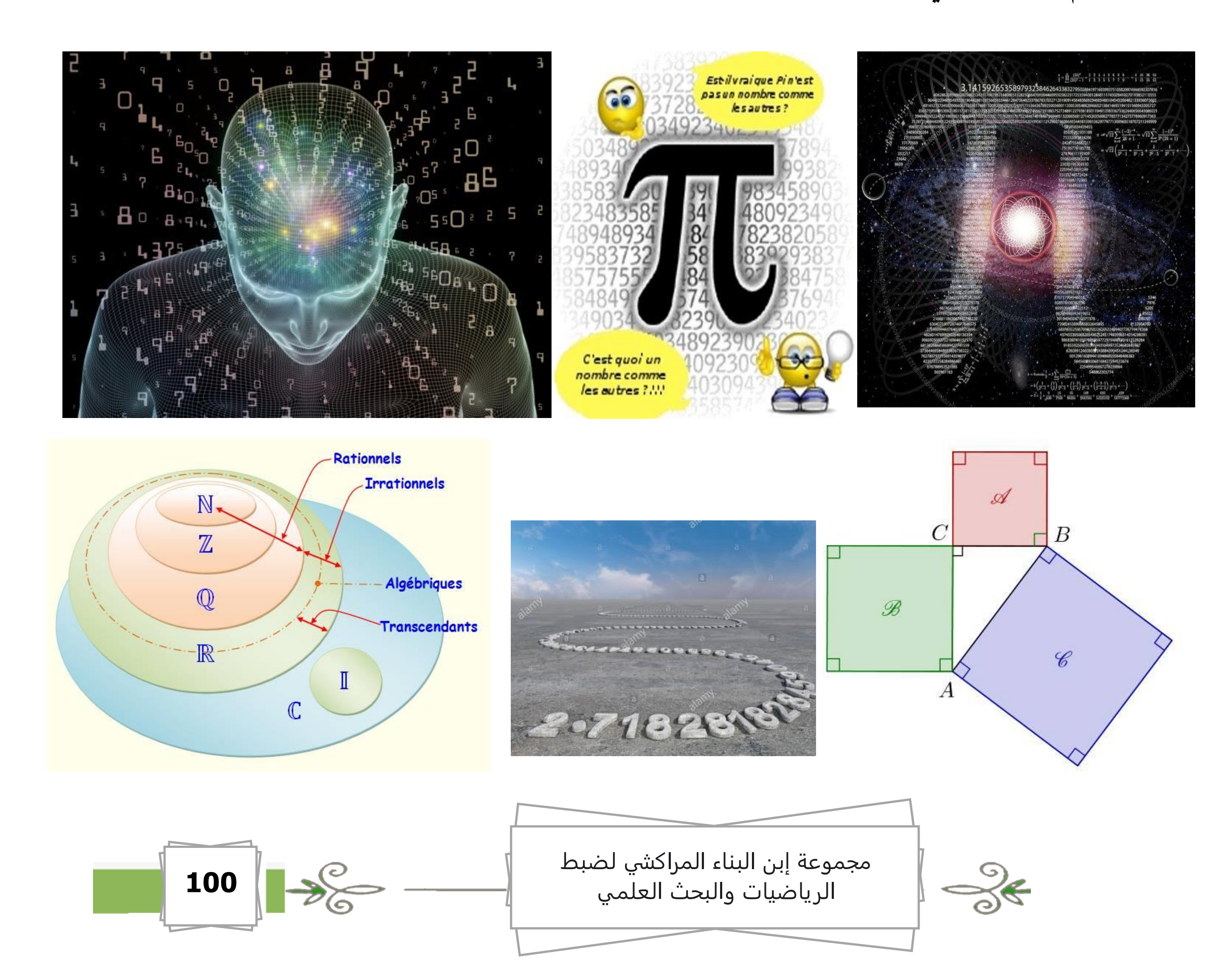
الأستاذ : نعم لكن ما نسميه الأعداد الناطقة ما هي إلا ثنائيات من الأعداد الصحيحة قسمناها مجموعات في كل مجموعة وضعنا نفس ثنائيات الأعداد المتناسبة وهذا كذلك مبني على صنف التكافؤ.

الأعداد الحقيقية يا ولدي ما هي إلا فكرة العقل البشري للإستمرار والتمام إذ لا يمكنه تصور العدم والنقصان وعلى هذا إذا أخذنا سلسلة مجموع متقارب فنحن نلاحظ أنه عند حسابها أن الأرقام بعد الفاصلة تستقر ، نعم تزيد فهي غير منتهية لكن نراها تستقر رويدا رويدا فكأنها تقترب من شيء فما هو هذا الشيء ؟ فإما أن نسلم بالعدم أنه غير موجود أو أن هناك شيء موجود لكن لا يمكننا الوصول إليه لأن حسابه لا نهائي فقام الإنسان بإعطائه إسما وهذه عادة الإنسان عندما لا يستطيع الإمساك بشيء أعطاه إسما و كأنه معروف عنده فهنا المتتالية نفسها أصبحت عددا.

صناعة مجموعة الأعداد الحقيقية أعطت أكثر من ثمارها فقد أظهرت مفهوم الإستمرار إذ كل متتالية محدودة يمكن استخراج منها متتالية متقاربة و كل مجموعة محدودة يمكن إيجاد حدها الأعلى و الأدنى فأنتجت بذلك مبرهنة القيم المتوسطة ومبرهنة رول و الدوال المستمرة بل برهن كنتور على أنها أغنى من الأعداد الطبيعية إذ هي غير قابلة للعد.

وقد قام العلماء بتعميم بنيتها فأدى ذلك إلى اختراع الطوبولوجيا و الفضاءات الشعاعية و فضاء باناخ و غيرها.

فيمكننا اليوم أن نقول الرياضيات وليدة الأعداد الحقيقية و الأعداد الحقيقية وليدة مبرهنة فيثاغورث...



البعد المفقود في العمليات الحسابية ... من البعد الثاني إلى الأعداد المركبة إلى البعد الثاني عشر في نظرية الحبال.

يا أستاذ حدثني عن العدد التخيلي i

لماذا هو تخيلي ؟ ولماذا عقلي لا يستطيع تخيله!!!

يا ولدي سأحدثك عن مفهومه وعن تاريخه لكن قبل ذلك لابد من تحطيم جدران سجون خيالك فأخبرني:

كيف تصنع أربع مثلثات متقايسة الأضلاع من ست أعواد ثقاب دون كسرها 😊

التلميذ مستحيل .... لابد من كسرها...

الأستاذ : إذا صنعت هرما ثلاثي الأبعاد متقايس الأضلاع بأربعة أوجه من المثلثات فستصنع أربع مثلثات متقايسة...

يا ولدي إن العمليات الحسابية أوسع مما تظن، عندما اكتشف الإنسان الأعداد الطبيعية بدأ يقابل ما يملك بأشياء كأصابعه و الحصيات أو الخطوط على الجدران والطين فإذا كان عنده خمس خرفان قابل ذلك بخمس حصيات ، وسرعان ما أكتشف الجمع بإتحاد المجموعات فخمس خرفان زائد ثلاث خرفان ما هي إلا اتحاد مجموعتين لتعطي مجموعة ثمان خرفان.

لكن إذا تعلق الأمر بحساب الديون مثلا فالمسألة مستحيلة الحساب بطريقة الاتحاد هذه، فإذا كان عندك خمس خرفان و عليك دين بثلاث خرفان فإذا سددته يصبح عندك خروفان و هذا ليس باتحاد.

الصعوبة تكمن في إعطاء معنى للقيمة السالبة خاصة و أن الإنسان سرعان ما استعمل الأعداد في الهندسة فحسب بها الطول و العرض و المساحة.

في الحقيقة بحساب الإنسان للطول و العرض والمسافات و المساحات خرج من مجرد جمع أعداد إلى إمكانية جمع مساحتين فالشكل الهندسي له أكثر من بعد فإذا كانت عندك أرض وأضفت لها أرضا بجوارها فالشكل الهندسي يتغير لذلك تحتاج إجراء عمليات الجمع في أكثر من بعد لكن هذا الجمع كان سهلا لأن كل بعد كان مستقلا بعملياته.

التلميذ : هل هذه هي العمليات الحسابية الوحيدة التي عرفها الإنسان في القدم ؟

الأستاذ : عرف الإنسان عبر التاريخ عمليات حسابية أخرى بل ورثنا اليوم عن الحضارات السابقة البعض منها.

من ذلك الحسابات على مجموعات دورية كالساعات والأيام و الأسابيع و الأشهر و السنوات.

فعندما تضيف سبعة أيام ليوم الجمعة فإنك تعود ليوم الجمعة فهو حساب دائري غير الحساب المألوف في الأعداد الطبيعية الذي ينتج أعداد لا حد لها.

بمراقبة الإنسان للحركات الدورانية التي حوله كالشمس و القمر وضع تقاويم دورية فقام البابليون بتقسيم الزمن إلى ساعات فاخترعوا النظام الستيني فكان نوعا آخر من الحساب ، هو حساب دوراني مختلف عن

البعد المسافي المعتاد فإذا كانت الأعداد الطبيعية ليس لها نهاية فإن التعداد الستيني يعود إلى بدايته بعد الستين فكان الحساب الزمني أكثر تعقيدا من حساب المسافات و يتم في بعد مستقل لكن الإنسان القديم لم يره كبعد مشابه للطول و العرض و الإرتفاع.

الحساب الزمني و الفصول ومراقبة الشمس والنجوم دفعت الإنسان إلى اختراع الزوايا فكان حساب الزوايا نوعا آخر كذلك من الحسابات فجمعها دوري بمعنى الكلمة و أصبحت بعدا آخر تجرى عليه الحسابات واخترع بذالك أنواعا من الساعات كالساعة الشمسية الموجودة في الآثار الرومانية بباتنة.

بل ذهب إلى أكثر من ذلك عندما ربط بين البعدين البعد المسافي و البعد الدوراني المتمثل في الزوايا حين اخترع الدوال المثلثية فهنا كان أول تداخل حسابي بين بعدين مختلفين.

ففي المثلث القائم بمعرفة طول القاعدة و الوتر و الزواية بينهما أمكن حساب الارتفاع.

استغل الإنسان هذه العمليات الحسابية في وضع الخرائط للتنقل و السفر عبر البحار لكن رغم ذلك لم تتضح معالم القيمة السالبة لديه.

أول من اعتبر القيمة السالبة عددا هو الهندي أريبهاتا (476 ، 550م) الذي اعتبر الديون أعدادا سالبة.

قرونا بعدها عند الفارسي أبو الوفا 940، 998م نجد ظهورا لعمليات ضرب بين الأعداد السالبة و الموجبة لكن لم تعطى لهذه الأعداد وجودا كأعداد حسابية.

حتى عند الخوارزمي (783، 850) عندما اعتبر المعادلات الستة من الدرجة الأولى و الثانية لم يعتبر فيها القيم السالبة كأعداد و ذلك راجع لتمثيله لهذه المعادلات بالمساحات.

أول ظهور للأعداد السالبة كأعداد راجع إلى الرياضياتي سيمون ستفين (1548، 1620) أين ابتكر قاعدة ضرب الأعداد والتي أودع فيها ضرب عددين سالبين إلا أن مفهوم ضرب الأعداد السالبة بقي غامضا فإن كان جمع عددين سالبين يمكن اعتباره كجمع ديون لكن ما معني ضرب قيمتين سالبتين ؟

في هذا المفهوم يقول الرياضياتي دالمبير (1717، 1783) :

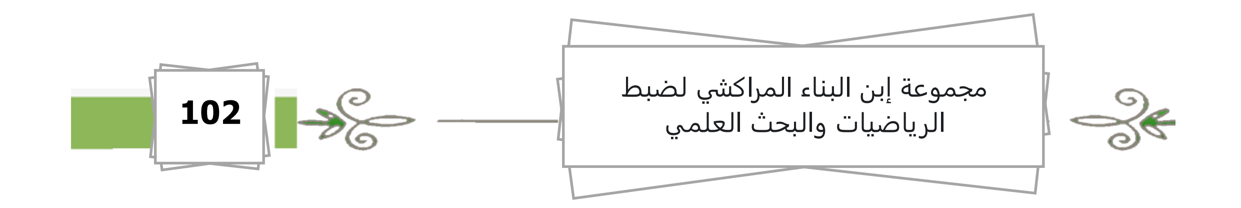
يجب الاعتراف بأنه ليس من السهل تحديد معنى فكرة القيم السالبة، وأن بعض الحذاق أسهموا في غمضها بسبب المفاهيم غير الدقيقة التي أعطوها لها.

القول بأن القيم السالبة هي قيم أقل من أي شيء هو تقديم فكرة لا يمكن تصورها.

الذي يدعون أن 1 ليس له نفس طبيعة 1- وأن القسمة بين 1 و 1- ليست نفسها بين 1- و 1 يرتكبون أخطاء مزدوجة.

إذن لا وجود لقيم سالبة منعزلة، إذا أخذنا 3- تجريديا فإنها لا تمثل أي فكرة في العقل. اهـ

كان يجب انتظار القرن التاسع عشر لتتم الصناعة المضبوطة للأعداد الصحيحة بقسمها السالب على يد الرياضياتي ريشارد ديديكان (1831، 1916) وهذا قرونا بعد تعميم استعمالها.



وقد تم ذلك باعتبار الأعداد مركبة من عددين، أليس 5+ و 5- هي مواضع بالنسبة للصفر، فيمكن رؤيتها كثنائيات باعتبار الموضع فيمكننا أن نصطلح

$+5 = (5,0)$

أي خمسة فوق الصفر

$-5 = (0,5)$

خمسة تحت الصفر

عموما الذي قام به ديديكان هو صناعة أعداد من قسمين (n,m) أي n فوق m فهو يقارن الفرق بينهما مع توجه من n نحو m أو العكس وهذا ما يوافق كتابتنا المعاصرة $n - m$

فيكون بهذا

$$+5 = (5, 0) = (8 ,3) =...$$
$$-5 = (0, 5) = (3 ,8) = ...$$
$$0 = (5,5) = (8,8)$$

فلاحظ هنا أن $(5,0) + (0,5) = (5,5) = 0$

فأظهر ديدكان ببساطة الأعداد السالبة كمقارنة مع الصفر.

لكن إن كانت القيم السالبة غير متصورة بذاتها تاريخيا فقد أعطي لها مفهوم عبر تاريخ صناعة الأعداد الحقيقية و ذلك بتمثيل الأعداد الحقيقية بمحور له نقطة صفر كمبدأ وشعاع وحدة موجه نحو اليمين فتكون الأعداد الموجبة المسافة على اليمن و السالبة على اليسار وهكذا القيمة السالبة مجرد اتجاه فإذا تقدمنا يمينا فهي قيم موجبة و إذا سرنا يسارا فهي سالبة.

بقي مشكل إعطاء مفهوم للعمليات الحقيقية فإن كان الجمع واضحا والضرب بين العدد الموجب و السالب له معنى فما معنى ضرب عددين سالبين ؟

بما أننا استعملنا الإتجاه للتفريق بين العدد السالب و العدد الموجب فيصبح الضرب بين 1 و 1- ما هو إلا ضرب بين طول و إتجاه فهو تغيير إتجاه فعلى ذلك يكون 1- مضروبا في 1- تغيير إتجاه مرتين وذلك يعطينا 1 لأننا نعود إلى نفس الإتجاه السابق فكأنك تستدير للخلف ثم تعيد الاستدارة إلى الأمام.

في الحقيقة هذه العملية واقعيا تستعمل بعدا ثانيا لأنك تستدير في بعدين لا في بعد واحد فتكون عملية الضرب ما هي إلا عمليتين : الأولى ضرب أطوال و الثانية ضرب إتجاهات.

أو بالأحرى جمع زوايا لأنك إذا استدرت نصف دورة فقد قمت بصناعة زواية قدرها π و اذا استدرت نصف دورة أخرى ما فعلته هو مجرد إضافة زاوية أخرى π فلأول مرة قام الإنسان بعمليات حسابية مختلفة بين بعدين البعد المسافي و البعد الزاوي لكن بين قيامه بذلك و فهمه لذلك احتاج تفكيرا عميقا لقرون.

التلميذ : ما علاقة ذلك بالعدد التخيلي ؟

الأستاذ : لفهم ذلك لابد للرجوع إلى المعادلة من الدرجة الثانية $x^2+1=0$



ففي سنة 1545 قام رياضياتي مجنون نعم هو مجنون اسمه كاردان فقد كان يزعم أن لديه جن عائلي ويعتقد أنه لديه قدرة على الكهانة، قام بتخيل حل لهذه المعادلة، بحيث يكون مربعه يساوي ناقص واحد.

فاستطاع بذلك حل معادلات من الدرجة الثالثة وذلك باستخدام مميز كاردان مميز على غرار المميز للمعادلات من الدرجة الثانية، لكن في حساب هذا المميز قد نجد قيمة سالبة فيأخذ بذلك حسب كاردان قيمة بالعدد التخيلي لكن الغريب في الأمر أنه بهذه القيمة و بعمليات جمع وضرب يمكننا الحصول على الحل الحقيقي للمعادلة.

ثم قام العالم رافايال بومبلي 1572 بوضع قواعد للحساب بهذه الأعداد المركبة بين العدد التخيلي و الأعداد الحقيقية فيعتبر العالم الذي وضع القواعد لمجموعة الأعداد المركبة ثم استمر العلماء باستعمال هذه الأعداد والتي أعطت ثمارا كثيرا منها وجود جميع جذور كثير حدود في مجموعة الأعداد المركبة و الحساب التكاملي بطريقة الرواسب.

ثم تطور استعمال هذه المجموعة الجديدة فأحدثت طفرة في الرياضيات بين احتوائها على جميع جذور كثيرات الحدود و استعمالها في حساب التكاملات بطريقة الرواسب، فطوروها و صنعوا بها دوالا كاللوغارتم العقدي و وجدوا لها استعمالات في الدوال المثلثية وربطوا بينها و بين الأسية.

التلميذ : لكن ما هو هذا العدد التخيلي ... ما معناه ... هل يمكن تصور قيمة له...

الأستاذ : في الحقيقة لولا الثمار التي جاءت بها مجموعة الأعداد المركبة لما التفت إليها العلماء لغرابتها.

تصور معنى لهذا العدد جاء مع الحساب اللوغارتمي والذي عمم ليشمل الأعداد المركبة حيث قام أولر باستعمال الزوايا لحساب اللوغارتم العقدي لعدد تخيلي مئة في المئة

لو عدنا إلى مسألة ضرب الأعداد السالبة في بعضها فعند تأملنا لها وجدناها مجرد تعبير عن تغيير اتجاهات وعند ضرب السالب في السالب ما هو إلا استدارتين أو جمع للزوايا لنعود لنفس الاتجاه.

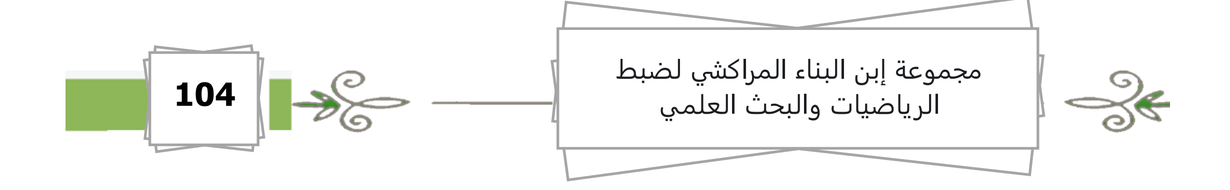
لكن ماذا يحدث، لو تصورنا أننا على محور الأعداد الحقيقية فقمنا بنصف استدارة بزاوية قائمة، سنجد أنفسنا في محور التراتيب، ثم نواصل الاستدارة بنفس الزاوية فسنجد أنفسنا في محور الأعداد الحقيقية عند ناقص واحد!!!

فناقص واحد ما هو إلا استدارتين بزاوية قائمة لكليهما و بما أن إشارة الضرب ما هي إلا مجموع زوايا فيمكننا أن نقول العدد ناقص واحد ما هو إلا ضرب استدارتين بزاوية قائمة لكليهما، لكن الاستدارة الأولى تضعنا في محور التراتيب ... فالعدد التخيلي ما هو إلا شعاع الوحدة لمحور العينات.

فيمكننا أن نرمز له بطرق مختلفة لكن عن طريق بعدين فإما نقول أن العدد i هو النقطة ذات الاحداثيات (0,1)

أي هو في محور التراتيب أو نقول هو 1 استدار بزاوية قائمة أي $(1, \pi/2)$

ألا يذكرك هذا بطريقة تصور الأعداد السابقة لديديكاند ؟



هو نفس الشيء نستعمل بعدين لكن بدل مقارنة عدد بالصفر أصبحنا نقارن قطعة مستقيمة بالنسبة لمحور الفواصل عن طريق الزاوية فهو تعميم للمقارنة لكن في بعدين.

في الحقيقة العدد i وإن كنا نسميه تخيليا هو موجود ونستطيع تمثيله في المعلم.

بمعنى آخر العمليات في الأعداد المركبة ما هي إلا عمليات في بعدين وقد ألِف الإنسان مثل هذه العمليات كالمسافة و الزمن و المسافة و الزوايا.

فعندما تسير فوق الأرض فأنت تسير ببعدين ويمكنك جمع المسافات على بعدين كما نفعل مع الأشعة.

لكن مع الأعداد المركبة كانت أول عملية تخلط بين الأبعاد مئة بالمئة فيمكن الانتقال من محور التراتيب إلى محور الفواصل بعمليه بين أشعة التراتيب فعندنا تضرب $i\times i=-1$ تنتقل بحسابات من التراتيب نحو الفواصل.

هذه الطريقة بإلاستنجاد بأبعاد جديدة تعدت الأعداد المركبة فكلما عجز الإنسان عن فهم نظرية بالاستحالة قام باستدعاء بُعد جديد وهذا الذي قمنا به في السؤال الأول في صناعة أربع مثلثات من ستة أعواد ثقاب حيث بخروجنا من المستوى إلى الفضاء صنعنا هرما و ما كان مستحيلا في المستوى أصبح متحققا في الفضاء.

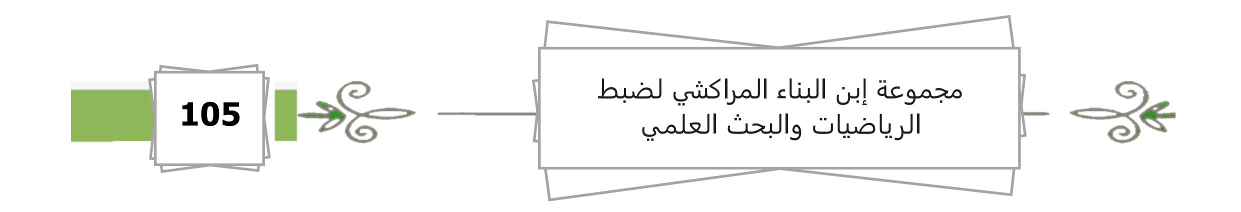
التلميذ : لكن ماذا يحدث لو خرجنا من الفضاء إلى أربعة أبعاد ؟

الأستاذ : هذا ما قام به الإنسان فعلا عندما وضع الفيزيائي أينشتان نظرية النسبية أين خلط بين المسافة و الزمن وأثر كل منهما على الأخر بل صنع فضاء جديدا الفضاء الزمكاني الذي نراه اليوم في حياتنا اليومية من استعمال الجي بي أس و الأقمار الصناعية فكل هذه تعمل بالنظرية النسبية فأصبحت السرعات الفائقة تؤثر في الزمن فيتمدد و المسافة تتقلص.

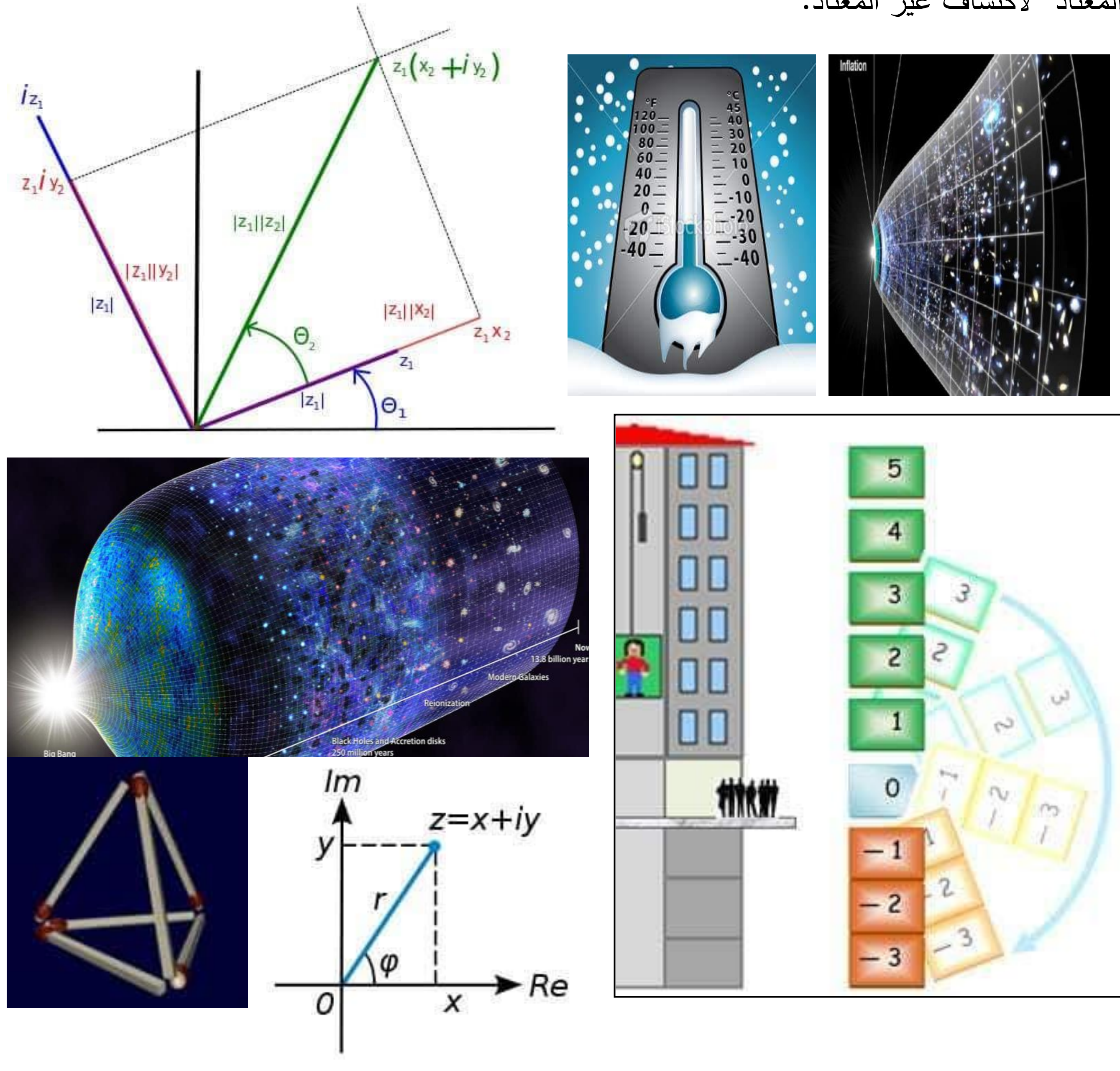
هل تعلم أنه عندما أرسلوا الأقمار الصناعة لوضع نظام الجي بي أس لم يصدق المسؤولون العسكريون الفيزيائيين عندما طلبوا منهم الأخذ بعين الإعتبار تمدد الزمن في الفضاء فرفضوا تصديق نظرية النسبية لكن بعد إرسال الأقمار الصناعة اتضح أن زمنها يتأخر عن زمننا في الأرض بوجه ملحوظ فاضطروا إلى تصديق المختصين و أخذوا بعين الاعتبار النظرية النسبية لحذف الفارق بين الزمنين.

التلميذ : هل توقف الإنسان عند هذا الحد ؟

الأستاذ : لا بل مازال يستدعي أبعادا جديدة كلما عجز عن تفسير الظواهر و منها ما يسمى اليوم بنظرية الحبال فهي نظرية فيزيائية في إثنى عشر بعدا تحاول تفسير الظواهر الطبيعية و التوحيد بين النظرية النسبية و النظرية الكمية إذ اليوم لدينا نظريتان النسبية و التي تعمل جيدا في الأجرام الكبيرة الوزن و فيزياء الكم التي تفسر جيدا الجسيمات الصغيرة ، لكن عند وجود جسم صغير مع وزن كبير يحدث تعارض بينهما كالحال في الثقوب السوداء.



لذلك استدعى العلماء أبعادا جديدة فلعل هذه الأبعاد تفسر وجود وجهتي النظر ولكي يفسر الفيزيائيون عدم رؤيتنا لهذه الأبعاد الجديدة تصوروا أنها منغلقة على بعضها محليا في مسافات صغيرة جدا لا يمكننا رؤيته.
السؤال الذي يبقى مطروحا اليوم ، هل مستقبل الرياضيات في هذه الأبعاد المفقودة ؟ هل حل حدسية ريمان مثلا يستدعي منا تصور هذه الأبعاد المفقودة و كم يوجد من بعد في واقعنا ؟
المستقبل وحده من سيجيبنا على هذه الأسئلة لكن الأمر الأكيد أن خيال الإنسان مثمر فيجب تحطيم قيود المعتاد لاكتشاف غير المعتاد.



بين الأعداد الحقيقية والأعداد القابلة للإنشاء (نسخة ثانية)

من المعلوم أن الأعداد المتسامية غير قابلة للإنشاء وكثير من الأعداد الجبرية غير الناطقة كذلك.

فالمبرهنة الأساسية في هذا الميدان هي مبرهنة وينتزل تنص على أن الشرط اللازم لقابلية إنشاء عدد حقيقي ان يكون جذرا لكثير حدود ذو معاملات صحيحة من درجة تكتب كقوة للعدد إثنين.

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Wantzel

قابلية الإنشاء تعني إمكانية رسم قطعة مستقيمة بطول هذا العدد باستعمال مسطرة غير مرقمة والفرجار.

العملية تتم باصطلاح طول قطعة مستقيمة كواحد ثم تستعمل مستقيمات ودوائر لصناعة العدد المطلوب.

فيمكن إنشاء الأعداد الطبيعية بتكرار طول القطعة المستقيمة أما الناطقة فبتجزئتها عبر مبرهنة طاليس أما الجذور التربيعية فبمبرهنة فيثاغورث.

لكن التساؤل المتبادر للذهن كيف تكون أغلب الأعداد الحقيقية غير قابلة للإنشاء رغم أننا نقابل المستقيم بالاعداد الحقيقية ؟

قابلية الإنشاء تستعمل عددا منتهيا من عمليات الرسم بالمسطرة والفرجار أما أغلب الأعداد الحقيقية فتنتج من نهايات لمتتاليات ناطقة فهي عمليات جبرية غير منتهية العدد.

لذلك عملية الإنشاء هي أقرب ما يكون لعمليات توافق الواقع البشري فهي لا تأخذ بعين الإعتبار الوجود لكن الوصول إلى العدد.

وهنا يكمن الفرق فالمستقيم الحقيقي فيه أعداد نصل إليها عبر المرور إلى المالانهاية لذلك هو أغنى من حيث العناصر من الأعداد الحقيقية القابلة للإنشاء.

ومن هنا نستنتج كذلك قابلية عد هذه الأعداد إذ هي نتيجة عمليات منتهية العدد.

لكن كيف يمكن تفسير قابلية إنشاء أعداد صماء كالجذر التربيعي لإثنين ؟

في الحقيقة هنا نستعمل تداخل بعدين بالمرور بعلاقة فيثاغورث لإنتاج مثل هذه الأعداد فنحن نستعمل خاصية الفضاء الإقليدي وهذا ما يفسر درجة كثير الحدود قوة لإثنين في مبرهنة وينتزل إذ مبرهنة فيثاغورث تربط الأطوال بالتربيع فإذا كررناها لا يمكن أن ننتج إلا قوى لإثنين.

قد نتساءل لماذا أمكن إنتاج العدد π أو طول دائرة المتعلق به وهو عدد متسام ؟

العدد π لم ينتج كقطعة مستقيمة ولا كمساحة لمربع إنما أنتج كطول دائرة.

رسم الدائرة هو تطبيق لعمليات غير منتهية لعلاقة فيثاغورث في شكل يظن أنه منته إذ نفرض تسليما أنه بإمكاننا وضع عدد غير منته من النقاط على شكل دائري ثم نستعمل خاصية من خاصيات الفضاء الإقليدي لصناعة هذا الطول.

فهذه نهاية عمليات غير منتهية لكن سلمنا بانتهائها.

لكن يبقى العدد π بهذا الشكل مختلفا عن طول لقطعة مستقيمة فهو غير قابل للإنشاء.



ولو تأملنا الدائرة فهي تمثل عددا غير منته من تطبيقات لمبرهنة فيثاغورث إذ كل نقطة منها بعدها عن المركز هو وتر مثلث قائم فلا عجب أن نحصل على عدد متسام بهذه الطريقة.

وقد تساءل الإغريق منذ القدم عن إمكانية تربيع القرص أي صناعة مربع مساحته تساوي مساحة القرص فمسائل قابلية الإنشاء قديمة قدم الإغريق.

بل صاحبت الرياضياتيين دهرا من الزمن إلى أن قام الرياضياتي ليندمان سنة 1882 ببرهنة عدم جبرية العدد π باستعمال علاقة اولر الشهيرة.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Quadrature_du_cercle

حسب مبرهنة وينتزل لا يمكننا رسم الجذر التكعيبي ل 2 أو بصورة أخرى لا يمكننا رسم مكعب حجمه 2 لأن الجذر التكعيبي ل 2 ليس حلا لمعادلة كثير حدود رتبته قوى ل 2 .

مبرهنة وينتزل تعطي شرطا لازما لكنه غير كاف.

لكن ماذا عن الأعداد التي تكتب بالشكل a^b حيث a عدد جبري يختلف عن 0 و 1 و b عدد جبري غير ناطق ؟

فالجواب أن هذا عدد متسام بل هذه إحدى معضلات هلبرت ال23 الذي طرحها في بداية القرن العشرين (المعضلة السابعة)

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8mes_de_Hilbert

وقد أجاب عليها سنة 1934 كل من جلفون و شنايدر تحت ما يسمى

Théorème de Gelfond-Schneider

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8me_de...

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9orie_des_nombres...

فهذه الأعداد متسامية إذن هي ليست جذورا لكثيرات حدود ذو معاملات صحيحة إذن هي ليست قابلة للإنشاء حسب مبرهنة وينتزل .

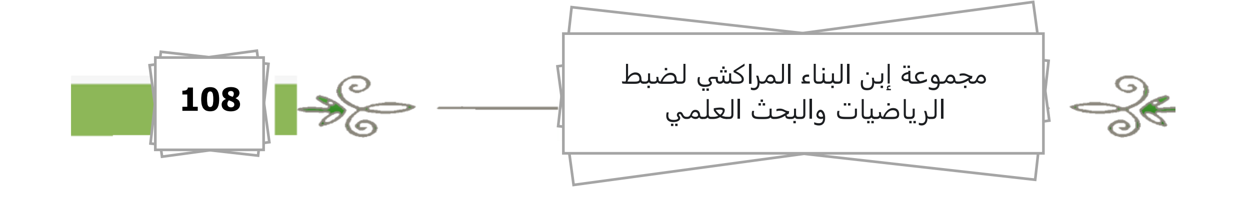
مجموعة الأعداد الحقيقية تحمل غرائب كثيرة خاصة الأعداد المتسامية منها ولذلك درس الرياضياتيون كيفية الاقتراب منها عبر متتاليات ناطقة تحت ما يسمى قياس عدم ناطقية العدد:

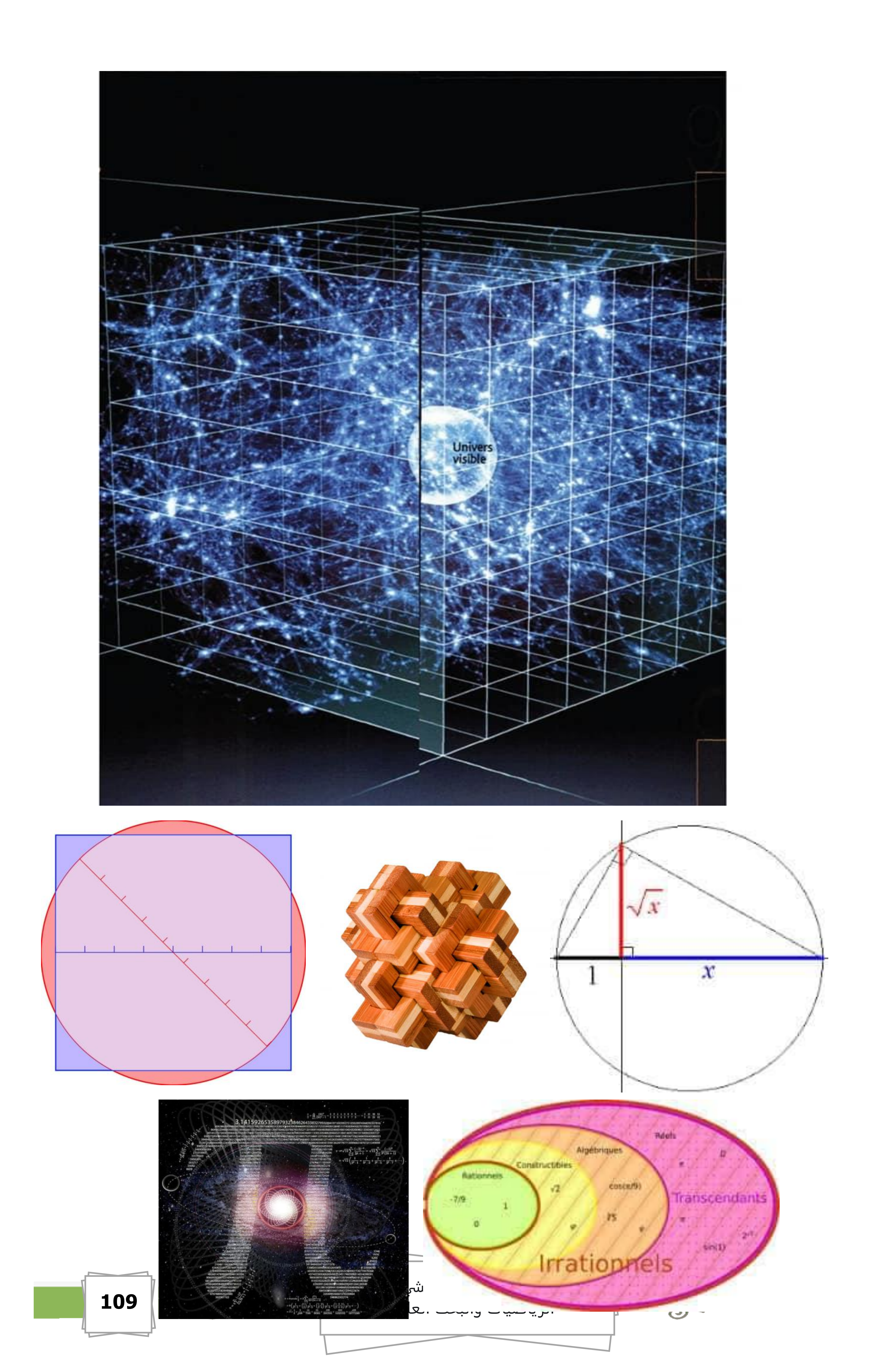
https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Liouville

وهذا ميدان ما زال جاري البحث فيه فإن كنا نعلم أن قياس عدم ناطقية الأعداد الجبرية غير الناطقة هو 2 وهو كذلك قياس عدم ناطقية العدد e لكننا ما زلنا نجهل قياس عدم ناطقية العدد π .

نصف قرن مع الأعداد المتسامية

https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00411463/document




Univers visible
$\sqrt{x}$
1
x
Réels
Algébriques
Constructibles
Rationnels
-7/9
1
0
√2
Transcendants
sin(1)
Irrationnels

بين الأعداد المتسامية والأعداد الحقيقية الجبرية غير الناطقة...

الأعداد الجبرية هي أعداد أنتجت بتصورها كجذور لكثيرات حدود ناطقة أما المتسامية فهي أعداد حقيقية أنتجت من النهايات مع كونها غير جبرية فكل عدد حقيقي غير جبري فهو متسام.

لو تأملنا الأعداد الجبرية غير الناطقة (كلامنا هنا على الأعداد الحقيقية منها) والأعداد المتسامية سنجد أن كليهما يشتركان في كون كتابتهما العشرية غير منتهية وغير دورية.

لكن الأعداد الجبرية بناؤها جبري يعتمد على حلول كثيرات الحدود أما المتسامية فبناؤها تحليلي يعتمد على النهايات فما الفرق بين تركيبتيهما ؟

نعلم أنه يمكننا الوصول للأعداد الجبرية الحقيقية كنهاية متتاليات ناطقة لكن هذا لا يميزها عن الأعداد المتسامية إلا لو قيدنا ذلك بالبناء التحليلي للأعداد الجبرية كحلول لدوال كثيرات حدود ناطقة إنطلاقا من مبرهنة القيم المتوسطة والذي يعود برهنتها للنهايات أو الطبولوجيا.

من ناحية النهايات نجد أعدادا متسامية تشترك مع الأعداد الجبرية في رتبة عدم الناطقية فالعدد e مثلا رتبة عدم ناطقيته هي 2 وهي تماما رتبة عدم ناطقية الأعداد الجبرية غير الناطقة.

فالسؤال الذي يطرح نفسه هل هناك فعلا فرق بين الأعداد المتسامية والجبرية الحقيقية غير الناطقة من حيث التركيبة أو أن الأعداد الجبرية غير الناطقة مجرد نظرة بشرية مقتصرة على كثيرات الحدود ؟

أليس العدد e هو نتيجة لتعويض الواحد في كثير حدود ناطق غير نهائي ممثل بنشر الدالة الأسية ؟

$1+x+x^2/2!+....$

والعدد π هو جذر كثير حدود ناطق غير نهائي متمثل في نشر الدالة sin

فالظاهر أن الفرق بين الأعداد المتسامية والأعداد الجبرية غير الناطقة يتجلى في مرورنا للمالانهاية في تركيب العمليات الجبرية.

لكن كلاهما يمثل في الأصل متتاليات ناطقة نهاية كتابتها العشرية مستقرة وخارج مجموعة الأعداد الناطقة.

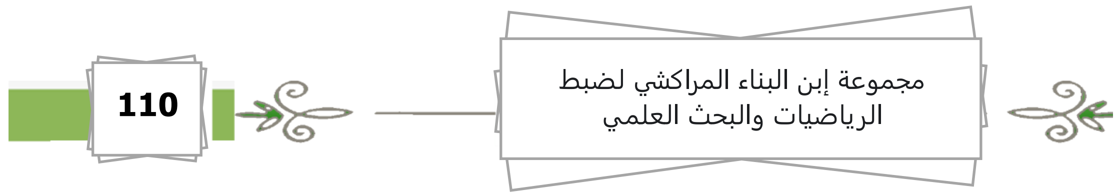
فالأعداد الجبرية غير الناطقة جزء من هذه المجموعة تحقق شرطا إضافيا وهو أنه توجد طريقة تركيب لعمليات جبرية من ضرب وجمع وطرح لها يوصل لعدد ناطق وهذا ما نعبر عنه بأنها جذر لكثير حدود ناطق.

أما الأعداد المتسامية فلا تحقق هذا الشرط إذ يجب المرور للمالانهاية للوصول لعدد ناطق.

لعل هذا يوضح صعوبة برهنة متسامية عدد من عدمها فمثلا لا ندري هل

كون ثابت Euler–Mascheroni و ثابت Apéry متساميين أو لا رغم علمنا بأنهما غير ناطقان!

بل لا ندري هل العدد e + π و العدد e − π متساميين أو لا!!




من الناحية الهندسية نحن نعلم أنه ليس كل الأعداد الجبرية قابلة للإنشاء فالمبرهنة الأساسية في هذا الميدان هي مبرهنة وينتزل والتي تنص على أن الشرط اللازم لقابلية إنشاء عدد حقيقي أن يكون جذرا لكثير حدود ذو معاملات صحيحة من درجة تكتب كقوة للعدد إثنين.

وهذا راجع لمبرهنة فيثاغورث التي تستعمل القوة 2 .

هذا يبين من حيث الواقع أن ظهور الأعداد الجبرية غير الناطقة ينتج من تركيب مبرهنة فيثاغورث لعدد منته من المرات.

لكن لو نظرنا للعدد π فهو عدد هندسي يظهر في الواقع من الحسابات غير المنتهية لعلاقة فيثاغورث في الدائرة فطولها يحسب بهذه الطريقة لذلك العدد π متعلق ببنية الفضاء من حيث البعد المكاني وينتج من تكرار غير منته للعمليات الجبرية.

أما لو نظرنا للعدد e فهو عدد حسابي يظهر من تكرار حسابات الجمع والضرب لذلك يظهر في الواقع في سلوك التكرار فهو متعلق ببنية الفضاء من حيث الزمان فهو تكرار زماني لذلك نجده في حساب الإشعاعات وفي تكاثر البكتيريا.

وقد نجد ظهورا آخر لهذين العددين في الواقع أكثر تعقيدا كالاحتمالات ففي إبرة Buffon يظهر في حساب إحتمالها مقلوب π لكنه يفسر بكون الإبرة عندما تسقط على مستوي يمكنها الدوران فدرجة حريتها تعود 2π وكذلك الموجات فكل هذا يرجع لدرجة الحرية في الكون والتي تعود لبنية الكون الهندسية التي تنتج الدائرة.

فالظاهر أنه هذه الأعداد المتسامية التي تظهر لنا في الكون راجعة لبنية الكون.

ولنا أن نسأل هل هناك أعداد متسامية أخرى موجودة في الكون بل هل سرعة الضوء عدد متسامي أو جبري؟

هناك جواب جزئي لهذا السؤال جاءت به نظرية الحسابات والتي تخبرنا أن الأعداد الحقيقة القابلة للحساب بالخوارزميات هي مجموعة قابلة للعد!!!

فأغلب الأعداد الحقيقية غير قابلة للحساب فهي إذن غير موجودة في الواقع فلا ننسى أن واقعنا مبني على مبادئ بسيطة:

تكرار طبعي لجسيمات أولية

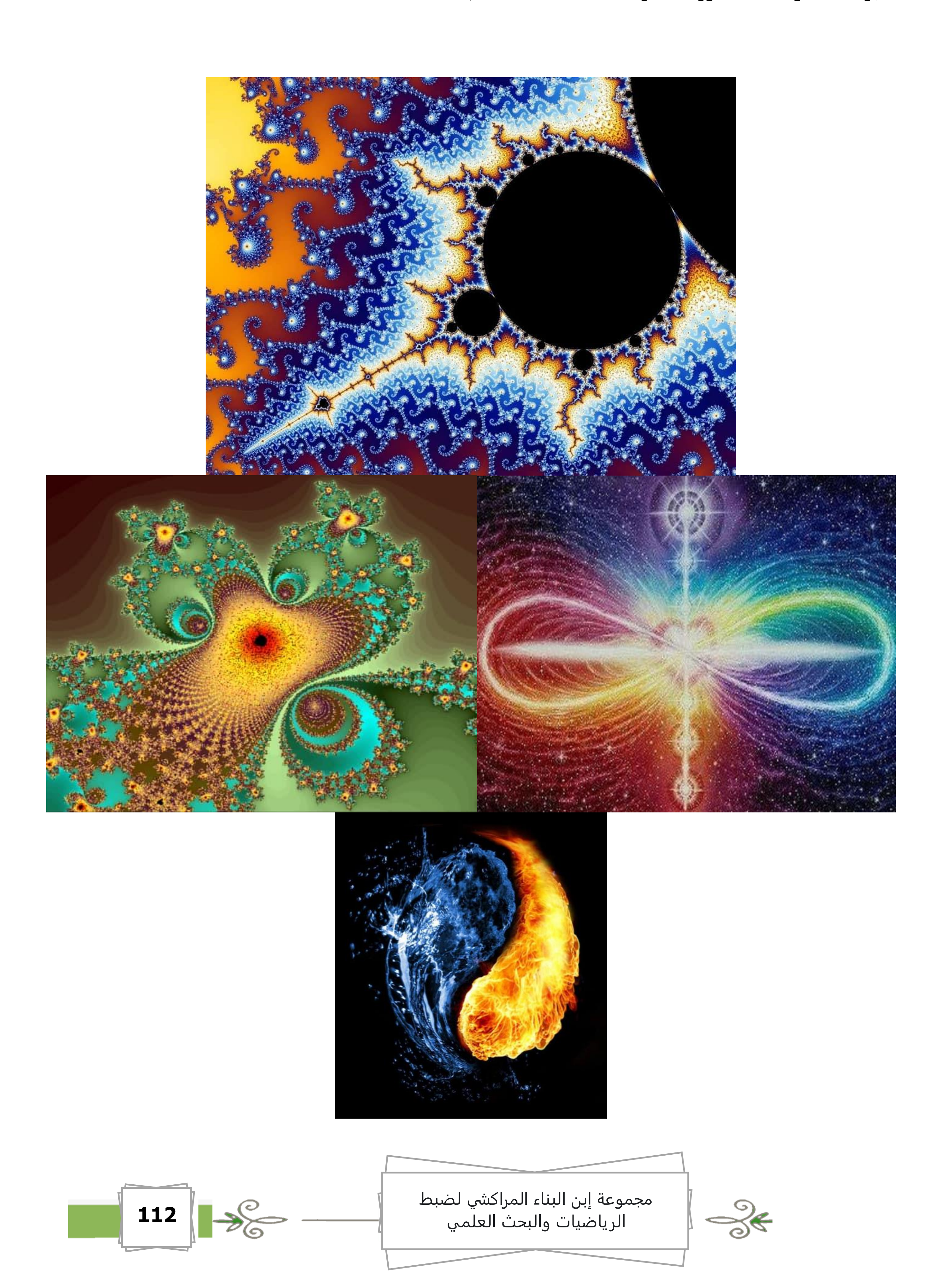
زمن غير منته فيما يبدو لنا

ثلاث أبعاد هندسية فيما يبدو لنا

ثم تأتي النظرية النسبية لتضيف إلى هذه المبادئ البسيطة نوعا من الغموض بجعل الأبعاد الهندسية متعلقة بالزمن.

تمكن العقل البشري من صناعة الأعداد الحقيقية بسد الثغرات فأنتج كما هائلا من الأعداد أغلبها أعداد متسامية غير موجودة في واقعنا المشاهد ولحد اليوم تبقى أعدادا غريبا معرفتنا بها مازالت هزيلة.

أما الأعداد الجبرية فهي مجرد مرحلة تاريخية نتجت من قصور النظرة البشرية في حقبة معينة على دوال كثيرات الحدود فلما تجاوزها ظهرت له الأعداد المتسامية.



لنتكلم قليلا عن مجموعة الأعداد الحقيقية R ، ما هي وكيف تصنع ؟

مفهوم الأعداد من المفاهيم التي استغرقت قرونا لنضجها فقد بدأت بأعداد طبيعية بسيطة لتنتهي بمجموعة أعداد معقدة تشمل ما يسمى الأعداد المتسامية.

فظهور الأعداد الطبيعية كان تلقائيا إذ الأعداد هي التكرار فالعدد 2 هو شيء وشيء أما ثلاثة فهي شيء وشيء وشيء....

فالعدد هو تكميم للتكرار.

أما الصفر فقد تأخر ظهوره لأنه تجريد أقوى للتكرار وهو عدم وجوده.

سريعا ما أضيف إلى هذه الأعداد الأعداد الناطقة والتي تمثل تكرار الأجزاء بالنسبة للكل فالثلثان هما شيء وشيء مقابل ثلاث أشياء.

ظهور الأعداد الجبرية كالجذر التربيعي لـ2 كان عن طريق الهندسة سواء من مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم أو من ظهور حلول المقاطع المخروطية.

لكن الذي أظهر باق الأعداد الحقيقية وهي الأعداد المتسامية هو ظهور أعداد ليست بجبرية كالعدد e و العدد π وبصفة عامة الكتابة العشرية والسلاسل والنهايات فكل هذه أظهرت وجود أعداد لم نكن نتصورها من قبل.

أما الأعداد السالبة فظهرت من مفهوم المقارنة مع الصفر.

تتشكل مجموعة الأعداد الحقيقية بترتيب الاحتواء من:

مجموعة الأعداد الطبيعية(nombre naturel) N

مجموعة الأعداد الصحيحة Z وهي الزمرة التي تشمل N .

(nombre entier relatif)

وأصل رمز Z من الكلمة الألمانية Zahlen التي تعني عدد.

مجموعة الأعداد العشرية D وهي الأعداد الناطقة التي كتابتها العشرية منتهية.

(Nombre décimal)

مجموعة الأعداد الناطقة Q

(nombre rationnel)

وهناك من يسميها الأعداد الجذرية.

والتسمية العربية القديمة لها هي الأعداد المُنَطَّقَة.

مجموعة الأعداد الجبرية الحقيقية وهي الجذور الحقيقية لكثيرات الحدود الصحيحة أو الناطقة فالأمر سيان.

(nombre algebrique)

وأخيرا بإضافة الأعداد المتسامية وهي الأعداد الحقيقية غير الجبرية نصنع R .



(nombre transcendant).

نطلق على الأعداد غير الناطقة بالأعداد الصماء(nombre irrationnel) .

لننظر إلى مجموعة الأعداد الحقيقية من حيث الخصائص والصناعة.

لو أردنا تلخيص مجموعة الأعداد الحقيقية R فيمكننا تلخيصها بأنها حقل أرخميدي يتميز بخاصية الحد الأعلى.

الحقول الأرخميدية هي الحقول المزودة بعلاقة ترتيب والتي تحقق من أجل كل عنصر منها x يوجد n من N بحيث $x < n$

وجود N داخل حقل غير منته نتيجة لجمع n مرة العنصر الحيادي 1 .

خاصية الأرخميدية للحقل مكافئة لكثافة Q الجبرية فيه.

وتكافؤ طبولوجيا عند تزويده بالطبولوجيا المولدة من علاقة الترتيب نهاية $1/n$ تساوي الصفر.

كل الحقول الأرخميدية هي حقول من R .

لكن R عندها خاصية مهمة وهي خاصية الحد الأعلى أيْ أيُّ جزء محدود من الأعلى من R يقبل حدا أعلى في R .

لنتأمل هذه الخاصية عبر المتراجحة الناطقة $x^2 < 2$ نحن نعلم أن المعادلة $x^2 - 2 = 0$ لا تقبل حلا في Q وأن المجموعة $A = \{x \in Q : x^2 < 2\}$ لا تقبل حدا أعلى في Q وهذا بسبب كثافة Q .

يمكننا إيجاد حل جبري للمعادلة $x^2 - 2 = 0$ عن طريق إكمال Q لتصبح غلقا جبريا أي كل كثير حدود غير معدوم يقبل جذرا فهذه الجذور تشكل حقلا جبريا مغلقا وبالمناسبة هو يشمل كذلك العدد التخيلي i .

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Cl%C3%B4ture_alg%C3%A9brique

نسمي الأعداد الحقيقة منها بالأعداد الجبرية.

لكن رغم أن هذا الحقل يجيب على وجود حد أعلى للمجموعة A السابقة الذكر فإنه لا يعطينا حدا أعلا لكل مجموعة منتهية مثال ذلك السلسلة التي تعطيناe

$1+1/1!+1/2!+1/3! ....$

فهي محدودة بـ 3 لكنها لا تقبل حدا أعلى جبري فيمكننا النزول عن 3 بـ 2.9 فهو يحد كذلك المتتالية السابقة ويمكننا النزول أكثر بالفاصلة عبر كثافة الأعداد العشرية لكننا لن نصل لحد أعلى لا يمكن معه التوقف عن النزول رغم أننا نحس أننا نقترب من عدد.

فالحدس يدفعنا هنا لمحاولة صناعة مجموعة أكبر من Q بل أكبر من مجموعة الأعداد الجبرية تحقق خاصية لكل مجموعة محدودة من الأعلى يوجد حد أعلى.

هذه الخاصية يمكننا كذلك صياغتها طبولوجيا بأن كل متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى تقبل نهاية أو كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل تقبل حدا أدنى.

من الظاهر أن هذه الخاصية طبولوجية ولو تأملنا جيدا الأعداد التي تنقصنا لوجدناها أعداد تملأ الثغرات فالجذر التربيعي ل 2 هو ثغرة بين الأعداد الناطقة وهذا نلاحظه جيدا من الكتابة العشرية فما نسميه كتابة عشرية غير منتهية هي ملأ للثغرات الممكنة بين الأعداد الناطقة.

هناك طرق مختلفة لبناء الأعداد الحقيقية لإظهار هذه الخاصية كلها تحاول ملأ هذه الثغرات.

أول هذه الطرق هي طريقة مقاطع ديديكاند فقد لاحظ ديدكاند أن مشكلة الجذر التربيعي ل 2 هي مشكلة ثغرة بين مجموعتين تقسم مجموعة الأعداد الناطقة لقسمين متكاملين متجاورين غير متقاطعين : مجموعة أصغر منه ومجموعة أكبر منه.

فعرف المقطع بمجموعتين (A,B) بحيث

$$A \cap B = \varnothing$$

$$A \cup B = Q$$

$$\forall a \in A , \forall b \in B : a < b$$

من الواضح أننا نملأ الثغرة هنا بين A و B ذلك أنه متى رأينا ثغرة وميزناها أمكننا إعطاءها وجودا.

أليس هذا ما نفعله مع الظل ؟ فما هو إلا غياب أشعة الضوء عن السطح المشاهد.

خاصية الحد الأعلى تظهر تلقائيا من المقطع فهو معرف كحد أعلى للمجموعة A وكحد أدنى للمجموعة B

الطريقة الثانية لصناعة R هي عن طريق المتتاليات الكوشية وذلك من ملاحظة أن هذه الثغرات يمكننا الاقتراب منها بالمتتاليات على غرار

$$1+1/2^2+1/3^2+\dots = \pi^2/6 \quad \text{و} \quad e = 1+1/1!+1/2!+1/3! \dots.$$

وهذا يظهر جليا عند الكتابة العشرية فنحن نراها في المتتالية تثبت رويدا رويدا بعد الفاصلة كلما تقدمنا في الرتب.

بل هذا الذي نستعمله عند محاولة حساب النهاية عبر الآلة الحاسبة فنحن نقارن حدود المتتالية لمعرفة أي رتبة يثبت فيها جزء من الكتابة العشرية

$$(1+1/10000)\text{^}10000 \approx 2.71814592682$$

$$(1+1/100000)\text{^}100000 \approx 2.71826823719$$

فمفهوم الاقتراب يقودنا للمتتاليات الكوشية والمتتالية الكوشية الناطقة هي التي تحقق:

$$\forall\ \xi\ (\in Q) > 0\ ,\ \exists\ j \in N\ ,\ \forall\ n\ ,m > j : |U_n - U_m| < \xi$$

بلغة أخرى من أجل أي عدد أرقام k بعد الفاصلة نريده يمكننا ايجاد j بحيث كل حدود المتتالية انطلاقا من بعده، تشترك في k أعداد الأولى من الكتابة العشرية.



فيكفي هنا أن نعرف R انطلاقا من مجموعة أصناف تكافؤ المتتاليات الكوشية الناطقة حيث علاقة التكافؤ بين متتاليتين هي $\lim U_n - V_n = 0$

أي لملأ الثغرات جعلنا المتتالية نفسها عددا.

هذا البناء يخول لنا إيجاد نهاية لكل متتالية رتيبة محدودة أي ينتج خاصية الحد الأعلى.

هناك طرق أخرى لبناء مجموعة الأعداد الحقيقية لكن سنشير إلى طريقة غريبة منها لا تنطلق من Q وهي طريقة نشرت سنة 1975.

تنطلق هذه الطريقة من مجموعة الأعداد الصحيحة Z فنقول عن تطبيق $f : Z \to Z$

أنه شبه تشاكل إذا كان التطبيق التالي محدودا:

$$Q(n,m) = f(n+m) - f(n) - f(m)$$

أي ينتج عددا منتهيا من الأعداد الصحيحة.

ثم نعرف علاقة تكافؤ بين تطبيقين f و g بأن تكون مجموعة الأعداد $f(n) - g(n)$ منتهية.

نقول عن f و g أنهما شبه متساويين.

أصناف علاقة التكافؤ هذه تصنع مجموعة الأعداد الحقيقية R لأول وهلة لا تظهر لنا ما علاقة هذه التطبيقات بالأعداد الحقيقية لكن التطبيق $f(n)/n$

هو متتالية كوشية وكل صنف تكافؤ تنتهي عناصره بالقسمة على n لنفس النهاية في R فهذه الطريقة هي نفسها طريقة المتتاليات الكوشية لكن تستعمل Z

يمكن النظر في هذا الرابط للمزيد حولها:

Construction de R par les quasi–morphismes de Z

https://perso.ens–rennes.fr/…/slides/Journee%25204a.pdf

مما سبق يتبين لنا أن R هي نتيجة لملأ الثغرات فالعقل البشري متى رأى ثغرة صنع لها وجودا بما حولها ، أليس الثقب في الحائط هو فراغ في الأصل لكن أعطيناه وجودا بما حوله من حواف الحائط.

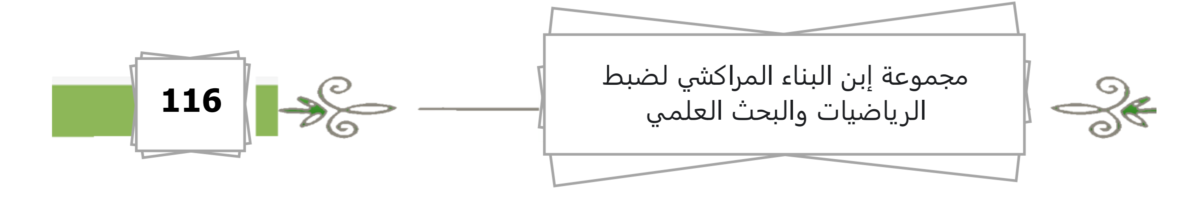
هذا المبدأ تطبقه الرياضيات كثيرا في صناعة الكائنات فمتى رأت نقصا في خصائص مجموعة أكملته بتعريف هذا النقص عن طريق مجموعة عناصر هذه المجموعة ولتجنب التكرار تستعمل أصناف التكافؤ.

فالنقص نفسه خاصية وكل خاصية متعلقة بعناصر هي كائن في الرياضيات ذلك أن الكائنات في الرياضيات هي عناصر المجموعة أي هي مجموعات فمتى ميزنا العناصر عن غيرها أصبحت مجموعة.

فهذا الذي فعلناه لصناعة Z من N إذ لاحظنا نقصا عند الطرح مثل $5 - 7$

فعرفنا العدد بهذا النقص $-2 = (5,7) = (m , m+2) = \ldots$

وكذلك فعلنا مع Q وكذلك فعلنا هنا مع R وبصفة عامة يمكننا صناعة الغلق الجبري لحقل بإتمام النقص في معادلاته عن طريق كثيرات حدوده.



ويمكننا صناعة الغلق الطبولوجي لفضاء متري عن طريق اعتبار المتتاليات الكوشية عناصر مجموعة.

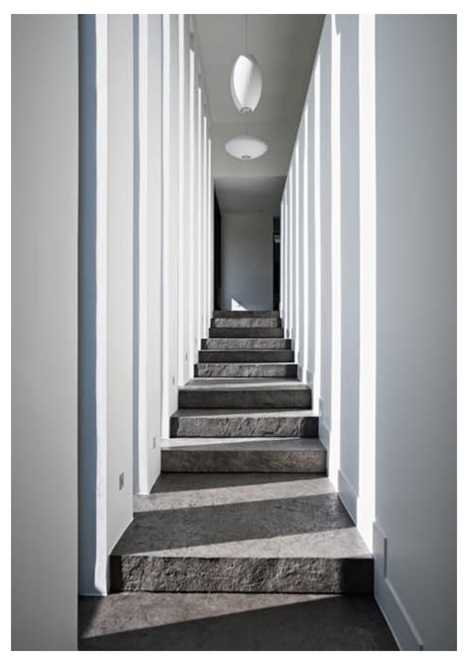
ففي الرياضيات متى ميزنا النقص كخاصية متعلقة بعناصر اعتبرنا هذه العناصر نفسها هو هذا النقص فأصبح موجودا.

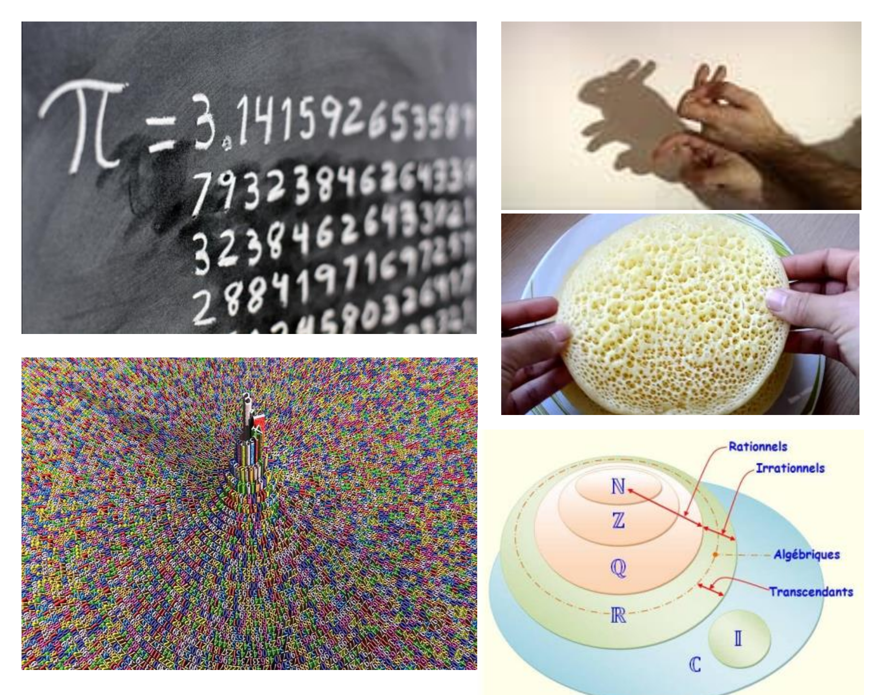
نشير إلى أن صناعة R تستدعى مسلمة الاختيار وتشير كذلك إلى أن مجموعة الأعداد الحقيقية المذكورة هنا هي مجموعة الأعداد الحقيقية في المنطق الشكلي المبنية على نظرية المجموعات ZFC .

أما المنطق الحدسي فمفهوم العدد الحقيقي عنده أصغر بكثير من هذا فهم يشترطون قابلية الحساب ولذلك مجموعة الأعداد الحقيقية في هذا المنطق هي قابلة للعد بعكس المجموعة المألوفة عندنا فهي غير قابلة للعد.

Construction des nombres réels

https://fr.m.wikipedia.org/.../Construction_des_nombres_r...





العدد π بين الخصائص الهندسية والخصائص الطبولوجية

التسامي وعدم قابلية الإنشاء...

من منا لا يعرف العدد π ؟ أو بالأحرى الكثير منا يظن أنه يعرف العدد π لكن لو سألت ما هو العدد π لتهاطلت الأجوبة بين من يقول 3.14 وآخر يقول قسمة طول محيط الدائرة على قطرها ....

والكثير لا يعي أن هذا العدد يحمل في طياته من المفاهيم التي لشرحها ألفت فيها كتب بل بها صنعت الرياضيات.

لنبدأ من البداية، ما هو العدد ؟

فكرة العدد نشأت من إدراك البشر لوجوده ، ووجود غيره ووجود الأشياء التي حوله وإمكانية مقابلة أشياء موجودة بأشياء مألوفة كأصابع اليد والحصيات من حيث التكرار فخروفان يقابلان حصيتان وثلاث خرفان تقابل ثلاث حصيات.

وبما أن البشر له القدرة على وصف الأشياء وتسمية الأوصاف فقد أعطى لكل تكرار طبيعي اسما فنشأت مجموعة الأعداد الطبيعية.

فالعدد الطبيعي مجرد تكميم للتكرار، لكن سرعان ما لاحظ البشر إمكانية قسمة الأشياء فإن كانت هذه تفاحة فنصفاها يشكلان تفاحة كاملة.

فمقارنة الأجزاء أمام الكل شيء سهل من نفس جنس تكميم التكرار فالأمر هنا هو تكرار للجزء أو للأجزاء.

هذا النوع من التكرار أنشأ الأعداد الناطقة ثم أخذت كل هذه الأعداد كامل مفهومها كأعداد عندما بدا البشر برسمها هندسيا عن طريق تكرار قطعة مستقيمة سماها البشر الوحدة.

فمن السهل اختيار قطعة مستقيمة كوحدة ثم تكرارها لصناعة وحدتين وثلاث وأربع ... أو تنصيفها وتثمينها ... فأخترع البشر ما يسمى بقياس الطول.

لكن الهندسة جاءت بأسئلة جديدة منها علاقة فيثاغورث في المثلث القائم التي نتج عنها إمكانية صناعة قطع مستقيمة لها أطوال غير ناطقة كالجذر التربيعي لإثنين.

كما لاحظ البشر أنه بإمكانهم قياس محيط الدائرة فكل منا يذكر تجربة الصغر في المدارس التي قمنا فيها بإحاطة قرص بخيط ثم حساب طوله .

فكان من السهل ملاحظة التناسب بين طول محيط الدائرة وقطرها لكن قيمة هذه التناسب المسماة العدد π طرحت تساؤلات :

هل هي عدد ناطق ؟

هل هناك قطع مستقيمة بهذا الطول ؟

هل هناك مربعات مساحتها تساوي مساحة الدائرة ؟

....




كل هذه الأعداد الجديدة التي لم يتمكن البشر من كتابة قيم لها كنسبة بين عددين طبيعيين أو ما نصطلح عليه بعدد ناطق سماها العرب الأعداد الصماء.

عدم إمكانية كتابة الأعداد الصماء كأعداد ناطقة لم يمنع البشر من محاولة تقريبها بقيم ناطقة وقد ساعدهم في ذلك الكتابة العشرية أو الأجزاء من نوع $1/10^n$ فبتكرار هذه الأجزاء وضمها بعضا لبعض تمكن العرب من حساب قيم تقريبية دقيقة لأعداد صماء مثل π .

ومع تطور الرياضيات تحسنت هذه التقريبات وبات من الواضح أنه لحساب قيم تقريبية لعدد أصم فلابد من تكرارات كثيرة لأجزاء عشرية أو ما نصطلح عليه اليوم الأرقام عن يمين الفاصلة.

فكلما تقدمنا في حساب هذه الأرقام اقتربنا من العدد الأصم المختار وهنا لاحظ البشر مسائل جديدة:

أن هذه الأعداد تحتاج لتكرار غير منته لأجزاء عشرية أو ما نسميه اليوم بمفهوم المتتالية وتقاربها نحو نهاية.

الأمر الثان أن هناك أعداد كثيرة غير الأعداد الناطقة بل هي غير قابلة للعد.

الأمر الثالث أن الأعداد الصماء نوعان : نوع يمكن أن يكون جذرا لكثير حدود وهذا لاحظوه بمحاولة إيجاد هذه الأعداد هندسيا كالجدر التربيعي لإثنين فسموها الأعداد الجبرية.

ونوع ليس كذلك فسموها المتسامية.

لكن السؤال بقي مطروحا أين موقع العدد π بين هذه الأنواع وهل يمكن رسم قطعة مستقيمة طولها بقيمته وهذا ما يعرف بمسألة تربيع الدائرة إذ السؤال الأصلي كان هل يمكن إنشاء مربع بمساحة قرص ؟

أنشأ ذلك مفهوما جديدا وهي الأعداد القابلة للإنشاء أي التي يمكن تمثيلها بطول قطعة مستقيمة بالاستعانة بالمسطرة والفرجار.

فهل جميع الأعداد قابلة للإنشاء ؟

أجاب وينتزل على هذا السؤال بمبرهنته الشهيرة مبرهنة وينتزل والتي تنص على أن الشرط اللازم لقابلية عدد للإنشاء هو ان يكون جذرا لكثير حدود رتبته قوة ل 2 .

وهذا غير مستغرب فالمسطرة والفرجار ننشئ بهما قطعا وزوايا قائمة أي ننشئ بها انطلاقا من قطعة الوحدة تكرارا منته لها سواء بالجمع أو بالتجزئة أو بالجذر التربيعي عن طريق مبرهنة فيثاغورث.

أي ننشئ أعدادا ناطقة وجذورا تربيعية مكررة لها فهذه مقاليب قوى لإثنين.

مبرهنة وينتزل بينت أن الأعداد المتسامية لا يمكن إنشاؤها وكذلك أعداد جبرية كثيرة معها كالجذر التكعيبي ل 2 .

العدد π ينتمي للأعداد المتسامية التي لا يمكن إنشاؤها.

لكن كيف نفسر إمكانية رسم دائرة طولها ضعف العدد π ؟



لو تأملنا الدائرة لوجدناها تكرار غير منته لعلاقة فيثاغورث إذ لو قربناها بقطع مستقيمة لاحتجنا لحساب أطولها لعلاقة فيثاغورث ثم احتجنا المرور للمالانهاية للوصول للدائرة.

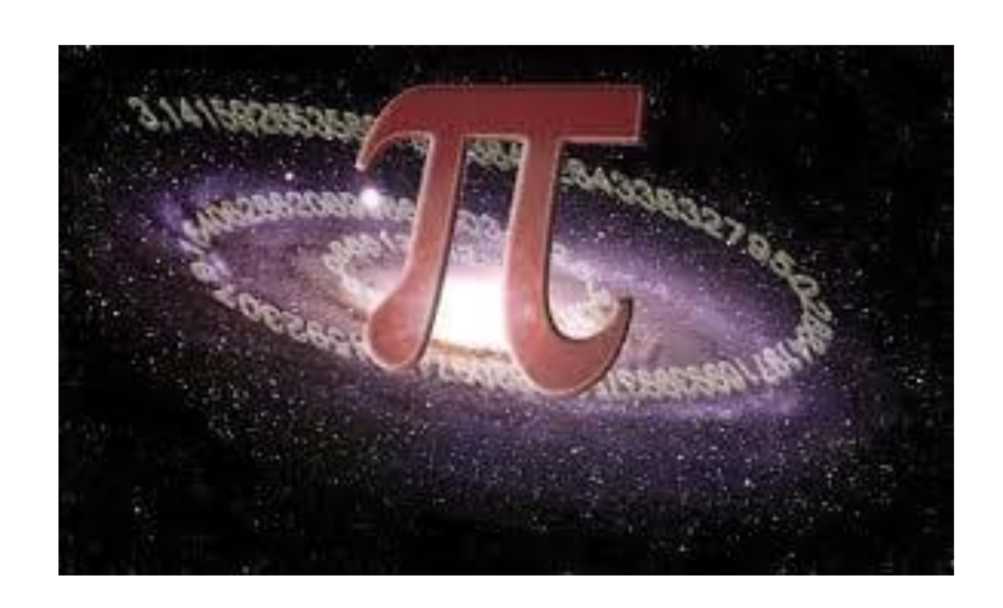
بل لو حسبنا π انطلاقا من تكامل الدالة الجذر التربيعي ل $1 - x^2$ لوجدنا أن مجاميع ريمان ستكتب بمجاميع غير منتهية لجذور تربيعية لأعداد ناطقة.

فالذي نلاحظه هنا أن الأعداد الناطقة كثيفة بين هذه الأعداد الصماء وأن الأعداد الصماء الجبرية منها والمتسامية هي تكرار غير منته لأجزاء ناطقة.

فمفهوم العدد لا يخرج عن التكرار إلا أن هذا التكرار غير المنته متى تصورناه خاليا من الثغرات أنتج لنا مجموعة غزيرة بالعناصر سميناها R أو ما يعرف بالفضاء التام R .

ولعل السؤال يطرح ماذا لو كررنا هذا التكرار بشكل غير منته فهل سنحصل على مجموعة جديدة أكبر من R ؟

فالجواب نعم فهذه المجموعة ما هي إلا مجموعة الدوال الحقيقية ولو قيد التكرار ببعض الخصائص المألوفة فسنجد الفضاءات من نوع L^p .....



لنضبط الرياضيات معا : العددπ

لو سألت الناس عن تعريف العدد π لأجابك أغلبهم بداهة هو قسمة محيط الدائرة على قطرها هذا إن لم يجبك بعضهم أنه 3.14 وأنه ليس لديه قيمة مضبوطة!!!

دعونا نصلح هذه المفاهيم الخاطئة.

كرياضياتي يمكنك أن تسأل : كيف عرفت أن قسمة محيط الدائرة على قطرها تعطي عددا ثابتا حتى سميتها π ؟

هنا سيتلعثم أكثر الناس وستجد أغلبهم يتصور أننا نقيس محيط الدائرة بخيط ثم نقسم على قطره فنحصل على عدد تقريبي ؟؟؟

هذا ليس من الرياضيات في شيء.

يعرف العدد π بطريقتين:

طريقة بورباكي والتي تنطلق من السلاسل لتعريف الدوال المثلثية ثم تعرف π من التشاكل الطبولوجي بين زمرة R الجمعية نحو الزمرة الضربية لدائرة الأعداد المركبة ، لكنها ليست الطريقة المشهورة مع أنها طريقة مضبوطة.

أما الطريقة المشهورة والقديمة فيعرف العدد π بأنه حاصل قسمة محيط الدائرة على طول قطرها.

لكن هذه الطريقة تحتاج أن نبرهن أن هذا الناتج ثابت حتى نطلق عليه إسم π .

ويتم ذلك بعدة طرق أبسطها استعمال مبرهنة طاليس ذلك أن محيط الدائرة هو نهاية مجموع محيط متعدد الأضلاع المرسوم بداخلها لما عدد أضلاعه يؤول للمالانهاية فحسب مبرهنة طاليس هذا المحيط متناسب مع قطره مهما كان طوله فيمكننا تعريف π كنهاية لهذه القسمة والتي لا تتعلق بطول نصف القطر ولا محيط الدائرة إنما بالنسبة بينهما فيمكن تسمية هذه النهاية بـ π وبما أن طول محيط المضلع يؤول لمحيط الدائرة فسنجد أن π هي قسمة محيط الدائرة على قطرها.

مشكلة هذه الطريقة أنها تستدعي هندسة إقليدس والتي لا تقوم على أسس دقيقة ولذلك فضلت مجموعة بورباكي تعريفه من طريق أخرى.

يمكننا كذلك استعمال طريقة أخرى بتعريف π كحاصل قسمة مساحة القرص على نصف قطرها مربع فيمكن أن نبرهن أن هذه القسمة ثابتة عن طريق تكامل الدالة

$$\sqrt{(R^2 - x^2)} = R\sqrt{(1 - (x/R)^2)}$$

بتغيير المتغير سنجد أن المساحة متناسبة مع مربع نصف القطر فهو ثابت يمكننا تسميته بـ π .

أصل هذا التناسب في التكامل وإن كان ظاهره تحليلي يعود لمبرهنة فيثاغورث في المعلم المتعامد والمتجانس والتي تكافئ مبرهنة طاليس وكلاهما يكافئ مسلمة التوازي.



أما عن قول بعضهم أن العدد π ليس له قيمة مضبوطة فهذا خطأ رياضيا فالعدد π معرف جيدا ومضبوط جيدا فله قيمة معروفة.

لكنه كعدد متسام لا يمكن كتابته كعدد عشري أي أرقام كتابته بعد الفاصلة غير منته.

كطرفة نذكر هذه القصة التي وقعت في الولايات المتحدة الأمريكية:

فهل سمعتم بمشروع قانون العدد π في أنديانا بالولايات المتحدة سنة 1897 أين حاول طبيب هاوٍ للرياضيات فرض قيمة للعدد π بالقانون 😂 وذلك أنه ظن انه وجد طريقة لتربيع مساحة القرص باستعمال قيمة خاطئة ل π فحاول فرضها بالقانون وكاد القانون يمر على الغرفة العليا بدون معارضة لولا تدخل أحد المختصين في الرياضيات ليشرح لهم أن الحقائق الرياضية لا تثبت بالقانون 😅😅😅😅😅

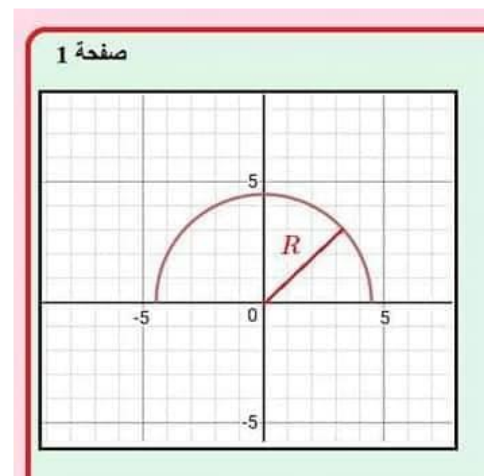
تفضلوا الرابط:

https://fr.m.wikipedia.org/…/Projet_de_loi_pi_de_l…

صفحة 1

برهان علاقة طول الدائرة

عبد الحكيم بن شعبانة



الطريقة الأولى بالتكامل

لنأخذ نصف دائرة ذات نصف قطر R و التي معادلتها

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

طول المنحنى يعطى بالعلاقة

$$L_{a,b} = \int_a^b dL = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\ \ dx$$

نحسب المشتقة للتعويض في التكامل

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}} \Longrightarrow 1 + f'^2(x) = 1 + \frac{x^2}{R^2-x^2} = \frac{R^2}{R^2-x^2}$$

$$L_{-R,R} = \int_{-R}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \int_{-R}^{R} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{R})^2}} dx$$

بتغيير المتغير في التكامل $z = \frac{x}{R}$

$$L_{-R,R} = R \cdot \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\ dz$$

نرمز للتكامل الجديد ب

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\ dz\ = \pi$$

ومنه

$$L_{-R,R} = R \cdot \pi$$

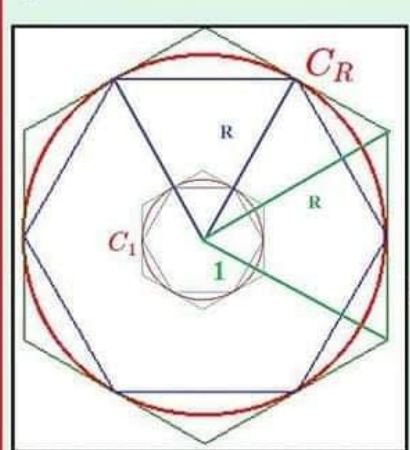
فيكون طول الدائرة C_R ضعف طول نصفها

$$L_{C_R} = 2 \cdot L_{-R,R} = 2 \cdot \pi \cdot R$$

صفحة 2

برهان علاقة طول الدائرة

عبد الحكيم بن شعبانة



الطريقة الثانية بمبرهنة طاليس

لنأخذ دائرتين لهما نفس المركز ، إحداهما نصف قطرها 1 و الأخرى R

ثم نحيط كل منهما بشكل هندسي ذو n ضلع متساوي من الداخل و الخارج

بمبرهنة طاليس لدينا

قسمة طول المضلع الأخضر للدائرة C_R على طول المضلع الأخضر للدائرة C_1 يساوي R تقسيم 1

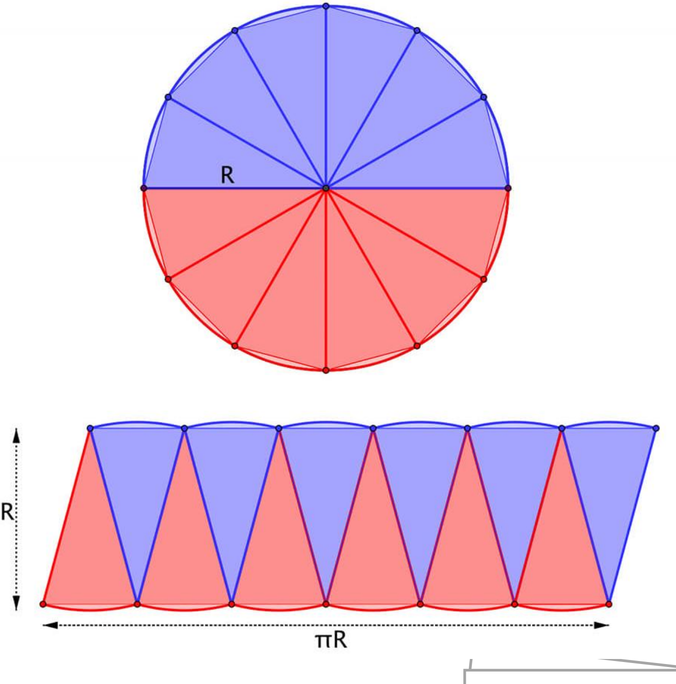
وكذلك قسمة طول المضلع الأحمر للدائرة C_R على طول المضلع الأحمر للدائرة C_1 يساوي R تقسيم 1

وبما أن طول كل دائرة محصورة بين طولي المضلعين المحيط بها و بجعل n ينتهي إلى المالانهاية

نجد أن قسمة طول الدائرة C_R على طول الدائرة C_1 تساوي R أي $L_{C_R} = R \cdot L_{C_1}$

نصطلح على طول نصف الدائرة C_1 ذات نصف القطر 1 الرمز π

فيكون طول الدائرة C_R $\boxed{L_{C_R} = R \cdot L_{C_1} = 2 \cdot \pi \cdot R}$



$$\frac{\pi}{2} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx,$$

- Le groupe Bourbaki propose une autre définition très voisine en démontrant[10] l'existence d'un morphisme de groupes topologiques f de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{U}, \times)$, périodique de période 1, tel que $f(1/4) = i$. Il démontre[11] que f est dérivable et que sa dérivée en 0 est de la forme αi pour un certain réel $\alpha > 0$, qu'il note 2π.



لنتكلم قليلا عن تعريفات العدد π .

تعريف العدد π انطلاقا من قسمة طول الدائرة على قطرها في هندسة إقليدس يُشْكِلُ رياضيا ذلك أن الرياضيات المعاصرة مبنية على نظرية المجموعات ZFC أما هندسة إقليدس ففيها الكثير من التعاريف الحدسية التي لا تتوافق مع هذه النظرية بل تستخدم هندسة إقليدس الطول من غير تعريف.

فإذا أردنا تعريف العدد π على أسس سليمة فلابد من الانطلاق من نظرية المجموعات ZFC وما بني عليها كالمجموعات العددية والدوال والطبولوجيا .

هناك عدة طرق لتعريف العدد π ، منها:

هو ضعف أصغر عدد موجب تنعدم عنده cos وهنا لابد من تعريف cos بالنشر المحدود لا عن طريق الهندسة ويمكن تعريفه كذلك كالجزء الحقيقي لحل مشكلة كوشي التفاضلية.

ويمكننا كذلك استبدال cos بـ sin فيكون π أصغر عدد موجب تنعدم عنده.

كطريقة ثانية يمكن تعريف π باستعمال ضعف مساحة نصف القرص المحدد بالدالة $\sqrt{1-x^2}$

فيكون لدينا $\pi = 2 \int_{[-1,1]} \sqrt{1-x^2}\, dx$

مجموعة بورباكي استعملت التشاكل الطبولوجي f من $(\mathbb{R}, +)$ إلى زمرة دائرة الوحدة العقدية $(\mathbb{U}, \times)$ الذي دوره 1 بحيث $f(1/4) = i$ أي بلغتنا: $f(x) = e^{(2 i x \pi)}$

حيث الدالة الأسية هي الأسية العقدية المعرفة بالسلاسل.

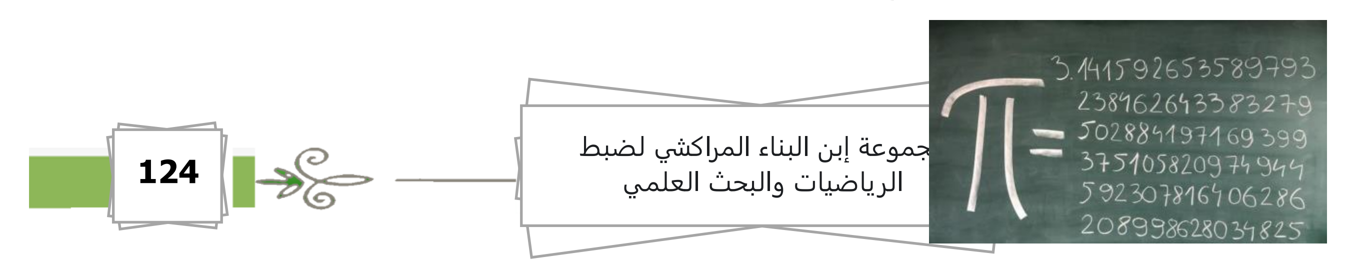
فبرهنوا أن f دالة قابلة للاشتقاق وأن مشتقتها عند الصفر من الشكل $a\, i$ فوضعوا $2\pi = a$

أي بلغتنا $f'(x) = 2 i \pi e^{(2 i x \pi)}, f(0) = 2 i \pi$

كملاحظة هناك من أهل الرياضيات من لا يستعمل الثابت π فيعوضه بـ $\tau = 2\pi$ فيكون تعريفه هو حاصل قسمة طول الدائرة على نصف قطرها. هناك طرق أخرى لتعريف العدد π من بعض السلاسل العددية. تبقى هندسة إقليدس مدخلا جيدا لتلاميذ الثانوي لفهم هذا العدد ودوره في الدوال المثلثية فهي نظرية بين الحدس والمسلمات فتجمع التصور السهل للتلميذ عن طريق الرسم والبرهنة المنطقية عن طريق مسلمات إقليدس والمرور منها للوصول بعقول التلاميذ إلى التجريد لابد منه. يجب أن نشير إلى بناء الرياضيات على أسس سليمة مكن الباحثين من الوصول إلى نتائج غزيرة في الرياضيات في القرن السابق عن طريق الكتابة الشكلية ومازالت هي الطريقة المتبعة اليوم في الميدان العلمي.

لكن يبقى للمفاهيم الدور الأول في صناعة رياضيات المستقبل فالرياضيات قبل أن تكون نتائج منطقية هي الكائنات والمفاهيم التي مكنتنا من الوصول إليها.

فلا يمكن فصل الفهم عن الكتابة الشكلية والبناء المنطقي في الرياضيات لأن الكتابة المنطقية هي مجرد طريقة لتدوين الأفكار لنميز الصحيح من الخاطئ منها عن طريق التجريد.



صناعة R بين المدرسة الحدسية والمدرسة الشكلية،

عندما تجسد المتتاليات الكوشية ليصبح الخيال حقيقية. (نسخة ثانية)

تصور نفسك تمشي في الطريق فإذا أنت ترى جمعا من النمل يمشي نحو وجهة واحدة و كلما تقدمت نحو نفس الوجهة زاد عدد النمل، فالذي يخطر ببالك أن هناك بيتا للنمل في هذه الجهة.

المتتالية الكوشية تعبر عن سلوك لمجموعة من النقاط فهي تعرف بمتتالية تقترب حدودها من بعضها بأي تقريب نريده ابتداء من رتبة أو بالتعريف الإبسيلوني:

$$\forall \xi > 0 , \exists k \in N , \forall n , m > k : |U_n - U_m| < \xi$$

فكلما تقدمت نحو جهة معية تجد قيم المتتالية متقاربة ببعضها أكثر فأكثر، أنت لا تستطيع تحديد مركزها أو حول ماذا هي تتجمع ؟

لكنك تدري أنه كلما تقدمت مع قيمة من المتتالية وجدت باقي القيم التي تأتي بعدها قريبة منها جدا و لو نظرت وراءك لوجدت عددا منته فقط من القيم ، فكل النقاط أمامك.

فكأنك لو أخذت دائرة ثم صغرتها و تقدمت مع المتتالية فستصل إلى نقطة ما بحيث كل ما يأتي بعدها يدخل في دائرتك، فالنقاط تتقارب من بعضها أكثر فأكثر و هنا تقول في نفسك هذه الجمهرة من النقاط لابد أنها تلف حول شيءما ! بل تسميتك لها بجمهرة أعطتها وجودا كشيء واحد.

فكأنه ثقب أسود أنت لا تراه لكن ترى ما حوله من الضوء يذهب نحوه فتسأل نفسك لكن ماذا يوجد هناك، فأنت لا ترى ثقبا لكن كونك يمكنك تعيين الأشياء حوله يجعلك تعطيه وجودا فتسميه باسم الثقب الأسود.

فهذا الذي يحدث في مجموعة الأعداد الناطقة فلو أخذت متتالية كوشية فنظرت إلى أرقام فواصلها فستجدها تثبت كلما تقدمت مع رتبة المتتالية فالعقل البشري يقول :

نعم أنا لا أستطيع إدراك نهاية هذه الأرقام لكن أعلم أن هناك شيئا وراءها فيعطيها اسما فينتج بذلك عدد حقيقي...

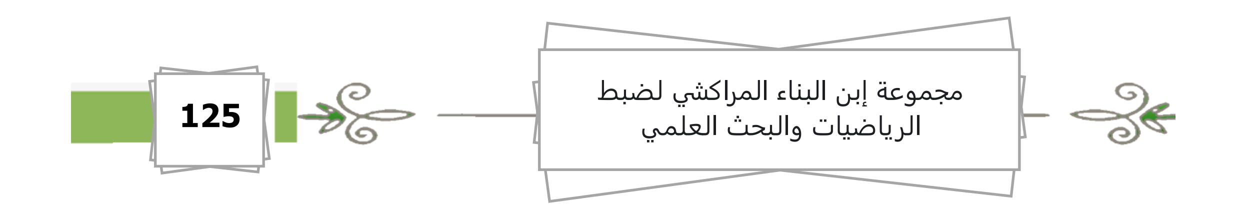
الأعداد الحقيقية ما هي إلا وليدة تصور العقل البشري لما لا يدركه عندما يدرك حدود ما لا يدركه فإما أن يقر بعدم إدراكه لذلك و إما أن يعطيه اسما فيصبح موجودا لأنه عين حدودا له !!!

ألا ترى أنك إذا رأيت طريقا لا تبصر نهايتها تخيلت في ذهنك ماذا يوجد وراءها.

و إذا رأيت بحرا حاولت أن تتخيل ما وراءه ؟

وما هو الظل ؟ أليس غياب النور فجعلنا له وجودا رغم أن أصله عدم فأصله أن أشعة الشمس لا تصل لتلك البقعة لكن لما أمكن لعقلنا تمييز حوافه جعل لما داخله وجودا.

وهنا ندرك أن العقل البشري يميز الأشياء بالخصائص لذلك عندما تنظر للسحب في السماء تتخيل أشكالا مألوفة لأن حوافها تشبه حواف أشياء مألوفة من الواقع.



فالرياضيات تعتمد على هذا فهي تصنع من الخصائص كائنات فما هو العدد 2 إلا خاصية تكرار شيء مع شبيهه وما هي المجموعة الخالية ؟ أليست بكائن صنع من غياب العناصر والغياب من جنس العدم لكن لما أمكن إدراك وجوده كخاصية صنعنا منه كائنا.

وما هي مجموعة الأعداد الطبيعية ؟ أليست قائمة على امكانية مواصلة العد بشكل غير منته رغم أن ذلك غير ممكن لأي بشر منا في الواقع لكن مجرد تصور الإمكانية جعل لها وجودا كخاصية.

وكل ما وجد العقل البشري فراغا ملأه لأن العقل البشري لا يحب المجهول فمتى تصور حدودا للمجهول أعطاه اسما فأصبح معروفا عنده لأنه يعرف الأشياء بحدودها.

العقل البشري قرر أن هذه المتتاليات الكوشية التي تتقارب من بعضها يمكن اعتبارها عددا و إن لم يمكنه إدراكه إلا أنه يستطيع إجراء العمليات عليه من جمع و ضرب بل يجعله هو نفسه كمتتالية لها نهاية .... ليصنع حقلا جديدا تخيليا سماه بحقل الأعداد الحقيقية ... نعم هو تخيلي لأن الكثير من عناصره غير قابلة للحساب ولا للإنشاء.

لكن هل هذا يعطي لكل هذه الأعداد وجودا أو أنه مجرد تصور بشري لعدم حبه للمجهول فملأ هذه الفراغات بوجود ذهني....

هنا تختلف المدارس في الرياضيات فالمدرسة الشكلية والمدرسة الحدسية لا يتفقان على طريقة ملئ الفراغات.

فإن كانت المدرسة الشكلية تعطي وجودا عاما لكل سلسلة أرقام بعد الفاصلة في الكتابة العشرية فتسميها عددا فالمدرسة الحدسية تشترط وجود خوارزمية على أرض الواقع تمكننا من إنتاج سلسلة الأرقام هذه ولا تقبل أي سلسلة فالمدرسة الحدسية تريد وجودا حسابيا ممكنا لا مجرد تسليم بالوجود ذهنيا.

لذلك مجموعة الأعداد الحقيقية في المدرسة الحدسية تختلف عن المعتاد تدريسه من R على المنطق الشكلي فهم لا يقبلون إلا الأعداد القابلة للحساب فمثلا العدد أوميغا غير مقبول في هذه المدرسة.

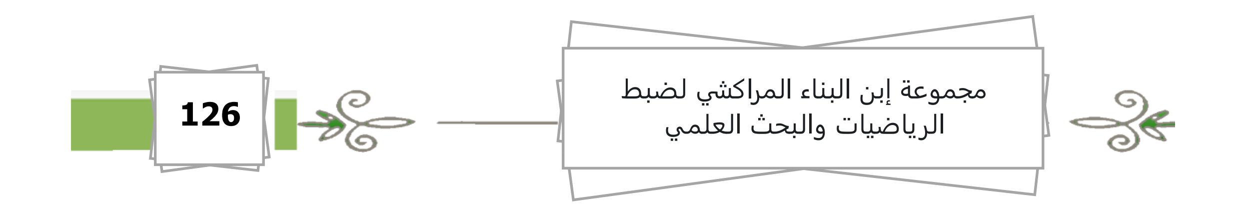
https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Om%C3%A9ga_de_Chaitin

هذا ما يجعل مجموعة الأعداد الحقيقية في R غير قابلة للعد وتامة في المنطق الشكلي ولكنها قابلة للعد وغير تامة في المنطق الحدسي.

لكن ما نتيجة الخلاف بين المدرستين ؟

فالمدرسة الشكلية صنعت رياضيات يمكنها دراسة الدوال وحل المعادلات التفاضلية وإن كانت قائمة على ما لا يمكن حسابه واقعيا لكن يمكن أن تعطي سلوكا للظواهر عند تطبيقها بما يكفي لصناعة نظرية تطبيقية.

أما المدرسة الحدسية فصنعت رياضيات يمكن تطبيقها في علم المعلوماتية والحواسيب.



فلكل مدرسة ثمارها ولعل غدا تظهر مدارس أخرى فما زال العقل البشري غامضا وما يزيده غموضا هو كيفية نظره للواقع لكن الأكيد أنه قادر على تصور ما ليس هو موجود في الواقع أما الواقع فمازال يخبئ لنا الكثير من العجائب.

https://fr.m.wikipedia.org/.../Construction_des_nombres_r...

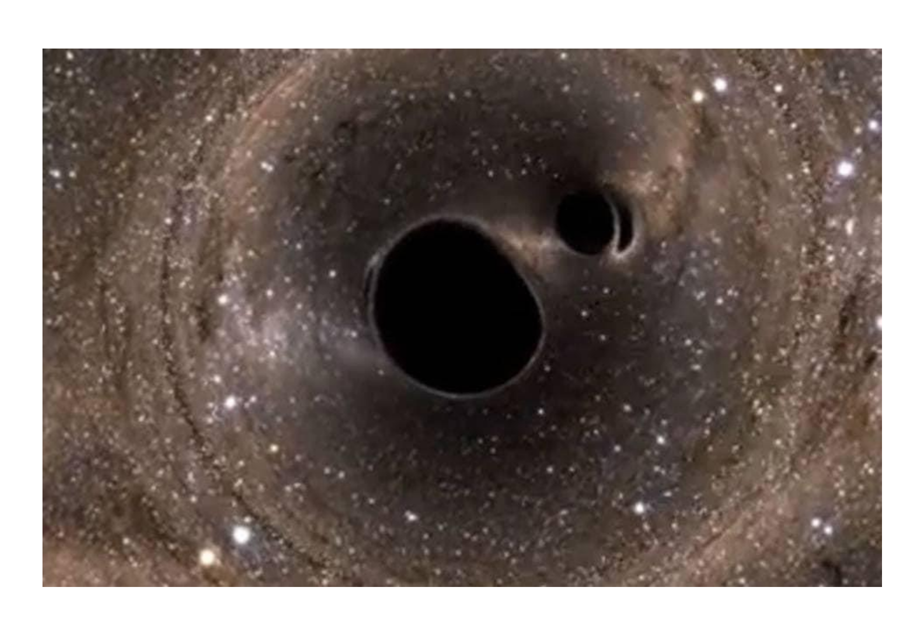
https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Logique_intuitionniste











المتتاليات الكوشية ...عندما يصبح الخيال حقيقية

تصور نفسك تمشي في الطريق فإذا أنت ترى جمعا من النمل يمشي نحو وجهة واحدة و كلما تقدمت نحو نفس الوجهة زاد عدد النمل، فالذي يخطر على بالك أن هناك بيتا للنمل في هذه الجهة.

المتتالية الكوشية تعبر عن سلوك لمجموعة من النقاط فكلما تقدمت نحو جهة معية تجد قيم المتتالية متقاربة ببعضها أكثر فأكثر، أنت لا تستطيع تحديد مركزها، لكنك تدري أنه كلما تقدمت مع قيمة من المتتالية وجدت باقي القيم التي تأتي بعدها قريبة منها جدا و لو نظرت وراءك لوجدت عددا منته من القيم ، فكل النقاط أمامك.

فكأنك لو أخذت دائرة ثم صغرتها و تقدمت مع المتتالية فستصل إلى نقطة ما بحث كل ما يأتي بعدها يدخل في دائرتك، فالنقاط تتقارب من بعضها أكثر فأكثر و هنا تقول هذه الجمهرة من النقاط لابد أنها تلف حول شيء ما.

فكأنه ثقب أسود أنت لا تراه لكن ترى ما حوله من الضوء يذهب نحوه فتسأل نفسك لكن ماذا يوجد هناك، فأنت لا ترى ثقبا لكن كونك يمكنك معرفة وجوده بما حوله يجعلك تعطيه إسم ثقب أسود.

هذا الذي يحدث في مجموعة الأعداد الناطقة فلو أخذت متتالية كوشية فنظرت إلى أرقام فواصلها فستجدها تثبت كلما تقدمت مع رتبة المتتالية فالعقل البشري يقول : نعم أنا لا أستطيع إدراك نهاية هذه الأرقام لكن أعلم أن هناك شيئا وراءها فيعطيها إسما فينتج بذلك عدد حقيقي...

الأعداد الحقيقية ما هي إلا وليدة تصور العقل البشري لما لا يدركه فإما أن يقر بعدم إدراكه و إما أن يعطيه إسما فيصبح موجودا، ألا ترى أنك إذا رأيت طريقا لا تبصر نهايتها تصورت في ذهنك ماذا يوجد وراءها و إذا رأيت بحرا حاولت أن تتخيل ما وراءه، فالعقل البشري لا يحب المجهول لكن متى وجد حدودا للمجهول أعطاه إسما فأصبح معروفا عنده.

العقل البشري قرر أن هذه المتتاليات التي تتقارب من بعضها يمكن اعتبارها كعدد و إن لم يمكنه إدراكه إلا أنه يستطيع إجراء العمليات عليه من جمع و ضرب بل يجعله هو نفسه كمتتالية لها نهاية .... ليصنع حقلا جديدا تخيليا سماه الأعداد الحقيقية...



ما هو التكميم ؟

التلميذ: يا أستاذ ماذا تعني بكلمه (تكميم) ؟

الأستاذ : ما العلاقة بين خمس تفاحات وخمس بيضات ؟

التلميذ : عدد مشابه له

الأستاذ : ما معنى عدد ؟

التلميذ : تكرار

الأستاذ : لكن هل خمس تفاحات هي نفسها ست تفاحات ؟

التلميذ : تختلف

الأستاذ : إذن كيف نفرق بينها ؟

التلميذ : من حيث العدد أو الوزن و ممكن اللون

الأستاذ : لكن كيف عرفت أن خمسة تفاحات ليست هي ستة ؟

التلميذ : بالعدد

الأستاذ : بالعدد او بالتسمية ؟

التلميذ : بالتسميه

الأستاذ : هذا هو التكميم، اعطاء اسم لكل تكرار وهذا ما نصطلح عليه بالعدد ، فالوزن هو تكميم لاننا أعطينا اسما لكل تكرار للكيلوغرام، والطاقة نكممها بالجول، والطول بالمتر وهكذا.

التلميذ : بارك الله فيكم

الأستاذ : وفيكم بارك الله



الأعداد بشكل مبسط : التكرار والتوجيه.

العدد هو تكميم للتكرار أي عندما نقول ثلاثة فنحن نقصد تكرار شيء مع نفسه ونفسه فهذا ما نسميه ثلاثة ونرمز له بـ 3 .

فكل تكرار هو عدد : 0 ،1، 2 .... وهذه التي نسميها الأعداد الطبيعية ونرمز لمجموعتها بـ N .

نلاحظ سريعا أن التكرار إذا ضممناه لبعض بقي تكرار فتكرار شيء مرتين إذا زدنا عليه تكرار ثلاث مرات كان الكل تكرار خمس مرات فهذه عملية الجمع.

إذن العدد يمكن رؤيته كتكميم للتكرار ويمكن أن نجري عليه عمليات.

بل لو كررنا التكرار لأعطى تكرار فتكرار تكرارين ثلاث تكرارات يعطي ستة تكرارات وهذه هي عملية الضرب.

إذا رأينا التكرار مقارنة بالزيادة أو بالنقصان ظهرت الأعداد الصحيحة ف -2 هو تكرار لكن مقارن بالصفر فهو عدد مركب من عددين $(0,2)$

فإذا كان عندنا 4 ثم أصبح عندنا 2 فهنا فقدنا 2 فهذا -2 ولذلك في مفهوم المقارنة $(0,2) = (2,4)$

ومنه نستوحي درجة الحرارة ف -5 تحت الصفر أي فقدنا 5 .

وطابق -2 أي فقدنا طابقين مقارنة بالطابق الأرضي فالفقدان قد يكون معنوي.

لذلك نعبر عن الوجهة بتقدم للأمام وهذا ما نسميه موجب والرجوع للخلف فنسميه سالب.

أو يمين الصفر فيكون موجب ويساره فيكون سالب.

فهذه الأعداد نسميها الأعداد الصحيحة ونرمز لها بـ Z ولو تأملنها جيدا فهي مجموعات من ثنائيات من $N\times N$ تعبر كل مجموعة منها عن عناصر لها نفس الفرق أي نعتبر أن

$$(n ,m) = (a , b) \Leftrightarrow n - m = a - b$$

لكن رياضيا لا يمكن الكلام عن الطرح قبل أن نظهر الأعداد السالبة لأن $n - m$ يمكن أن نراه كإضافة عدد سالب لعدد موجب أي أتقدم بـ n ثم أتأخر بـ m

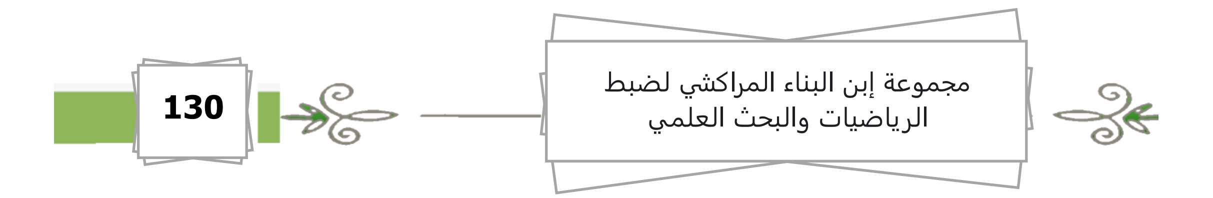
$$0 + n + (-m)$$

هذا لا يشكل فيمكننا أن نكتب: $(n ,m) = (a , b) \Leftrightarrow n + b = a + m$ فهذه الأعداد الصحيحة.

ثم نضيف إليها الأجزاء وتكرارها فتصبح الأعداد الناطقة ذلك أنه كما يمكننا تكرار الشيء فيمكننا تجزئته فالنصف مثلا هو جزء من الشيء إذا كررناه مرتين أصبح الشيء أي الشيء مكون من جزئين متماثلين وكما نرى نحن نقارن جزءً بالكل لذلك نرمز له بـ $1/2$

والخط هنا ليس قسمة كما يظن البعض إنما هو جزء من كتابة أي الجزء مركب من عددين صحيحين

$$1/2 = (1,2)$$



سنلاحظ سريعا أن جزء من جزئين هو كذلك جزئين من أربعة أجزاء أي $(1,2) = (2,4)$

فهذه نسميها الأعداد الناطقة ونرمز لها بـ Q

فالأعداد الناطقة هي كذلك مقارنة على غرار الأعداد الصحيحة Z لكن بالنسبة للضرب لذلك يمكن أن نعرفها كما فعلنا فوق بمجموعات من $Z\times Z^*$

بحيث كل مجموعة تحقق عناصرها $(n,m) = (a,b) \Leftrightarrow n \times b = m \times a$

ونستعمل Z^* لأن الصفر حالته خاصة فجزئين من الصفر يبقى صفر فلا يمكن الكلام عن مقارنة لأجزاء للصفر بالصفر.

نرمز للعدد الناطق بالشكل $n/m = (n,m)$

كل هذه الأعداد نستطيع إجراء عمليات عليها من جمع وضرب.

لكن لتسهيل التعامل معها لابد من تسميتها لذلك اخترع البشر الترميز.

هناك ترميزات عديدة لكن استقر الأمر على أحدها لسهولته ولإمكانية التعامل معه خوارزميا عند الجمع والضرب.

يسمى هذا الترميز الكتابة العشرية نسبة لعشرة.

فالأعداد العشر الأولى يرمز لها: $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$

ثم نجمعها عشرات عشرات فنكتب 10 للتكرار الموالي ل 9 ثم نواصل $11,12....$ أي $11 = 10 +1$

فإذا وصلنا عشرتين نكتب 2 في الخانة الثانية على اليسار $20 = 10+10$ ونواصل $21,22$

وهكذا فإذا أكملنا عشر عشرات زدنا رتبة وهذا ما نسميه المئات....

فرياضيا نحن نكتب العدد عن طريق قوى ل 10 أي

$$6234 = 6\times10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

هذا يصلح في الأعداد الصحيحة لكن ماذا عن الناطقة ؟

فكما كتبنا العدد بجمع التكرارات حسب عشرة فيمكننا كتابة التجزئة بعشرة نحو

$$45/4 = 1 \times10 + 1 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

فهنا كما تظهر قوى لعشرة ستظهر أجزاء لقوى لعشرة ولكتابة الأجزاء نقوم بالعملية العكسية السابقة لكن عن اليمين مع فاصل بين قوى عشرة وأجزاء قوى عشرة أي $45/4 = 11.25$ نلاحظ سريعا أن هناك أعداد ناطقة لا يمكننا كتابتها هكذا مثل $1/3$

فعند تجزئتها لقوى عشرة سنجد العملية غير منتهية أي $1/3 = 3\times10^{-1}+3\times10^{-2}+....$

فنسمي الأعداد التي كتابتها العشرية منتهية بالأعداد العشرية ونرمز لها بـ D

فهذه المجموعة جزء من Q وتشمل N نلاحظ أن مجموع أو ضرب عددين عشريين يبقى عشري.

أما الأعداد الناطقة غير العشرية فكتاباها غير منتهية.



نلاحظ عند التدقيق أنها رغم أن كتابتها غير منتهية فتبقى دورية ابتداء من رتبة مثل

0.3333...

0.989898...

0.345687687687687....

فهناك سلسلة أرقام تتكرر بشكل لا نهائي ابتداء من رتبة.

لكن ماذا لو كتبنا عددا هكذا لكن ليس فيه تكرار دوري ؟.....

0.1038476152883....

هنا تظهر لنا أعدادا جديدة فلو نظرنا للكتابة العشرية للأعداد الناطقة كمجاميع لأجزاء تتناهى في الصغر فهذه الأعداد الجديدة قسم منها أي نحن ننظر للتكرار بشكل غير منته وهنا صنعنا الأعداد الحقيقية.

لكن ليس كل تكرار غير منته يعطينا هذا فلدينا 1+1+1.... لا يمكن أن نعتبره قيمة عددية فهو غير محدود.

إذن هناك تكرارات لا نهائية محدودة يمكننا أن نعتبرها أعدادا وهنا نحتاج لتعريف النهاية ومفهوم التقارب.... نسمي هذه الأعداد بـ بالأعداد الحقيقية ونرمز لها بـ R .

صناعتها تستدعي تعريف المتتاليات ونهاياتها.

فعدد حقيقي هو في الحقيقة مجموع من Q^N فهو عدد ناطق مكرر بشكل غير منته.

نلاحظ في المجموعات العددية أننا نصنع مجموعة من مجموعة ولو واصلنا لصنعنا مجموعة الأعداد المركبة C على نفس طريقة Z من R ففي Z نظرنا للعدد كزيادة ونقصان أمام وخلف أو يمين ويسار الصفر فكان الانتقال من اليمين لليسار أو من اليسار لليمين هو انتقال من موجب لسالب أو سالب لموجب عن طريق الضرب في 1- .

$$-1 \times -1 = 1$$

لكن في الواقع لنقوم بهذا الانتقال جسديا لابد من الدوران نصف دورة كاملة لكن ماذا لو توقفنا في ربع دورة ؟

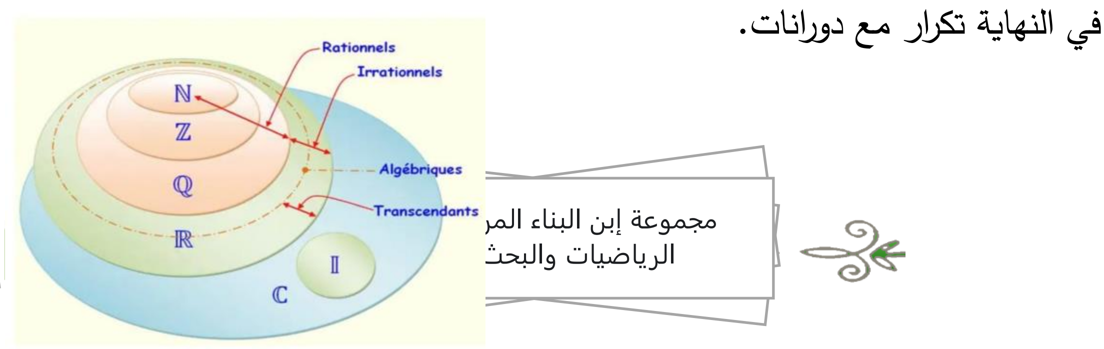
هنا سنصنع عددا جديدا تخيليا نسميه i

وهو يوافق ربع دورة فإذا ضربناه في نفسه أي ربع دورة مع ربع دورة نجد نصف دورة أي 1- .

فقد صنعنا هنا مجموعة الأعداد المركبة C وهي أعداد مكونة من عددين R^2

عدد يوافق الأعداد الحقيقية وآخر يوافق تكرار العدد التخيلي i أي $x + i y , (x,y) \in R^2$

يمكننا مواصلة التصور في أبعاد فضائية أكبر من 2 بتخيل عدد جديد j فسنصنع مجموعة من $C^2 = R^4$ فيها عددان تخيليان i و j نسميها الرباعيات ويمكننا كذلك صناعة الثمانيات R^8 فالأعداد في النهاية تكرار مع دورانات.



المجموعات العددية من N نحو C (نسخة ثانية معدلة).

حكاية الأعداد بدأت من قديم الزمان إذ لاحظ البشر إمكانية تكميم تكرار الأشياء عن طريق مقابلتها بأصابعهم أو أحجار أو كتابة بخطوط مسامير كعند البابليين.

لكن الرياضيات علم ضبط لا تكتفي بمراقبة الواقع بل تطلب تجريده وبناءه على مسلمات سهلة لا تتناقض.

استغرق نضج مفهوم الأعداد عند البشر أكثر من ثلاثين قرنا فكان لابد المرور بمراحل عديدة للوصول لمفهوم المجموعات العددية كما نراه اليوم فبعد الكتابات الجزئية مرت البشرية بالهندسة لمقابلة الأعداد بالأقيسة ثم جاء العرب فوضعوا الجبر وعلم الأعداد الطبيعية والناطقة ثم الصماء ثم قامت الحضارة الغربية بإضافة الأعداد المتسامية ثم العقدية.

ثم قام الرياضياتيون بصياغة كل ما سبق على نظرية المجموعات.

بداية صناعة المجموعات على مسلمات متينة كان بظهور نظرية المجموعات ZFC بعد أزمة الأساسيات في بداية القرن العشرين.

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9orie_des_ensembles...

وهذا مقال يتحدث عن ظهور ذلك تاريخيا:

https://m.facebook.com/groups/1821825877897150/permalink/2359193200827079/

نظرية المجموعات ZFC جاءت لتقضي على متناقضة شهيرة وهي متناقضة راسل والتي تقول أن مجموعة كل المجموعات غير موجودة.

هذه المتناقضة تظهر في نظرية المجموعات الساذجة والتي تظن أن كل قضية يمكنها صناعة مجموعة بلا قيود كقولنا هل مجموعة المجموعات الأحادية موجودة ؟

فلو كانت موجودة ولنسمها M فعلى هذا هي تشمل المجموعة الأحادية {M}

والتي تشمل نفسها وهذا تناقض فكيف يمكن لمجموعة أن تشمل نفسها فهل M سابقة الوجود عن {M}

أو عناصر M سابقة الوجود عن M ومنه {M} موجودة قبلM ؟

في كلا الحالتين بناء M يحتاج ل M فلا يمكنها أن تكون موجودة.

نظرية المجموعات ZFC جاءت لمنع هذه القضايا فلا يمكن لمجموعة أن توجد إلا عن طريق بنائها انطلاقا من المجموعة الخالية وباستعمال مسلمات بسيطة كالتمييز

$\{\varnothing\}$

والتركيب المتمثل في الإتحاد

$\{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing , \{\varnothing\}\}$

فبهذه الطريقة يمكننا صناعة مجموعات بأي عدد منته من العناصر نريد وذلك بإضافة العناصر عنصرا عنصرا فإذا أردناها مجموعة قابلة للعد يكفي أن نسلم بالمالانهاية أي يمكننا مواصلة الإضافة بغير إنتهاء



لكن يبقى المشكل في المجموعات العددية وأولها N كيف نعطي مفهوما للأعداد كالعدد واحد ؟

هل هو مجموعة بعنصر واحد كهذا $\{\emptyset\}$ أو كهذا $\{\{\emptyset\}\}$

نحن نعلم أنه ليست المجموعة بعنصر وحيد هي ذاتها العدد 1 لكن هو خاصية وجود العنصر بلا مثيل له.

التفكير الساذج يقودنا للقول لما لا نضع كل هذه المجموعات ذات العنصر الوحيد في مجموعة ونقول أن الواحد هي الخاصية التي تجمعها لكن هذا تناقض كما لاحظنا فوق فهذه المجموعة غير موجودة لأنها نفسها كمجموعة أحادية لابد أن تنتمي لنفسها وهذا تناقض.

الرياضيات حلت هذا المشكل باختيار ممثل عن كل عدد فنمثل للصفر بـ $\emptyset = 0$

ثم نختار ممثلا عن 1 بـ $\{\emptyset\} = 1$

ثم ممثل عن 2 بـ $\{\emptyset,\{\emptyset\}\} = 2$

ثم ممثل عن 3 بـ $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\} = 3$

وبمواصلة هذه الطريقة نتحصل على المجموعة N ثم يكفي تعريف عمليتي الجمع والضرب عليها.

لكن كيف نتحصل على المجموعة Z ؟ فنحن نلاحظ أنه يمكننا في الواقع القيام بعمليات طرح كالتالي:

$8 - 5 = 3$

$9 - 5 = 4$

صناعة مجموعة انطلاقا من خصائص في مجموعة سهل في نظرية المجموعات إذ يكفي لاعطاء وجود لهذه الخصائص تعريف علاقة تكافؤ فنجمع بها كل عنصر مع مثيله داخل مجموعة صنف تكافؤ.

كل صنف يمثل الخاصية المشتركة بين عناصره.

فنحن نلاحظ أن

$8 - 5 = 3$

$9 - 5 = 4$

لكن الطرح غير موجود في N فهي عملية جمع مع النظير لكن يمكننا رؤيتها من حيث الجمع

$8 = 5 + 3$

$9 = 5 + 4$

وهنا نلاحظ أن العدد 5- في الواقع ممثل بثنائية

$(3,8) : 3 - 8 = -5$

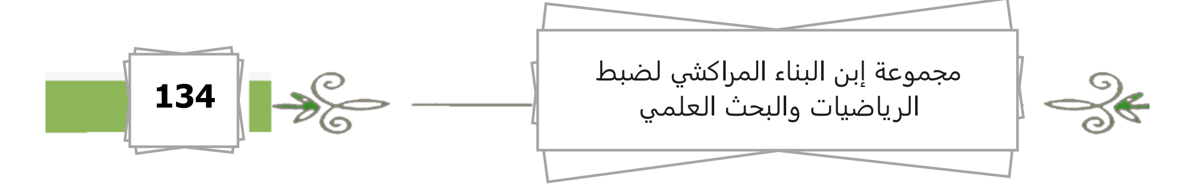
أو

$(4,9) : 4 - 9 = -5$

فيكفي إذن أن نعرف علاقة تكافؤ على N^2 : $(m, n) \sim (j,k) \Leftrightarrow m + k = n + j$

فهذه العلاقة كفيلة بإظهار أي عدد موجب وسالب بل نلاحظ أن $(5,0) + (0,5) = (5,5)$

وهذا ممثل عن الصفر إذ $(5,5) \sim (0,0)$ فإنطلاقا من نظرية المجموعات ZF استطعنا إعطاء مفهوم للأعداد السالبة وصنعنا مجموعة Z من N^2 ف Z هي مجموعة أصناف التكافؤ $N^2/\sim$



لكن لماذا ليس ZFC ؟ لأن C هي مسلمة الاختيار ولم نحتجها هنا بقوتها على المجموعات غير القابلة للعد.

قد يقول القائل ما علاقة Z واقعيا بجداء ديكارتي N^2 ؟ والجواب ماهو 5- في الواقع ؟

أليس هو مجرد مقارنة 5 بالصفر، أليس نقول درجة الحرارة هي 5- تحت الصفر ؟

ففي الحقيقة الأعداد السالبة هي مقارنة بين عددين ولذلك بالضبط عرفنا 5- بصنف تكافؤ ثنائيات ك
(3,8) ,(4,9),(5,10) ....

إذن Z ما هي إلا نظرتنا ل N من ناحيتين فوق الصفر وتحت الصفر

فهي جداء ديكارتي $N \times (1, -1)$ أو بالتمثيل $+5, -5$ أليست أعداد مع إشارة ؟ فهذه ثنائيات.

لكن ماذا عن الأعداد الناطقة ؟

ما قمنا به مع Z من حيث الجمع والطرح إنطلاقا من N يمكننا القيام به مع Q بالضرب والقسمة إنطلاقا من Z فالعدد نصف $1/2$ ما هو إلا الثنائية $(1,2)$ أو $(2,4)$ وعموما يمكننا تعريف علاقة تكافؤ على Z : $(n,m) \sim (j,k) \Leftrightarrow n * k = m * j$

ثم انطلاقا من مجموعة أصناف التكافؤ نصنع Q أي $Q = Z^2/\sim$ لكن كيف نصنع R ؟

مجموعة الأعداد الحقيقية لها مفهوم طبولوجي فهي تصنع عن طريق المتتاليات الكوشية والمتتاليات الكوشية يمكننا رؤيتها كمجموعة جزئية من الجداء ديكارتي قابل للعد ل Q : $Q^N = Q \times Q \times \ldots$

على المتتاليات الكوشية نعرف علاقة تكافؤ $(U_n) \sim (V_n) \Leftrightarrow \lim U_n - V_n = 0$

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Cauchy

فنلاحظ أننا وضعنا المتتاليات الكوشية المتقاربة فيما بينها في مجموعة واحدة وكأنها ممثلة عن عدد جديد نسميه العدد الحقيقي كما نلاحظ أن علاقة التكافؤ هنا تعريفها طبولوجي.

أليس العدد الحقيقي مجرد كتابة عشرية غير منتهية فهو متتالية ارقام:
3,141 592 653 589 793 ....

ف R ما هي إلا أصناف تكافؤ المتتاليات الكوشية من Q^N

وكأننا نقول أن المتتاليات الكوشية التي يؤول فرقها نحو الصفر هي تقترب فيما بينها وكأنها تدور حول فراغ يمكننا تسميته عدد حقيقي.

لكن تعريف عمليات جبرية على مجموعة أصناف التكافؤ هذه يحتاج لمسلمة الاختيار إذ عددها غير قابل للعد وأخذ ممثل من كل صنف تكافؤ لتعريف عمليات بسيطة كالجمع $U_n + V_n$

مع بساطته لابد له من مسلمة الاختيار لذلك صناعة R تحتاج لنظرية المجموعات ZFC

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Axiome_du_choix



إذا أردنا الآن صناعة C فنحتاج لتعريف جبري وذلك بإضافة العدد التخيلي i عن طريق تعريف حقل جديد على R^2 وتعريف عمليتين داخليتين:

$$(x , y) + (a , b) = (x + a , y + b)$$
$$(x , y) * (a , b) = (x*a - y*b , x*b + y*a)$$

والتي تنتج لنا الحقل C ذلك أن $(x ,y) = (x, 0) + (0 , 1) (y, 0)$

و $(0 , 1) * (0 , 1) = (-1 , 0)$

فيمكننا وضع $i = (0 , 1)$ ووضع $(x , 0) = x$ فتصبح كل الأعداد في الحقل R^2 المزود بالعمليتين السابقتين تكتب بالشكل $(x , y) = x + i y$ إذن صناعة C تتم بطريقة جبرية بل في الحقيقة صناعة العدد التخيلي i لا تحتاج ل R بل يمكن صناعته جبريا من Q عن طريق تمديدها فكثير الحدود X^2+1 ناطق.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Extension_alg%C3%A9brique

https://fr.m.wikipedia.org/.../Corps_alg%C3%A9briquement...

أما صناعة N و Z و Q فبطريقة مجموعاتية مع إضافة عمليات جبرية أما R فبطريقة مجموعاتية طبولوجية .

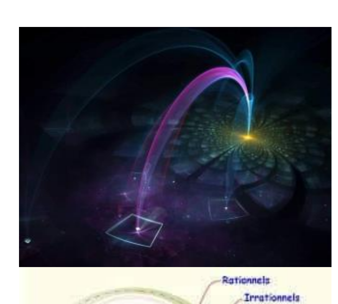
انطلاقا من الحقلين R و C يمكننا المواصلة لصناعة حلقات أخرى كحلقة كثيرات الحدود R[X] , C[X] وصناعات فضاءات شعاعية سواء بأبعاد منتهية ك R^n و C^n أو غير منتهية كفضاء الدوال والمتتاليات.

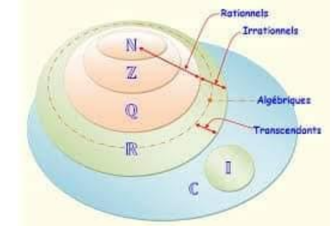
أو صناعة مجموعات عددية كالرباعيات والثمانيات.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Quaternion

ويمكننا مزج كل هذا مع الطبولوجيا فنصنع الفضاءات النظيمية كفضاء الدوال المستمرة وفضاءات هلبرت.

يمكننا القول أن الرياضيات المعاصرة قائمة على نظرية المجموعات ZFC .









طريقة تعميم المثال المضاد

هل يوجد بين R و حقل الأعداد الجبرية الحقيقية A حقول منتهية البعد على A ؟

الاستعانة بالتمثيل من الأمور المهمة في الرياضيات بل ينصح بها متى كان الأمر ممكنا.

منشورنا اليوم عن طريقة المرور من مثال خاص وهو من نوع المثال المضاد إلى تعميم رياضي.

هل يوجد بين R و حقل الأعداد الجبرية الحقيقية A حقول منتهية البعد على A ؟

نحن نعلم أن حقل الأعداد الجبرية الحقيقية يشمل كل الجذور الحقيقية لكثيرات الحدود الناطقة (أو الصحيحة فهي تعطي نفس الجذور)

ملاحظة : هذا الحقل ليس بغلق جبري لأنه يحتاج لباقي الجذور العقدية ليصبح كذلك.

فإذا أردنا مثالا على حقل أكبر منه يمكننا أن نوسعه بعدد متسام مثلا وليكن العدد e فسنصنع الحقل $A[e]$

لنحاول النظر لعناصر هذا الحقل.

بما أنه حقل فلابد أنه يشمل: $e , e^2, e^3, ... , e^n, ...$

فالسؤال المطروح هل بعده كفضاء شعاعي على A منه ؟ وهنا الذي يلفت انتباهنا أمور:

أن المجموعة المكونة من e^n غير منتهية

أنها تشبه حدود من نوع x^n

وأن البعد المنته إذا رمزنا له بـ m يقتضي الارتباط الخطي لـ$e^0, e , e^2, e^3, ... , e^m$

لأن عددها أكبر من m أي وجود معاملات من A غير معدومة جميعا يتحقق معها:

$$a_m e^m + ... + a_1 e + a_0 e^0 = 0$$

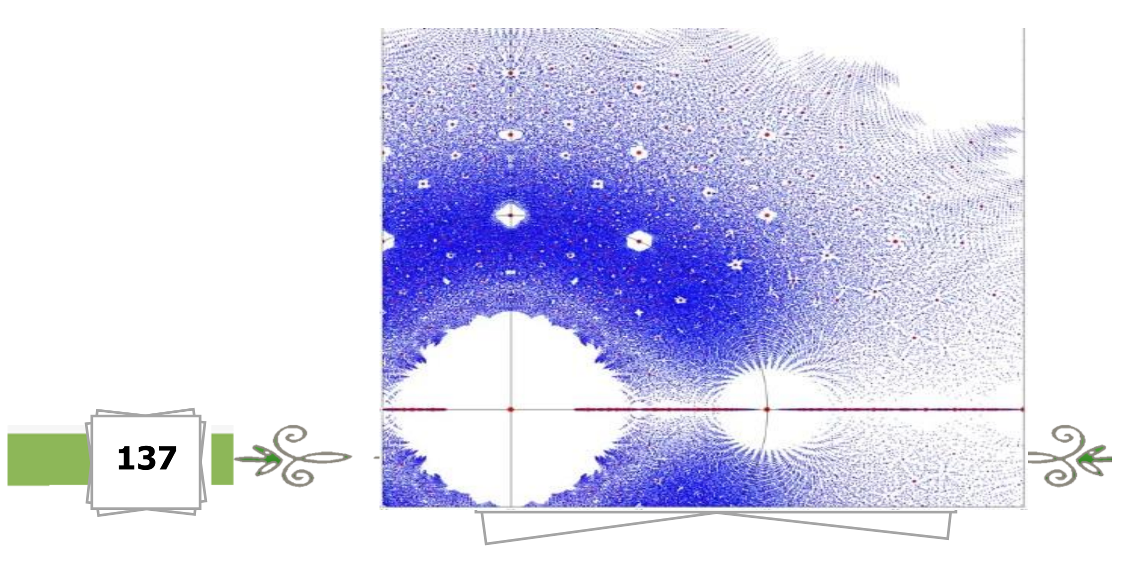
وهذا ما يعني إلا أن e جذر لكثير الحدود غير المعدود $P(x) = a_m x^m + ... + a_1 x + a_0$

لكن A هو حقل الأعداد الجبرية فكون e جذرا لكثير حدود معاملاته جبرية يعني أنه جبري كذلك وهذا نعلم استحالته لكونه متسام.

فالحقل $A[e]$ غير منته البعد على A بسبب كون e متسام.

لو تأملنا هذه النتيجة سندرك أن ما كتب لا يقتصر على العدد e بل هو مشترك في جميع الأعداد المتسامية فيمكننا أن نعمم ونقول لا يوجد حقل يشمل A منته البعد فكل توسعات A غير منتهية الأبعاد.

هذه النتيجة غير صحيحة على Q مثلا فيمكن توسعة Q لحقول منتهية الأبعاد مثل $Q[\sqrt{2}]$



القيمة المطلقة هل هي عملية حسابية أم خاصية عددية ؟ مفهوم بسيط ظُلم في شرحه.

القيمة المطلقة من المفاهيم الرياضية التي يراها التلميذ في الأطوار الأولى من الدراسة ورغم بساطتها إلا أنها كمثلها من المفاهيم لا تعطى حقها من الشرح لذلك أحببت أن أتطرق بهذا المنشور لمفهومها وتعريفها وبعض ما يدور حولها وتوجيه الأساتذة نحو المتعارف عليه في المجتمع الرياضي حول هذا الموضوع.

سنتطرق للأمور التالية:

1- تعريف القيمة المطلقة المتعارف عليه رياضيا

2- المفهوم الحدسي للقيمة المطلقة في ظل السياق التاريخي لتطورها مع نظرة تاريخية سريعة لمفهوم القيمة المطلقة عند كوشي

3- العلاقة بين المفهوم الحدسي والتجريد الرياضي

4- هل يمكن تغيير التعريف الموجه للتلميذ

5- لماذا شوه التعريف الموجه للتلميذ وما فائدة تدريس القيمة المطلقة له

6- التعميمات الممكنة لمفهوم القيمة المطلقة

1- تعريف القيمة المطلقة

ببحث سريع في المراجع عن تعريف القيمة المطلقة نجد:

من أجل كل عدد حقيقي x نعرف القيمة المطلقة له والتي نرمز لها بـ $|x|$ كالتالي:

$$|x| = x \,,\; x > 0$$
$$|x| = -x \,,\; x < 0$$
$$|x| = 0 \,,\; x = 0$$

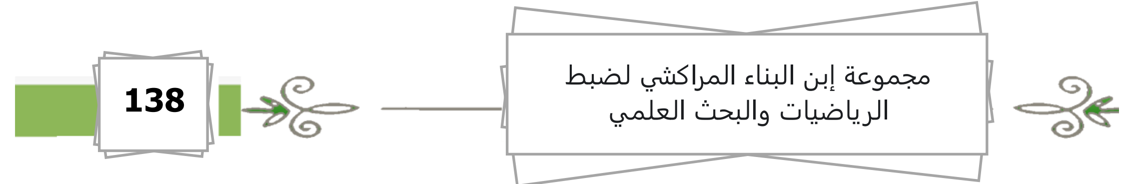
ويمكن أن نلاحظ مباشرة أنها دالة حقيقية من R نحو R^+ هناك من يجمع حالة الصفر مع الحالة الموجبة تماما وهناك من يصيغ التعريف بشكل آخر $|x| = \max(x,-x)$ والذي يعود كذلك للترتيب بالإشارة.

2- المفهوم الحدسي للقيمة المطلقة في ظل السياق التاريخي لتطورها مع نظرة تاريخية سريعة لمفهوم القيمة المطلقة عند كوشي

من حيث السياق التاريخي ظهور القيمة المطلقة كتعريف متأخر جدا (أقل من قرن ونصف) رغم أن المفهوم كان موجودا حدسيا لكنه مرتبط بالأعداد الموجبة والسالبة ولذلك يجب علينا طرح السؤال التالي:

القيمة المطلقة هل هي عملية حسابية أم خاصية عددية ؟

هل هي مسافة ؟




الجواب ليس بالضبط، نصنع بها المسافة نعم لكنها كمفهوم هي شيء أقوى منها لأن المسافة متعلقة بكائنين وليس هذا هو حال القيمة المطلقة.

القيمة المطلقة خاصية في الكائن نفسه فهي في العدد تعبر عن كميته كعدد لا ككميته من منظور المقارنة مع غيره أي هي من تركيباته وحتى أعطيكم التصور كاملا فالقيمة المطلقة في الأشعة هي طويلتها ... نعم هي الطول نفسه وليست المسافة فهي جزء من الكائن مكون به ولنرى ذلك لنبدأ من البداية.

كيف صنعنا الأعداد ؟

صناعة الأعداد بدأت من الواحد فقمنا بتكراره للحصول على الأعداد الطبيعية فإلى هذا الحد المسألة سهلة ولا نرى شيئا في كتابة عدد مثل 5 يختلف عن كمية تكرار لخمس مرات فهما مفهوم واحد.

وحتى من حيث العمليات عندك خمس موزات فأكلت منها ثلاث بقي إثنتان فالعدد الطبيعي يمثل خاصية واحدة هي التكرار.

وحتى من حيث عملية الضرب خمس خمس موزات هي خمس وعشرين موزة فتبقى عملية تكرار .

لكن العقل البشري مر من هنا ورأى أن الذي كنا نراه كخاصية واحدة يمكن تمثيله هندسيا بقطع مستقيمة ورأى أن ذلك يوافق عمليات أخرى منها القسمة مع التجزئة.

فما كان لا يقبل القسمة في مجموعة الأعداد الطبيعية كإثنان قسمة ثلاثة أصبح ممكنا هندسيا وهو يوافق الواقع في عمليات أكثر تعقيدا من مجرد تكرار أشياء وهي عملية القياس فقسمة قرص على ثلاث ممكنة وإن كان واحدا.

ساعدت الهندسة في تطوير الأعداد خاصة الناطقة منها لكنها لم تكن تعتبر أعدادا إلى أن جاء العرب فجعلوها كغيرها وأضافوا لها الأعداد الجبرية.

لكن بقيت خاصية العدد كعدد خاصية تكرار وإن كانت توافق الطول في الهندسة إلى أن ظهرت الأعداد السالبة وهنا كان لابد أن يعطى لها معنى فهي ليست مجرد عمليات حسابية لكن كيف يعطى لها معنى ؟

كيف يمكن أن يقبل عقل البشر العدد السالب وعملياته وهو يعلم أنه إن كان عنده خمس موزات فهو لا يستطيع أكل سبعة منها...

فكان ولابد من مراجعة مفهوم العدد وخاصة الأعداد الطبيعية وتعميمه فأضفنا له مفهوم الإشارة وهي الوجهة فأصبح العدد الطبيعي ليس مجرد خاصية تكرار بل أصبح تكرار موجه أو ما نسميه بمفهوم الشعاع فصنعنا بذلك مجموعة الأعداد الصحيحة Z وذلك بكمية مع وجهة.

فما كان موجها فوق الصفر سميناه اصطلاحا موجبا وما كان موجها تحته سميناه سالبا.

ولذلك عند صناعة Z نستعمل أصناف تكافؤ على $N\times N$ وفي الحقيقة الأعداد هي

$$1 = (1,0) = +1$$
$$-1 = (0,1) = -1$$



تاريخ الأعداد احتاج حوالي عشرين قرنا لإظهار تعريف القيمة المطلقة والتي لم تظهر فعليا إلا بظهور الإشارة ورغم ذلك استغرق الأمر قرونا بعد الإشارة لبلورة هذا المفهوم.

يقول كوشي سنة 1821 في دروسه:

سنأخذ دائمًا تسمية الأعداد بمعناها المستعمل في الحسابيات ، من خلال صناعة الأعداد بالقياس المحض للمقادير ،

ولن نطبق تسمية الكميات إلا على الكميات الحقيقية الموجبة أو السالبة ، أي الأعداد المسبوقة بالإشارة + أو- .

بالإضافة إلى ذلك ، سوف ننظر للكميات بأنها موجهة للتعبير عن التزايد أو التناقص، بحيث يتم تمثيل مقدار معين بواسطة عدد. أه

نلاحظ أن كوشي يحاول في شرحه التفريق بين العدد والكمية لكن لابد أن نفهم لغته في عصره فالعدد في عصره غير المجموعات العددية ببنياها الجبرية المعروفة اليوم إنما هو يوافق الكمية المطلقة فإذا أضيفت له الإشارة أصبح العدد الجبري المعروف اليوم وهو يوافق الكميات الفيزيائية المقاسة بإشارتها الزائد والناقص.

ولذلك يواصل كوشي في كلامه السابق قائلا:

سوف نطلق على القيمة الرقمية للكمية" (valeur numérique) العدد الذي يمثل قاعدتها"، وعلى الكميات المتساوية تلك التي لها نفس الإشارة بنفس القيمة الرقمية ، والكميات المعاكسة كميتين متساويتين من حيث قيمتهما الرقمية، لكنهما بإشارتين متعاكستين. أه

يقوم كوشي كذلك في دروسه عند التطرق للأعداد المركبة للإشارة للعلاقة بين طويلة العدد المركب والقيمة الرقمية.

يجب انتظار جوردان سنة 1898 أين تمت الصناعة الكاملة لدالة القيمة المطلقة وذلك لاهتمامه بقياسه الذي يمثل الطول والمساحة.

إذن الكتابتين

مجموعة الأعداد الحقيقية $|x| , x \in R$

مجموعة الأعداد المركبة $|z| , z \in C$

لهما نفس المعنى فهي كمية العدد وهي شيء فيه أصالة من بنائه لا يحتاج لغيره لاظهاره.

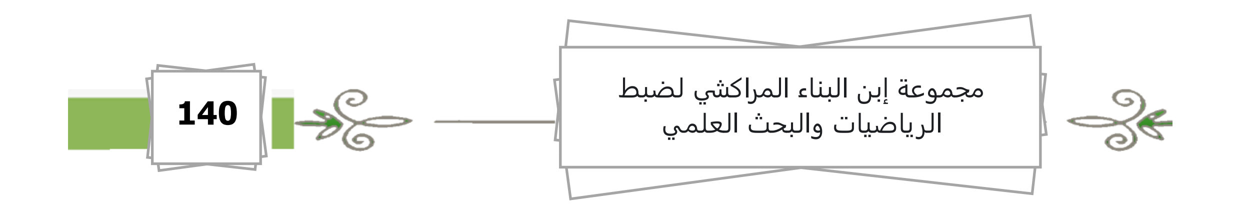
ولذلك كيفما كانت قاعدة الفضاء الشعاعي فإن طويلة الشعاع لا تتغير ما دمنا نقيس بنفس الوحدة.

3العلاقة بين المفهوم الحدسي والتجريد الرياضي

إذن القيمة المطلقة هي تلك الخاصية الأصلية في العدد التي تمثل كمية تكراره فرياضيا

$|+1| = 1$

$|-1| = 1$



قد يقول أحد لكن لدينا $|+1| = 1 = +1$

فالجواب هذه الكتابة صحيحة رياضيا لكن يجب فهم كل من المساوتين فالأولى $|+1| = 1$

تمثل مساواة بالتعريف كخاصية أصلية في تركيبة العدد $+1$ داخل Z أما $1 = +1$

فهي مساواة بالتماثل الجبري عن طريق غمس N في Z أي هي $1 = (1,0)$

فمن ناحية المفهوم هما مختلفتان.

إن كان الأمر سهلا لمعرفة القيمة المطلقة ل -5 مثلا بتجريده من الإشارة فكيف نفعل مع x متغير ؟

بل حتى التلميذ تضع له $|-x|$ يخطئ ويكتبها $|-x| = x$ قياسا على $|-5| = 5$

الرياضيات أعطت الجواب بتعريف القيمة المطلقة بطريقة مجردة وذلك أننا في حلقة نعرف على الأقل عنصرين الصفر والواحد ونعلم أنه $|1| = 1$

فهذا هو الأصل ومن 1 صنعنا الأعداد الأخرى بتكراره ثم أضفنا لها النظائر ك -1

فنحن نعلم أن ما كررناه من 1 هو الأصل فسميناه موجبا ومنه كتبنا إذا كان n غير معدوم $n > 0$

وما أضفناه كنظير هو من الناحية الأخرى فكتبنا $-n < 0$

لذلك عرفنا القيمة المطلقة بهذا الشكل في R

من أجل كل عدد حقيقي x نعرف القيمة المطلقة له والتي نرمز لها بـ $|x|$ كالتالي:

$$|x| = x \, , \, x > 0$$
$$|x| = -x \, , \, x < 0$$
$$|x| = 0 \, , \, x = 0$$

فهذه العمليات تبعت طريقة بناء R

ولهذا نتكلم عن اليمين واليسار لكن للتخلص من الذوق البشري جعلنا اليمين هو موضع العدد 1 بالنسبة للصفر واليسار الجهة الأخرى.

هذه الطريقة هي التي مكنتنا من الربط بين المفهوم الحدسي والتعريف الرياضي والذي يبدو لأول وهلة كأنه طريقة حسابية أكثر منه مفهوما رياضيا.

من الصعب إيجاد تعريف رياضي مجرد يوافق البناء الحدسي لكمية العدد لأننا نحتاج للأعداد للتعبير عنه وكيف سنستعمل الأعداد قبل بنائها ؟

لو أردنا فعل ذلك سنحتاج لإعادة تغيير طريقة بناء الأعداد باظهار مفهوم الكمية وتفريقها عن مفهوم الإشارة لكن ذلك سيكلفنا غاليا مع التبسيطات الجبرية في الحسابات والتي سنعطي بعض الأمثلة عنها لاحقا.

4- هل يمكن تغيير التعريف الموجه للتلميذ

من محاسن الصدف أنه لدينا من عملية التربيع $x*x = x^2$



وعرفنا دالة الجذر التربيعي ل y حقيقي موجب $\sqrt{y}$

بالسابقة الموجبة التي تحقق مساواته معه عد التربيع فيمكننا أن نستنتج أن $\sqrt{x^2} = |x|$

لكن هل يمكننا أن نعرف القيمة المطلقة بهذه الطريقة أي نضع $|x| = \sqrt{x^2}$

إن تتبعتم جيدا ما سبق علمتم أن هذه من محاسن الصدف فلا هي تمثل مفهوم القيمة المطلقة ولا التعريف الرياضي المعتمد وهنا لابد من التوقف للتنبيه على أمر مهم للأساتذة الأفاضل:

البعض تنبه إلى أن هناك خلل في تعريف القيمة المطلقة كمسافة ذلك أن المسافة تعرف بالقيمة المطلقة وهذا شيء يشكرون عليه فلابد أن ينتبه الأستاذ إلى مواضع الخلل ويوصل المفهوم الصحيح للتلاميذ ما أمكن ذلك.

لكن الذي يجب أن لا نفعله هو وضع تعريف من عندنا بل لابد من الرجوع للتعريف الرياضي المعتمد فهو الأصل فإما أنه سهل للتلميذ فيؤخذ أما إن كان صعبا فيناقش لوضع التعريف المنهجي.

عموما التعريف الرياضي لا يشوه منهجيا إلا لحاجة لذلك متى رأى الأستاذ مشكلة فيه فلا يقرر من تلقاء نفسه طرحه أو يضيف على ذلك تعريفا من عنده بل يراجع أهل الاختصاص في المسألة لمعرفة أسباب التشويه ومناقشة تقريب التعريف المنهجي من التعريف الرياضي.

بالنسبة لتعريف القيمة المطلقة بدالة الجذر التربيعي فلابد أن ننتبه إلى أن دالة الجذر التربيعي لا تأخذ مفهومها الكامل إلا في R ولا نتكلم عليها في مجموعة الأعداد الناطقة Q إذ المعادلة الناطقة من نوع

$$x^2 = 2$$

لا تقبل حلا في Q فإذا نظرنا إليها جبريا وسعنا Q للغلق الجبري بحقل الأعداد الجبرية وإن نظرنا إليها تحليليا وسعنا Q إلى R عن طريق المتتاليات الكوشية وهذا المعتمد حسب السياق البنائي إذ نتمم الغلق الجبري ل R بـC m .

لصناعة مجموعة الأعداد الحقيقية R نحتاج التكلم عن المتتالية كوشية والنهايات لذلك لابد أن نتكلم عن تعريف هذه المفاهيم في مجموعة الأعداد الناطقة Q فتصاغ النهاية كالتالي :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = l$$

$$\Leftrightarrow$$

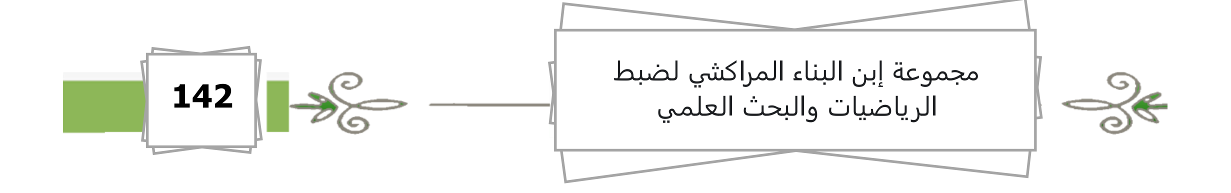
$$\forall\ \xi \in Q^{+*},\ \exists\ n(\xi) \in N\ ,\ \forall\ n \in N : n > n(\xi) \Rightarrow |U_n - l| < \xi$$

وهنا نحتاج للقيمة المطلقة، فلا يعقل أن نعرف القيمة المطلقة بدالة الجذر التربيعي المعرفة على R والتي تصنع بالقيمة المطلقة....

أترك القارئ التأمل جيدا في هذا الدوران بين هذه المفاهيم.

ولذلك يجب توخي الحذر قبل الخروج عن التعريف الرياضي المعتمد.

5- لماذا شوه التعريف الموجه للتلميذ وما فائدة تدريس القيمة المطلقة



لماذا شوه التعريف الموجه للتلميذ فقيل له أن القيمة المطلقة هي مسافة ؟

لمعرفة ذلك لابد أن نفهم سبب إدخال القيمة المطلقة في التدريس.

القيمة المطلقة تدخل في التدريس على مرحلتين:

الأولى كخاصية للعدد عن طريق نزع الإشارة

والثانية كدالة

المشكل مع القيمة المطلقة كخاصية لعدد هي محاولة افتكاك هذه الخاصية وإظهارها للتلميذ فالتلميذ في الأطوار الأولى بالكاد يتعامل مع الأعداد السالبة وبعد أن هضمها قليلا ككميات فهم بعض الخواص الحدسية مثل

كمية a زائد كمية b تساوي كمية $a + b$ كيفما كانت الإشارة فلدينا

$$5 - 7 = 5 + (-7) = -2$$

لكن كيف يمكن أن يهضم أن $|a+b|$ لا تساوي دائما $|a| + |b|$

فكيف سيدرك أنها الكمية الأصلية في العدد وليس الكمية الموجهة وأن ما كان يراه كعدد أصبح الآن بدخول الأعداد السالبة كشعاع فهذه لا يمكن أن تهضم إلا مع التعامل مع الأشعة لكن مفهوم الأشعة أصعب شرحا لذلك يلجأ المنهاج لما هو أبسط حدسيا وهي المسافة مقارنة بالصفر.

إذ من السهل تبرير أن القيمة المطلقة تمثل المسافة بين العدد كنقطة والصفر على المستقيم العددي ومن السهل كتابة $|x+y| \leq |x| + |y|$

لكن بهذا التشويه فقدنا الأصل وهو شرحها كخاصية بنائية للعدد نفسه ... فهل يجب شرحها له كطول لا كمسافة ؟ أترك ذلك لأهل الاختصاص.

يرى التلميذ القيمة المطلقة في مرحلة أخرى من دراسته كدالة وهذا لتوسعة إدراكه لمفهوم الدالة فبعد أن رأى كثيرات الحدود هو يحتاج أن يرى دوالا أعم لكنها قريبة منها وهي الدوال المعرفة كدوال مألوفة على مجالات.

فالقيمة المطلقة كدالة هي معرفة على جزئين ككثيري حدود جزء على R^+ وجزء على R^-

وكذلك تستعمل القيمة المطلقة لإظهار بعض حالات عدم قابلية الاشتقاق السهلة.

وكذلك لتهيئة تعريف النهايات.

فكل هذه مفاهيم يمكن التدرج بها بإدخال القيمة المطلقة على دوال مألوفة.

لكن الذي لا يراه التلميذ هو الربط بين المفهوم الأصلي وما يدرسه كالأعداد المركبة فالتلميذ يرى مفهوم الطويلة في الأعداد المركبة وبنفس ترميز القيمة المطلقة لكنه لا يربط بين المفهومين لغياب عملية الترتيب في الأعداد المركبة.



في عقل التلميذ القيمة المطلقة مرتبطة بالإشارة لكنه لم ينبه أن الإشارة مجرد مفهوم توجيه فهي تبني مفهوم الشعاع فكسر هذا الحاجز ليس بالأمر الهين بل حتى عند الأساتذة لسبب بسيط وهو أن المفاهيم الأصلية لم تشرح:

القيمة المطلقة خاصية في صناعة العدد تمثل كميته المحضة.

الشعاع كمية منوعة أو موجهة.

الإشارة نوع من التوجه يضاف على الكمية.

6- التعميمات الممكنة لمفهوم القيمة المطلقة

لفهم التعميم لمبدأ بهذه الأمثلة، فما الفرق بين

$5 . 5 = 25$

$5 . 5 = 25$

$5 . 5 = 25$

إذا علمنا أن الأولى خمس قطعات مستقيمة طولها خمسة والثانية مربع ضلعه خمسة والثالثة شعاع طويلته خمسة ؟

إن كانت العمليات الجبرية تسهل الحسابات هنا وتعطيها نفس الصبغة فإنها تخفي المفاهيم الأخرى لأنها تجريد لعملية البناء والتفكيك.

فعندما نكتب خمس قطع مستقيمة طول كل منها خمسة فالعملية $5 . 5 = 25$

وإن كان فيها خمسة مرتين فكل من الخمسة لها مفهومها لكن تبقى القيمة المطلقة هنا من حيث الخاصية محققة فطول القطعة هو خمسة وكمية التكرار خمسة هي خمسة فخمسة ضرب خمسة هي خمس وعشرين

أي $|5 . 5| = |5| . |5|$

لكن الثانية أصعب فهي انتقال من الطول للمساحة بحساب مساحة مربع طول ضلعه خمسة فهل يوجد معنى لكتابة $|5 . 5| = |5| . |5|$

الجواب وإن كانت العملية رياضيا صحيحة لكنها لا تعبر عن المفهوم الواقعي إذا أردنا الرجوع للكائنات الأصلية فكيف نمر من طول لمساحة ؟

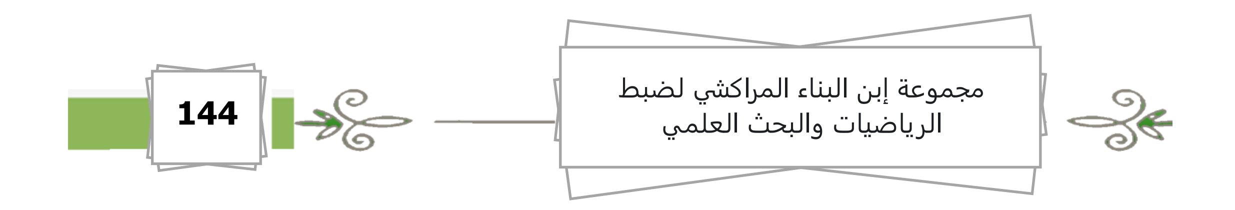
حسابيا نمر بالجداء الشعاعي أي نمثل كل من ضلعي المربع بشعاع u و v ونحسب

$\|u \times v\| = \|u\| . \|v\| = 5 . 5 = 25$

هنا سنلاحظ الاختلاف بين عمليتي الضرب $\times$, $\cdot$

والعملية الثالثة هي جداء سلمي أي $\|u . u\| = \|u\| . \|u\| = \|u\|^2 = 25$

وهذه مهمة جدا إذ تخبرنا أنه يمكن المرور من الجداء السلمي إلى الطويلة.



لو رجعنا لما ذكرناه سابقا هل يمكن أن نعرف القيمة المطلقة بدالة الجذر التربيعي بالطريقة :

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

وننظر لذلك في الأعداد المركبة فسنجد أنه لو كتبنا من أجل العدد المركب $z = i$

$$|i| = \sqrt{i^2} = \sqrt{-1} = i$$

العملية خاطئة، لكن لو تنبهنا لعملة الجداء السلمي السابقة سنجد أنه من السهل أن نكتب من أجل جداء سلمي $<.,.>$ وشعاع u

$$\|u\| = \sqrt{<u,u>}$$

وهو بالضبط النظيم الذي نعرفه في فضاء شبه هلبرتي.

هنا ندرك أمرا ونستشكل آخر فالأمر الذي ندركه أن القيمة المطلقة ليست مجرد نظيم بل هي أقوى منه لأنها خاصية في الشعاع نفسه تمثل كميته ولذلك لا نستنتجها من مجرد نظيم بل نحتاج لجداء سلمي.

والأمر الذي نستشكله أن في الأصل القيمة المطلقة مفهوم جبري والجداء السلمي مفهوم طبولوجي هندسي فلابد من تعميم جبري لمفهوم جبري.

بما أن القيمة المطلقة هي كمية الكائن فلابد أن وجهتها هي R^+ كيفما كان الكائن ولذلك في حقل كيفي K نسمي قيمة مطلقة الدالة التي تحقق التالي

$$|.| : K \rightarrow R+$$
$$\forall\ x, y \in K :$$
$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$|x+y| \leq |x| + |y|$$
$$|x \cdot y| = |x|\ |y|$$

وكما نلاحظ هي أقوى تعريفا من النظيم إذ تزيد عليه بخطيتها مع عملية الضرب رغم عدم خطيتها مع عملية الجمع.

القيمة المطلقة مفهوم بسيط لكن كونه موجود في أول بناء للأعداد يجعل إعادة استخراجه صعبا لا لصعوبته لكن للمعارف المكتسبة في صناعة الأعداد والتي جعلته مخفيا في أعماقها.

القيمة المطلقة ليست مجرد حسابات عددية بل هي لب العدد نفسه.

المراجع:

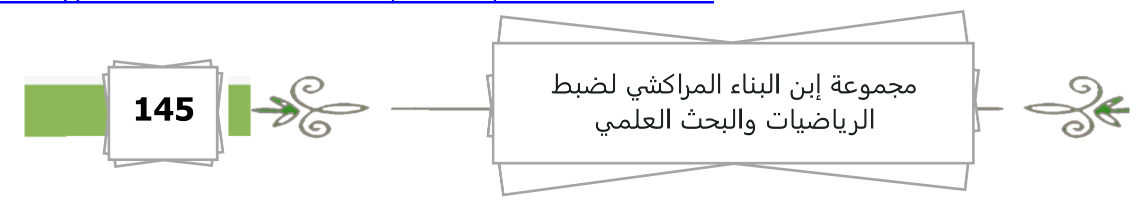
1 :LA VALEUR ABSOLUE * Difficultés majeures pour une notion mineure Alain OUROUX I.U.T. Génie Mécanique Bordeaux

https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/.../3x4_1570714622592...

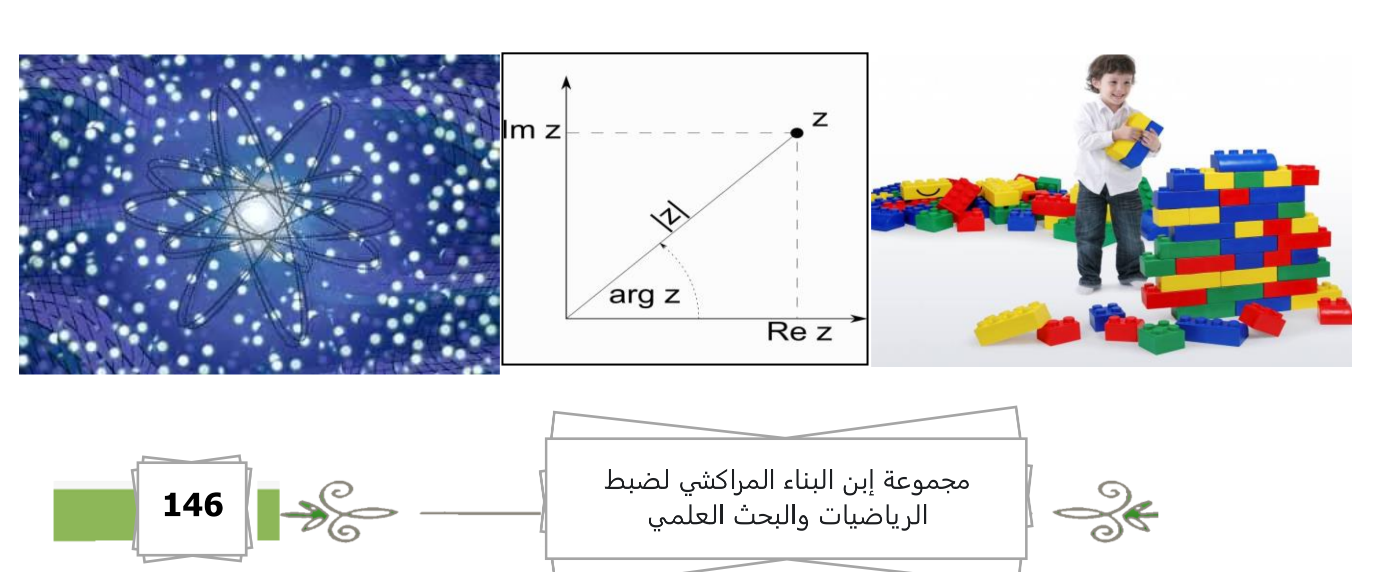
2 :كتاب التحليل واحد لتيرانس تاو

3 :دروس التحليل سنة أولى جامعة ليون الفرنسية

http://math.univ-lyon1.fr/~pujo/analyse1.pdf



4 :Université du Maineجامعة مين
http://perso.univ-lemans.fr/.../Licence/poly_L1_SV_ST.pdf
5 : La compréhension des mathématiques de niveau universitaire
Frédéric Gourdeau
Bernard R. Hodgson
https://www.mat.ulaval.ca/.../GirardMarianne_Essai_05-03...
6 :
ويكيبيدا فرنسي
https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Valeur_absolue
https://fr.m.wikipedia.org/.../Module_d%27un_nombre_complexe
https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Espace_vectoriel_norm%C3%A9
https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Espace_pr%C3%A9hilbertien
ويكيديا أنجليزي
https://en.m.wikipedia.org/wiki/Absolute_value
7 : A Conceptual Approach to Absolute Value Equations and Inequalities
https://www.psd1.org/.../Absolute%2520Value%2520Article.pdf
8 : Diagnosing Learning Difficulties Related to the Equation and Inequality that Contain Terms with Absolute Value
https://www.acarindex.com/.../acarindex-1423904380.pdf
9 : كتاب سنة أولى رياضيات جدع مشترك الجزائر
https://www.selsabil.com/.../Mathematics-book-first-year...
10 :الكتاب المدرسي الفرنسي
https://www.lelivrescolaire.fr/page/6796844



5. القيمة المطلقة و المسافة

- القيمة المطلقة لعدد حقيقي

تعريف

x عدد حقيقي، M نقطة من مستقيم مزوّد بمعلم (O,I) فاصلتها x.
القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة OM، ونرمز إليها بالرّمز $|x|$. ونكتب $|x| = OM$.

- $x \geq 0$: $|x| = OM = x$
- $x \leq 0$: $|x| = OM = -x$

حذار $(-x)$ ليس عددا سالبا دوما.

نتائج:

- بما أنّ المسافة موجبة فإنّ $|x| \geq 0$ من أجل كلّ عدد حقيقي x.
- من أجل كلّ عدد حقيقي x:
$$\begin{cases} |x| = x \ ; \ x \in [0 \ ; +\infty[\\ |x| = -x \ ; \ x \in]-\infty \ ; 0] \end{cases}$$

أمثلة

- من أجل $x = \sqrt{3}$، العدد x موجب، وبالتالي $|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$.
- من أجل $x = 1 - \sqrt{2}$، العدد x سالب،
وبالتالي $|1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$
- $|0| = 0$

```
1-√(2)
-.4142135624
```

ملاحظة: يمكن حساب القيمة المطلقة لعدد حقيقي x باستعمال الدالة $abs(\ )$ للحاسبة.

```
abs(-3)
3
```

خواص

بفرض x و y عددين حقيقيين، لدينا:

- $|-x| = |x|$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|xy| = |x| \times |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ مع $y \neq 0$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$ (المتباينة المثلثية)

En seconde, la valeur absolue d'un nombre réel et la distance entre deux réels ont été étudiées.
Ces notions permettent de définir une nouvelle fonction.

A Définition et courbe représentative

Définition

La fonction **valeur absolue** est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

On a $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

Sa courbe représentative est donnée dans le graphique suivant.

هل فعلا القيمة المطلقة تنزع الإشارة كما يتوهم البعض ؟

قد يقول البعض القيمة المطلقة مسافة لذلك هي تعطي نتيجة موجبة.

نعم هي مسافة لكن لو دققنا جيدا فهي نظيم أو ما يسمى طويلة شعاع.

في R يوجد مسارين يمين ويسار لذلك العدد إما إشارته موجبة و إشارته سالبة في R والإشارة عندهما مفهومان:

مفهوم النظير في الزمرة وهذا لا يهمه موجب وسالب إنما يهمه لكل عنصر نظير.

والمفهوم الثاني مفهوم أشعة وهنا تظهر المسارات.

فالقيمة المطلقة تنزع الاتجاه لتبقي على الطويلة والطويلة اصطلاحا موجبة.

لكن للتلميذ يبسط الأمر عن طريق المستقيم الحقيقي فترتبط القيمة المطلقة بالطول الذي لا علاقة له بالوجهة.

فإن كان العدد فوق الصفر فقياس الضلع الموجه يطابق طول الضلع وإن كان العدد تحت الصفر فقياس الضلع الموجه سالب لكننا ننزع الاتجاه فنأخذ الطول الموجب ومن هذا نجد

$x > 0 : |x| = x$

$x = 0 : |x| = 0$

$x < 0 : |x| = -x$

فالجواب على السؤال:

إن كان المقصود بالإشارة الوجهة فنعم القيمة المطلقة نظيم والنظيم ينزع الوجهة.

أما إن كان المقصود بالإشارة موضع العدد من R فلا لأن القيمة المطلقة تعطي عددا موجبا.



لنصنع مجموعة الأعداد المركبة بطريقة مختلفة

الطريقة التي تدرس في الثانوي لصناعة الأعداد المركبة هي تخيل العدد i كحل للمعادلة $x^2+1=0$

ثم تعريف العدد المركب بشقيه $x+iy$ وتعميم العمليات الجبرية عليه.

لكن المشكل مع هذه الطريقة أن فرض عدد i هكذا من لا شيء لا تقبله الرياضيات.

سنشرح في هذا المقال طريقة مختلفة تعرف الأعداد المركبة على طريقة الثانوي لكن بشكل مضبوط رياضيا.

يجب أن نعلم أنه ليس العنصر في مجموعة من يجعله عددا إنما العمليات الجبرية التي تطبق عليه.

لذلك لصناعة العدد التخيلي i خصوصا وأي عدد مركب عموما يكفي أن نظهرها عن طريق نظرية المجموعات ثم نعطيها خصائصها الجبرية.

فنحتاج إظهار عدد من الشكل $x+iy$ فلنقم بذلك.

من خلال نظرية المجموعات يمكننا أن تضع $i=\{R\}$

فنعرف i بأنه المجموعة الأحادية التي عنصرها R ثم نولد حقل إنطلاقا من المجموعة من إضافته لـR

لإظهار كل عدد من الشكل $x+iy$ من حيث الوجود

سنضع حسب نظرية المجموعات ونتجوز هنا بوضع علامة الجمع للشرح $x+iy=\{x,\{y,i\}\}$

هنا نكون قد عرفنا مجموعة جديدة C

$C=\{\{x,\{y,i\}\}:x,y\in R\}$ على ان الكتابة $x+iy$ ترميزية فليس لدينا عملية جمع.

فهذه المجموعة معرفة جيدا لكنها مجرد مجموعة مكونة من عناصر فبقي أن نعطيها خصائصا الجبرية وهذا يتم عن طريق تعريف عملية الجمع فيها فيكون

$$\{x,\{y,i\}\}+\{x',\{y',i\}\}=\{x+x',\{y+y',i\}\}$$

وعملية الضرب

$$\{x,\{y,i\}\}*\{x',\{y',i\}\}=\{xx'-yy',\{xy'+x'y,i\}\}$$

فبكتابتنا الاصطلاحية

$$(x+iy)+(x'+iy')=(x+x'+i(y+y'))$$
$$(x+iy)(x'+iy')=(xx'-yy',(xy'+x'y)i)$$

إذن هنا نلاحظ أن عناصر R تقابلها مع مجموعتنا العناصر $\{x,\{0,i\}\}$ فيمكننا أن نضع

$$x=\{x,\{0,i\}\}$$

ونلاحظ أن $\{0,\{1,i\}\}^2=\{-1,\{0,i\}\}=-1$

فيمكننا وضع $i=\{0,\{1,i\}\}$

ونلاحظ أن $\{0,\{y,i\}\}=\{y,\{0,i\}\}*\{0,\{1,i\}\}=yi$

إذن قد عرفنا حقلا جديدا يمثل حقل الأعداد المركبة.

وهنا يمكننا تحويل الكتابة $x+iy$ حسب الترميزات السابقة.

ما الفرق بين هذه الطريقة وطريقة الثانوي ؟

الفرق هو أننا صنعنا المجموعة بنظرية المجموعات ZFC فهي معرفة جيدا ثم كسوناها بخصائصها الجبرية.

أما طريقة الثانوية فتفرض كائنات بخصائص جبرية من العدم وهذا غير مقبول رياضيا فلا يمكن أن نفرض الخاصية قبل وجود العنصر.

ما الفرق بين هذه الطريقة وطريقة الانطلاق من R^2 ؟

لا يوجد فرق غير أنه بينا هنا أن العناصر لا أهمية لها إنما المهم العمليات الجبرية بينها وقد كنا قادرين أن نعرف:

$$x+i y =\{x ,\{y\}\}$$

أو

$$x+iy = \{y,\{x\}\}$$

لكن لا يهم العنصر المهم هي العملية الجبرية التي تعرف عليه.

في نظرية المجموعات تعريف المجموعة سابق لأي دراسة ولو تركنا هذا الشرط سنقع في متناقضة راسل فالذي يفرض أنه يوجد عدد i بحيث $i^2=-1$

يمكنه أن يفرض كذلك وجود مجموعة تشمل جميع المجموعات!!!

ما الذي يمنعه فكلها فرضيات ؟

الذي يمنعه هي نظرية المجموعات التي تصنع المجموعة عنصرا عنصرا من المجموعة الخالية حتى لا نقع في متناقضة راسل.

طريقة الثانوي هي طريقة صناعة C قبل أزمة الأساسيات التي بينت أنه لا يمكننا أن نطلق العنان للفرضيات وإلا وقعنا في تناقض قد يهدم الرياضيات.





يا أستاذ : ما علاقة التمثيل الهندسي للأعداد العقدية بالدالة الأسية ؟

علاقة التمثيل الهندسي للأعداد المركبة $x + i y = R (\cos \theta + i \sin \theta)$

بالدالة الأسية $e^{(i \theta)} = \cos \theta + i \sin \theta$

تعطى كقاعدة مسلمة للثانوي دون تبرير رغم أنه يمكن تفسيرها بشكل مبسط وإن كان برهانها يتم عن طريق النشر الذي يدرس في الجامعة.

تاريخيا أول من أظهر هذه العلاقة هو Roger Cotes سنة 1714 عن طريق تعريف اللوغارتم العقدي ثم نشرها Euler سنة 1748 واستعمل في إظهارها علاقة Moivre

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

لكن كل من هاذين لم يعطيا تفسيرا هندسيا لهذه العلاقة فتفسيرها الهندسي أعطاه الرياضياتي Caspar Wessel بعدهم ببضع سنوات.

لو رجعنا للتمثيل الهندسي لعدد مركب من دائرة الوحدة: $x + i y = \cos \theta + i \sin \theta$

فسنجده متعلقا بالزاوية θ أو ما نسميه العمدة لذلك يمكن أن نعرف دالة متعلقة بـ θ من المجال $[-\pi , \pi [$

تعطينا جميع هذه الأعداد $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$

الملاحظ في دائرة الوحدة أن جداء عددين منها هو عدد منها بل يحقق:

$$f(\theta) \times f(\theta') = (\cos \theta + i \sin \theta) \times (\cos \theta' + i \sin \theta')$$

وبعد الحسابات والاختصارات سنجد

$$f(\theta) \times f(\theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$$

فإذا راعينا بقاء $(\theta + \theta')$ في مجال تعريف f فيمكننا كتابة $f(\theta) \times f(\theta') = f(\theta + \theta')$

وهذا يذكرنا بالدالة الأسية فهي التي تحقق $e^x \times e^y = e^{(x+y)}$

وعموما كل الدوال الأسية من الشكل e^{ax} تحقق هذه الخاصية

$$e^{ax} \times e^{ay} = e^{(a \times (x+y))}$$

لكن كون وجود تشابه بين خاصية للدالة الأسية مع f غير كاف حتى نجزم بوجود علاقة بينها لذلك حتى نظهر هذه العلاقة يمكننا اللجوء للاشتقاق إذ نحن نعرف أن $(e^{ax})' = a e^{x}$

فالإشتقاق يعتبر معيارا تحليليا قويا لإظهار وجود الدالة الأسية فلنقم باشتقاق f انطلاقا من تعريفها

$f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$ ومنه $f'(\theta) = - \sin \theta + i \cos \theta$

لنحاول الآن إظهار علاقة f' بـ f فيمكننا كتابة

$$f'(\theta) = i^2 \sin \theta + i \cos \theta= i (i \sin \theta + \cos \theta) = i f(\theta)$$

فتظهر لنا العلاقة $f'(\theta) = i f(\theta)$ وكأنها دالة أسية من الشكل $f(\theta)=e^{(i \theta)}=\cos \theta+i \sin \theta$

قد يظن البعض أن هذا برهان كاف لوضع هذه العلاقة لكن المسألة على غير ذلك.



فإن كان ما سبق يفسر لنا وجود علاقة بين التمثيل الهندسي للأعداد المركبة والدالة الأسية إلا أنه ينقصه إعطاء معنى رياضي للدالة الأسية العقدية.

و بصفة عامة إعطاء تعريف للدوال العقدية ولعملية اشتقاقها وهذا يحتاج دروسا جامعية تعيد تعريف كل ما يتناول في الثانوي في التحليل الحقيقي إلى التحليل العقدي من دوال ومشتقاتها وتكاملاتها ومعادلاتها التفاضلية.

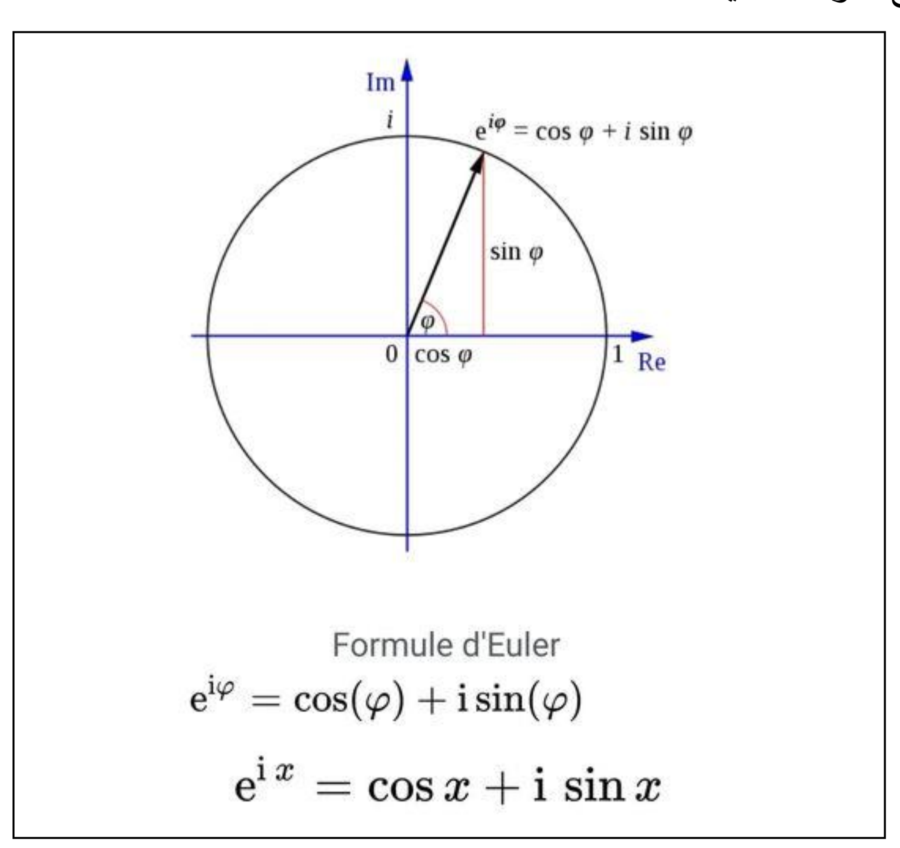
في الجامعة سيعيد الطالب دراسة هذه العلاقة عن طريق النشر المحدود والذي يمكن من خلاله وبسهولة تعميم تعريف الدالة الأسية على مجموعة الأعداد المركبة ثم برهنة هذه العلاقة.

ثم سيقوم لاحقا بالتطرق إلى التحليل العقدي وعن طريق مبرهنة كوشي ليبشيتز يمكن برهنة وجود دالة أسية عقدية تحقق المعادلة التفاضلية المشهورة للدالة الأسية.

الذي يجب أن ينبه إليه هنا أن هذه المسألة ليست مجرد مسألة حسابات لأن الحسابات لا معنى لها ما لم تكن على بنى جبرية وتحليلية معرفة جيدا فلا يكفي الاشتقاق هنا لبرهنة هذه العلاقة ما لم نعط معنى للاشتقاق العقدي خصوصا وللمعادلات التفاضلية العقدية عموما ووجود حلولها في فضاء عقدي تحليلي.

يبقى النشر هو أسهل طريقة لبرهنة هذه المساواة لأنه لا يتطلب أكثر من تعريف التقارب في السلاسل.

بالنسبة لتفسير العلاقة بشكل مبسط فهذا ممكن كما تقدم ذكره ولعل هذا ينزع بعض الغموض ويقربها للأذهان إذ هو يظهر الخاصية الجبرية الأساسية للدالة الأسية $e^x \times e^y = e^{(x+y)}$ ويربطها عقديا مع الدوال المثلثية.



Formule d'Euler

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

$$e^{i\,x} = \cos x + i\,\sin x$$



يا أستاذ هل $C=R^2$

الأستاذ:

مجموعة الأعداد العقدية تبنى بعدة طرق منها كغلق جبري لمجموعة الأعداد الحقيقية.

ومنها بتوسيع الحقل R بإضافة العدد i أي R[i] وهذا المستعمل في التدريس

ومنها بتعريف حقل جديد على R^2 أي $(R^2 , + ,*)$

جميع هذه البنى الجبرية يمكن برهنة وجود تماثل بينها والتماثل هو تشاكل تقابلي والتشاكل هو تطبيق يحافظ على العمليات الجبرية أي

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$f(x * y) = f(x) * f(y)$$

فمتى وجدنا تماثلا بين بنيتين جبريتين كانتا لهما نفس الخصائص فجاز أن نقول

$$C=R[i] = (R^2 , + , *)$$

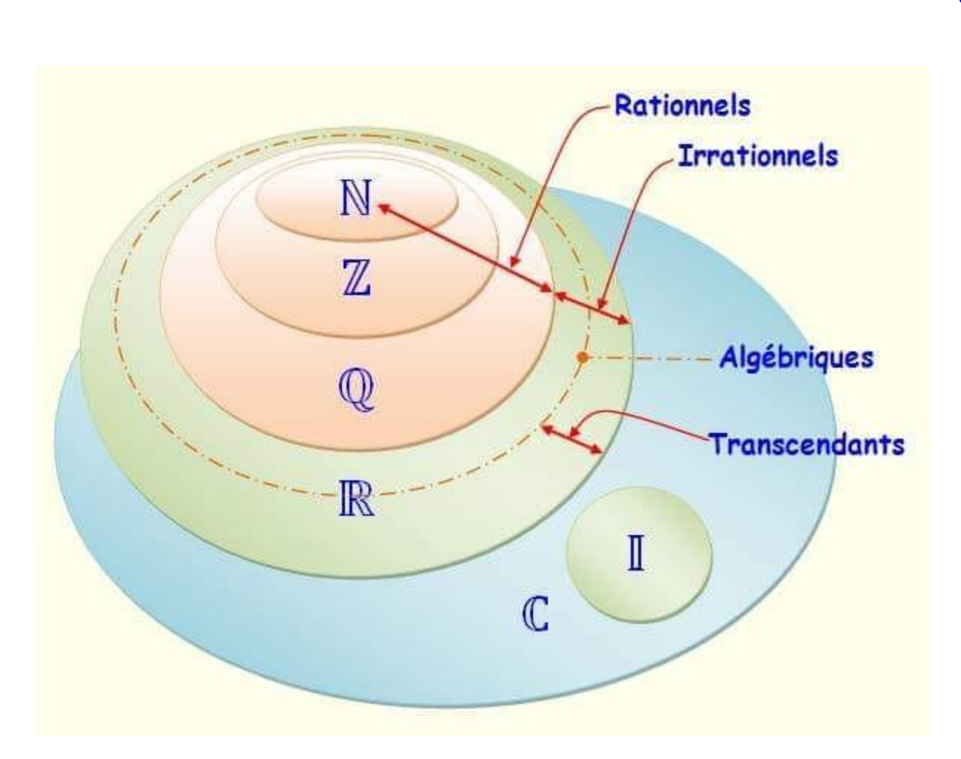
وهناك من يتجوز فيقول C=R^2 كما نتجوز ونقول الحقل R لكنه (R,+,*)

التجوز بين المختصين مسموح به لانهم يفهمون قصدهم لكن في التدريس المنهجي يمنع لأنه يخلط مفاهيم التلميذ، ما عدا مع ما هو مشهور معروف عندهم كـR , Q , Z

بعد صناعة المجموعة C فسنلاحظ أن $(R \times \{0\} ,+,*)$

حقل جزئي منها وانه متماثل مع (R,+,*) لذلك نكتب $R = R \times \{0\}$ ونقول أن R محتواة في C .

ومنه $1=(1,0)$.





القوى الطبيعية، الجذر النوني والقوى الحقيقية.

عملية الضرب في مجموعة الأعداد الطبيعية تخول لنا تعريف مفهوم التربيع وهو تكرار الكمية بقدرها:

$2^2 = 2 \times 2, 3^2 = 3 \times 3 ...$

والتربيع تجريد لمفاهيم موجودة في الواقع لعل من أبسطها مفهوم مساحة مربع.

فإذا انتقلنا للحجوم سنجد التكعيب للمكعب $2^3 = 2 \times 2 \times 2$

هذه الطريقة في تكرار الضرب تظهر كذلك في العد عند دراسة التكاثر مثلا فإذا كان لدينا عدد من البكتيريا وليكن M بحيث تتكاثر للضعف كل ساعة فبعد عشر ساعات سنجد عددها $M \times 2^{10}$

للتعبير عن تكرار ضرب الكمية في نفسها وضع الإنسان مفهوم القوة $a^n = a \times a \times ... \times a$

والتي يمكن أن نستعملها في أي زمرة مزودة بعملية ضرب ك Q و R .

لكن السؤال الذي يطرح نفسه ماذا عن العملية العكسية ؟ فهل نستطيع أن نجد ضلع مربع إن كنا نعرف مساحته ؟ أجاب على هذه الحالة الخاصة الخوارزمي بطريقة حل معادلة من الدرجة الثانية $x^2 = a$

لكن إن كان الجواب سهلا هندسيا فهل هو سهل عدديا ؟

$x^2 = 2$??

إن وضعنا أنفسنا زمنهم فالمسألة ليست سهلة إذ لا يوجد عدد ناطق يحقق هذه المعادلة وإن كنا نرى الحل موجودا هندسيا، التأكد من ذلك سهل بمبرهنة فيثاغورث في مثلث قائم متقايس الضلعين.

فالحل الذي نبحث عنه يمكننا إضافته جبريا بنظرتنا المعاصرة عن طريق تصور أعداد جديدة تحقق

$x^2 = a$

قد يقفز أحدهم ويقول لابد أن يكون a موجبا وأقول له هنا كلامك غير صحيح إذ نحن هنا في صدد توسيع Q لا حل معادلة في R فيمكننا جبريا تخيل عدد جديد يحقق وليكن m بحيث $m^2 = 2$

ولا فرق بين هذا وبين تخيل عدد جديد يحقق $i^2 = -1$ إذ سنصنع أعدادا جديدة من الشكل $a + b \times m$ حيث a و b أعداد ناطقة.

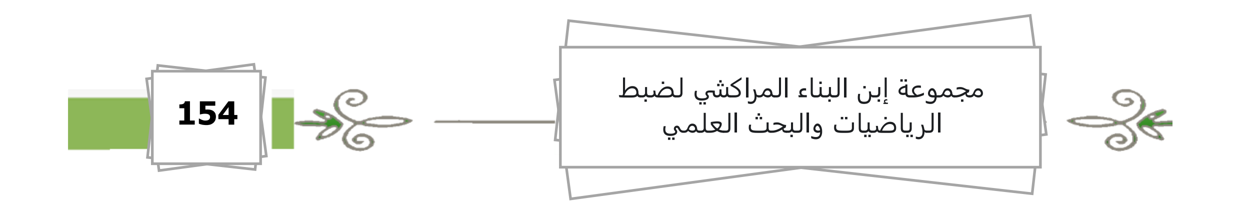
فإذا تتبعتم جيدا فالعدد التخيلي i أو الجذر التربيعي ل 2 كلاهما عدد جبري.

ويمكننا فعل نفس الشيء مع المعادلة من النوع $x^3 = 2$ وبصفة عامة $x^n = a$

فنصنع ما يسمى بالجذر النوني فالجذر النوني لعدد a وهو العدد x الذي يحقق $x^n = a$

بل يمكننا توسعة Q جبريا لصناعة ما يعرف بحقل الأعداد الجبرية وهو خليط من أعداد حقيقية وأعداد مركبة كلها تجمعها خاصية أنها جذر لكثير حدود ناطق فإذا أردنا الحقيقية فقط نقول الأعداد الجبرية الحقيقية.

لكن إن كانت الصناعة الجبرية لهذه الأعداد سهلة فهي لا تفيدنا حسابيا فالذي يهمنا حسابيا إسقاط هذه النظرة على الهندسة والجمع بين الحساب والهندسة يقودنا للتحليل.



فإذا نظرنا للمعادلة $x^n = a$ تحليليا في Q سنجد أنه إن كان a موجبا يمكننا أن نقترب كيفما نريد من العدد a برفع أعداد ناطقة للقوة n وهذا ما نسميه النهاية فيمكننا صناعة الجذر النوني تحليليا ضمن بناء R عن طريق المتتاليات الكوشية أو بخاصية الحد الأعلى أما إذا كان a سالبا فيمكننا فعل ما سبق إذا كان n فرديا.

وبما أن الجذر النوني عملية عكسية للقوة فيمكننا أن نصطلح عليها بـ $x^{(1/n)}$

مع الحذر بالنسبة لإشارة x وبعمليات بسيطة يمكننا تمديد مفهوم القوة من Z إلى Q

$$x^{(p/q)} = x^p \times x^{(1/q)}$$

وهذا يطرح لدينا تساؤلا بما أننا نرفع عددا بقوة ناطقة ونحن نعلم أن الأعداد الناطقة كثيفة في R فهل يمكننا تمديد القوة من Q لـ R

الجواب نعم على R^+ عن طريق الدوال الأسية فبناء R يخول لنا تعريف

$$x\hat{}y = x\hat{}(\lim y_n) = \lim x\hat{}y_n$$

حيث y_n متتالية ناطقة تؤول لـ y عدد حقيقي و نشترط x موجب تماما هنا لكن لماذا هذا الشرط ؟

لأنه لـ x سالب سنقع مع المتتالية y_n في حالات لا تكون فيها $x\hat{}y_n$ مُعرفة فلا يمكننا الكلام عن هذا العدد.

الطريقة المتبعة اليوم لتعريف قوة حقيقية هي عن طريق الأسية من أجل x موجب تماما و y حقيقي:

$$x\hat{}y = e\hat{}(y \ln x)$$

فالقوى الحقيقية هي تمديد تحليلي للقوى الناطقة التي أصلها جبري.

الجذر النوني له مفهوم جبري يوافق بعض منه مفهوما تحليليا في R^+ وهو أعم منه يسمح بتعريف قوى لها نفس خصائص القوى الناطقة.

يمكننا ببساطة اليوم تعريف دالة الجذر النوني كدالة عكسية لدالة القوة النونية التقابلية:

إذا كان n عدد طبيعي زوجي غير معدوم

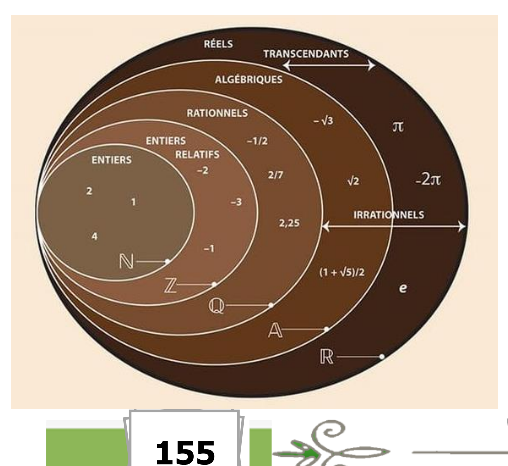
$$f : R^+ \to R^+$$
$$x \to x\hat{}n$$
$$x\hat{}(1/n) = f^{-1}(x)$$

و من R نحو R إذا كان n فرديا وهذا التعريف يخفي وراءه مبرهنة القيم المتوسطة إذ هي التي تسمح لنا من التأكد من غمر هذا التطبيق أما تباينه فسهل البرهنة.

ومبرهنة القيم المتوسطة متعلقة بخصائص R التحليلية.

أما القوى الكيفية فتعريفها بالأسية كما ذكرنا سابقا.

$$x\hat{}y = e\hat{}(y \ln x)$$



المجموعات العددية من العد الطبيعي إلى فرضية المستمر ما لم يكن يعرفه كنتور وأجاب عليه غودل عدم قابلية العد مفسرة بالقريصات...

بسم الله الرحمن الرحيم

التلميذ : يا أستاذ حدثني عن عدم قابلية العد ؟

الأستاذ : يا ولدي، إن الرياضيات علم بني في قرون عبر فهم عميق لمكتشفاته، وليس بالضرورة في اتجاه البناء المنطقي المعروف اليوم فالبناء الرياضي لا يتبع التطور التاريخي.

فكل ما تعرفه اليوم من نظرية المجموعات و المكاملة و القياس و الطبولوجيا ، حكاياتها متداخلة متشعبة كلها نشأت من بعضها البعض في طريق واحدة أصلها محاولة فهم المجموعات.

التلميذ : كيف ذلك يا أستاذ ؟ أليست فروع الرياضيات مختلفة ؟

الأستاذ : بدأ مفهوم الدالة في الظهور عن طريق الجداول الحسابية لحساب المثلثات التي اخترعها العرب، ثم قام بعدها الغرب بتوسعته شيئا فشيئا.

فأدخل في الدوال كثيرات الحدود لسهولة حسابها جبريا و الدوال المثلثية للحاجة إليها في تتبع الشمس والنجوم، و مع ولادة الحساب التفاضلي و النهايات أو ما يسمى في عهدهم بالحساب المتناهي في الصغر على يد نيوتن وليبنيز، بدأ العلماء بدراسة غرائب النهايات عبر الدوال ثم السلاسل العددية لكن نقطة البداية كانت على يد الرياضياتي فورييه.

التلميذ : صاحب سلاسل فورييه ؟

الأستاذ : نعم ، قام الرياضي برنولي بإدخال الدوال المثلثية في دراسة الأوتار ثم جاء بعده فورييه و في محاولة لحل معادلة الحرارة أدخل فيها الدوال الجيبية فصنع ما نسميه اليوم نظرية سلاسل فورييه و تحويلات فورييه ففتح بذلك المجال أمام العلماء لدراسة دوال تكتب بسلاسل دوال مألوفة.

فورييه كانت عنده نظرة أولر للدالة فقد كان أولر يتوسع في مفهوم الدالة فيدخل فيها الدوال المعرفة بالتجزئة على مجالات.

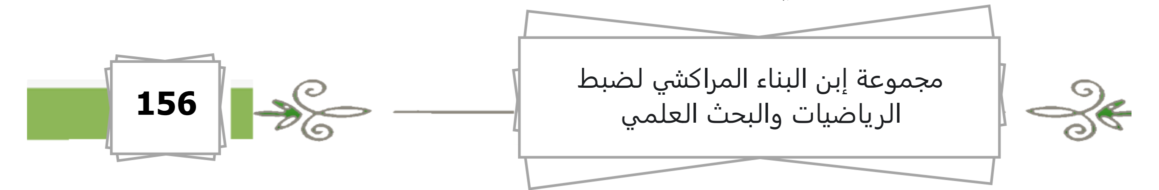
وعلى هذه الفكرة بنى فورييه سلسلته الشهيرة فصنع بها مجاميع غير منتهية لدوال جيبية، كان يطمح فورييه لكتابة أي دالة محدودة على مجال على شكل سلسلة لفورييه.

القفزة النوعية التي أحدثتها سلاسل فورييه هو الخلط بين النهايات و مجاميع الدوال و معاملات تحتاج لحسابات تكاملية على عكس نشر تايلور أين نلجأ إلى الاشتقاق فقط.

التلميذ : أي دالة يمكن كتابتها كسلسلة فورييه ؟! لكن أليس هذا له شروط كالاستمرار مثلا ؟

الأستاذ : نعم هناك شروط لكن لم يكن يتصور العلماء في القرن الثامن عشر الدوال إلا مستمرة و قابلة للاشتقاق ماعدا عند نقاط منتهية.

فمفهوم الدوال عندهم ضيق جيدا بل حتى في الاستمرار لم يكن يفرقون بين الاستمرار و الاستمرار المنتظم.



كانت المفاهيم لم تتضح بعد فقد كان كوشي يعرف الاستمرار بالاستمرار المنتظم ثم تنبه إلى وجود أنواع أخرى من الاستمرار و كان يظن أن سلسلة دوال مستمرة نهايتها دالة مستمرة حتى أشار آبل إلى متتالية دوال جيبية مستمرة عند نقطة لكن نهاية مجموعها عندها غير مستمر.

القفزة النوعية في مفهوم الدالة جاءت من ديركليه فهو من أعطاها المفهوم المعروف اليوم بالتطبيق.

في منتصف القرن التاسع عشر قام ريمان بمواصلة أعمال أستاذه غوص حول سلاسل فورييه و لحساب معاملاتها عرف ما نعرفه اليوم بتكامل ريمان، و هنا تساءل العلماء : ما هي هذه الدوال التي تقبل المكاملة بمفهوم ريمان ؟

لأول وهلة تظهر الدوال المستمرة و الدرجية ثم الدوال غير المستمرة ما عدا عند نقاط منتهية ، لكن ماذا يحدث إذا كانت نقاط عدم الاستمرار غير منتهية ؟

بل قام ريمان سنة 1861 بإثارة تعجب الرياضياتيين عندما عرض دالة معرفة عبر نهاية سلسلة دوال ، مستمرة لكنها غير قابلة للاشتقاق ما عدا في نقاط نادرة.

هنا بدأ يدرك العلماء أن عالم الدوال يخفي غرائب كثيرة و هي أوسع مما كانوا يعتقدون و ظهر ذلك جليا فيما قام بيه الرياضياتي ويرستراس فقد نشر سنة 1872 عائلة من الدوال المعرفة بسلاسل دالية، مستمرة لكن غير قابلة للاشتقاق عند أي نقطة.

بداية من سنة 1872، اهتم كنتور بمسألة سلاسل الدوال و استمرارها.

التلميذ : كنتور صاحب عدم قابلة العد لمجموعة الأعداد الحقيقة ؟

الأستاذ : نعم إنه هو ، بدأ عمله بدراسة الدوال القابلة للمكاملة حسب ريمان ثم أخذ يهتم بنقاط تقطعها لكن كيف يكمم هذه النقاط ؟ ...

و هنا تظهر عبقرية كنتور فإن كان العلماء قبله يهتمون بطبيعة هذه الدوال فقد إهتم هو بالمجموعات التي تشذ فيها هذه الدوال.

في زمان كنتور كان العلماء لا يعرفون الطبولوجيا و لا القياس و يخلطون بين مفاهيمهما.

ما هي المجموعة الكثيفة ؟ ما هي المجموعة المهملة ؟ بل البعض كان يظن أن المجموعة الكثيفة غير مهملة...

كل هذا دفع كنتور في مرحلة أولى لمحاولة توضيح هذه المفاهيم من كثافة و ملاصقة و ما غير ذلك ثم درس الدوال و استمرارها فمفهوم النهاية لا ينفك عن التلاصق و التراكم و ما شابه لكن في خضم بحثه حاول تكميم هذه المجموعات ... كيف يحسب عدد نقاطها ؟

فحاول مقابلة هذه المجموعات ببعضها أو ما نسميه محاولة عدها، فنقول أن مجموعة قابلة للعد أو عدودة إذا أمكن مقابلتها مع مجموعة الأعداد الطبيعية أو جزء منها

التلميذ : لكن ماذا يعني ذلك ؟



الأستاذ : تصور أن لديك كيسا من القريصات، فقمت بسحب القريصات منه قريصة قريصة، و كلما سحبت واحدة وضعتها مع ما سحبته من قبل ثم أعطيت اسما لهذه القريصات فتسميهم : واحد ، إثنين ، ثلاثة حسب تكرار القريصات...

التلميذ : لكن ستأتي مرحلة تنفد فيها القريصات من الكيس.

الأستاذ : نعم لكن تصور لو كان للكيس قاع غير منته فعدد القريصات غير منته ؟

التلميذ : إذن لن نتوقف عن السحب

الأستاذ : هذا ما نسميه العد فالعد مجرد اختيار بشري بسيط لعناصر فيجعلها في سلسلة، كل واحدة تتبع الأخرى، لكن لو كانت عندك قريصة في مكان ما من الكيس ، فهل ستصل إليها بتكرار السحب ؟

التلميذ : نعم ، إذا سحبت كثيرا فسيأتي دورها

الأستاذ : في الحقيقة ليس دوما إلا إذا كان الكيس قابلا للعد .

فما نسميه بقابلية العد هي استغراق العناصر بالاختيار البسيط المكرر أي السحب هنا فكل قريصة يأتيها دورها.

الذي بينه كنتور أن الأكياس ليست كلها قابلة للعد و لكن قبل ذلك لنبدأ بكيس قابل للعد أي أن أي قريصة فيه سيأتيها دورها بكثرة السحب فتسحب فهذه هي المجموعة N .

ما رأيك لو أتينا بكيس ثان مثله بجنبه ، فهل يمكننا سحب القريصات من الكيسين واحدة بواحدة وعدها حسب الأعداد الطبيعية بحيث مهما كانت القريصة في أي كيس يأتيها دورها بالسحب ؟

التلميذ : غير ممكن لأننا لن نكمل الكيس الأول فتبقى قريصات الكيس الثاني بلا سحب!!!

الأستاذ : ما رأيك لو قمت بالسحب بالتناوب مرة من الكيس الأول و أخرى من الثاني ثم من الأول ثم من الثاني و هكذا...

التلميذ : نعم هكذا ممكن سنسحب أي قريصية من أي الكيسين فسيأتيها دورها حتما بتكرار السحب.

الأستاذ : و هذا الذي بينه كنتور فالحدس يقول لنا كيسان أكبر من الكيس لكننا نلاحظ أنه سواء كيس واحد أو كيسين فإنه بإمكاننا عدهما قريصية قريصة فكيسان من المالانهاية يعادلان كيسا من المالانهاية.

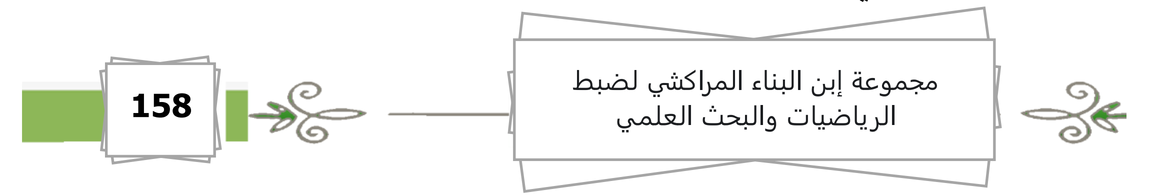
بل حتى لو جئنا بخمس أكياس فنسحب من الأول ثم الثاني ثم الثالث ثم الرابع ثم الخامس ثم نعود للسحب من الأول ثم الثاني و هكذا فسنعدها جميعا.

التلميذ : و ماذا لو كان عندنا عد غير منته من الأكياس ؟

الأستاذ : لو فرضنا أن عندنا عدد غير منته من الأكياس لكنه قابل للعد فيمكننا السحب هكذا:

نسحب قريصة من الكيس الأول ثم الثاني ثم الأول ثم الثاني ثم الثالث ثم الأول ثم الثاني ثم الثالث ثم الرابع و في كل مرحلة نضيف كيسا ...، فهل سنعدها كلها ؟

التلميذ : رائع لم أفكر بهذه الطريقة في السحب.



الأستاذ : نعم فالاتحاد العدود لمجموعات قابلة للعد هو مجموعة قابلة للعد.

لكن ما رأيك لو ننظر في الأعداد العشرية ؟

التلميذ : هذه مجموعة كثيفة ... أظنها أكثر عددا من مجموعة الأعداد الطبيعية

الأستاذ : بل هي قابلة للعد...

التلميذ : ماذا لكن كيف ذلك... !!!

الأستاذ : الأعداد العشرية هي التي كتابتها العشرية منتهية فلنهتم بالموجبة منها.

يمكن أن نضع كل عدد عشري على شكل قريصة مكتوب فيها عدده، نضعه في كيس داخل كيس ... ، أي عندنا كيس خارجي يمثل جزؤه الطبيعي مثلا العدد 30.12361 نضعه في كيس رقم 30 لكن لا نضعه مباشرة بل نضعه في كيس داخل الكيس 30 .

فتكون عندنا أكياس طبيعية 0 ، 1 ، 2 ... , 30 .

وداخل كل كيس طبيعي نضع أكياس داخلية بحيث كل كيس داخلي يجمع الأعداد العشرية التي لها نفس عدد الأرقام بعد الفاصلة.

أي مثال ذلك العدد 30.12361 عنده خمس أرقام بعد الفاصلة فنضعه مع 30.59387 داخل كيس رقم خمسة و معه غيره ممن يشابهه أي هي الأعداد التي بين 30.00001 و 30.99999 فكلها في كيس واحد داخل الكيس 30 .

فكما ترى عددها منته وكلها في كيس داخل الكيس 30 .

ونكرر نفس الفعل من أجل الأعداد ذات ست أرقام بعض الفاصلة و سبع و ثمانية وهكذا كل منها في كيس على حدى.

إذن عدد الاكياس الداخلية غير منته لكنها مرقمة : صفر رقم بغد الفاصلة ، رقم بعد الفاصلة ، رقمان، ثلاثة...

التلميذ : إذن الأكياس الداخلية قابلة للعد داخل كل كيس طبيعي فهي تبدأ من 0 وتسير بالأعداد الطبيعية 1 ، 2....

الأستاذ : نعم لكن كم لدينا من كيس خارجي طبيعي؟

التلميذ عندنا عدد لا نهائي لكنها مرقمة بالأعداد الطبيعية كذلك.

الأستاذ : الآن أنظر كيف سنسحب و نعد هذه القريصات،

سنخرج من الكيس الأول كيسا داخليا ثم نخرج منه قريصة

ثم نخرج من الكيس الثاني كيسا داخليا فنخرج منه قريصة

ثم نعود للكيس الداخلي السابق فنخرج منه قريصة

ثم نعود للكيس الداخلي الثاني فنخرج منه قريصة



ثم نزيد كيسا خارجيا ثالثا فنسحب منه كيسا داخليا و منه نسحب قريصة و نواصل هكذا لكن بشرط إذا نفذ كيس داخلي سحبا غيره من كيسه الخارجي.

التلميذ : هكذا سنعدها كلها....

الأستاذ : نعم فهنا الأكياس الداخلية كلها منتهية فلا مشكلة في السحب منها فمتى انتهي أحدها سحبنا من آخر ففي الحقيقة لو تأملنا جيدا وجدنا الأعداد العشرية مجرد اتحاد عدود لمجموعات قابلة للعد فهي أكياس منتهية من القريصات أي كتابتها العشرية منتهية، عددها قابل للعد أي طول الكتابة غير محدد لكن عدود ، داخل أكياس قابلة للعد أي جزؤها الطبيعي قابل للعد ولذاك استطعنا عدها.

التلميذ : لكن ماذا عن الأعداد الناطقة ؟

الأستاذ : لا يوجد فرق كبير مع الأعداد العشرية فالأعداد الناطقة تشملها لكن تزيد عليها بالأعداد التي لها كتابة دورية انطلاقا من رتبه كالعدد ....30.12361361361361 بتكرار 361 في نهايته.

لكن هذا ليس مشكلا فيمكن وضعه في الكيس الداخلي السابق للعدد 30.12361 فيوضع بجانبه فكأننا عددنا قريصة العدد 30.12361 مرتين فقط، ففي النهاية نفس الطريقة السابقة في السحب يمكننا تطبيقها هنا.

لكن المشكل هو في الأعداد الحقيقية

فالعدد الحقيقية له كتابة عشرية كيفية قد تكون غير منتهية فلنحاول تطبيق الطريقة السابقة ولننظر ماذا يحدث

لكن نحتاج تغير طريقة الكيس الداخلي حتى يتسع للأعداد الحقيقية ففي الطريقة السابقة كان يجمع الأعداد العشرية التي لها نفس عدد الأرقام بعد الفاصلة لكن هنا لا نستطيع فعل ذلك لأن الكتابة العشرية للأعداد الحقيقية قد تكون غير منتهية.

لنستعمل طريقة أخرى، فالكيس الخارجي كما سبق نتركه للجزء الطبيعي.

ثم في الأكياس الداخلية نضع الأعداد التي تتطابق في الرقم الأول من كتابتها العشرية

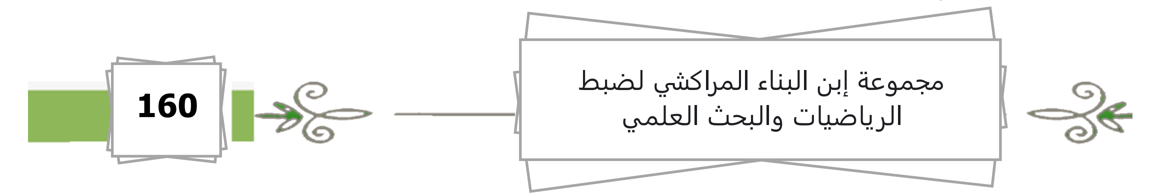
فمثلا ...3.12 و ...3.145 نضعها في كيس واحد لأن رقمهما العشري الأول بعد الفاصلة هو 1 .

نلاحظ أنه سيكون لدينا عشر أكياس داخلية ممثلة بـ 3.0 ، 3.1 ، 3.2 ، ... 3.9 فكل منها يمثل عن تطابق رقم بعد الفاصلة

ثم في كل كيس داخلي نكرر نفس العملية ، نضع أكياسا داخلية أخرى في كل منها الأعداد التي تتساوى في الرقم العشري من الرتبة الثانية و نواصل هكذا كيس داخل كيس.

إذن لدينا في كل كيس عشرة أكياس وهكذا.

ثم نحاول السحب الآن : لنسحب كيسا داخليا من الكيس الأول الخارجي ثم نسحب كيسا من هذا الكيس الداخلي و هكذا ، فهل سنستطيع إتمام السحب ؟



التلميذ : لا فكلما فتحنا كيسا داخليا وجدنا عشرة بداخله.....

الأستاذ نعم ففي الحقيقة لو نظرت في كيس داخلي لوجدته تماما نفسه مجموعة الأعداد الحقيقية فهو مكون من عشرة أكياس مكونة من عشرة أكياس ... فعندنا 10^N من الأكياس .... فالفرق بينها و بين الأعداد الناطقة أنه عند فتح الأكياس الناطقة الداخلية نجد عددا منتهيا من الأعداد أما الحقيقية فكلما فتحت كيسا وجدت عشرة بداخله فلا يمكنك عدها بل لا يمكنك عد أي كيس داخل كيس.

كنتور استعمل طريقتين لبرهنة عدم قابلية عد الأعداد الحقيقية ، أحدها بالقياس و الثانية هي هذه لكن بطريقة مختلفة فهو اكتفى بالكتابة الثنائية للأعداد فمن المعلوم أنه يمكنك كتابة أي عدد بالصفر و الواحد ، فأكياس كنتور فيها كيسين وإن كان لا يسميها أكياسا، كلما فتحت كيسا وجدت كيسين أي قوة مجموعة الأعداد الحقيقية هي 2^N و هي ذاتها قوة أجزاء مجموعة أجزاء مجموعة الأعداد الطبيعية.

هذا تبسيط لطريقة كنتور لكن طريقته الحقيقية هي بدراسة المجال بين الصفر و الواحد بوضع الأعداد الحقيقية في عمود قابل للعد فتصور أنه يمكنه عدها في عمود ، مثلا هكذا:

0.101...
0.10011...
0.01110...
0.10011...
...

ثم قال لو صنعت عددا حقيقيا انطلاقا من هذا العمود بحث يخالف كل سطر في عدد عشري من كتابته ، فمثلا في السطر الأول لدينا ...0.101 فسأختار عكس 1 الموجود في الرتبة الأولى من كتابة عدد السطر و بالنسبة للثاني يخالفه في رتبته الثانية فسأختار عكسه و هكذا لكل رتبة أخالف الرقم العشري لعددي مع الرقم العشري للعد في السطر فيكون لدي ...0.0100 ففي النهاية تحصل كنتور على عدد غير موجود في عموده لأنه يختلف عن عدد كل سطر في رقم على الاقل.

فبرهن كنتور عدم إمكانية وضع الأعداد الحقيقية في عمود مرتب حسب ترتيب الأعداد الطبيعية.

التلميذ : أفضل طريقة الأكياس والقريصات فهي أسهل ههههه

الأستاذ : نعم فهي تبين العلاقة بين عدد عناصر مجموعة الأعداد الحقيقية و عدد عناصر مجموعة أجزاء الأعداد الحقيقية.

استطاع كنتور أن يبين أن قوة أو قدرة أو عدد عناصر مجموعات الأعداد المشهورة تبدأ بقدرة N ثم مجموعة أجزائها و هي مساوية لقوة R أو ما يسمى بقوة المستمر ثم مجموعة أجزائها P(R) و هكذا...

وبين أن الأعداد الناطقة قابلة للعد بل حتى الجبرية قابلة للعد، وبين أن الجداء الديكارتي لمجموعة غير منتهية في نفسها له نفس قدرة المجموعة و أن المجموعة غير المنتهية يمكنها أن تقابل جزء غير منته منها.



بل استطاع صناعة تطبيق يقابل القطعة المستقيمة بالمربع و هنا لم يصدق عينيه كيف لسطح في بعدين أن يقابل قطعة في بعد واحد ؟

حتى أن كانتور قال لصديقه ديديكاند في رسالته الشهرية أنا أراه لكن لا أصدقه....

التلميذ : عجيبة المالانهاية

الأستاذ : نعم هي المالانهاية المجموعاتية فهي تخالف الحدس، لكن سؤال بقي يشغل بال كنتور ، هل توجد مجموعة قدرتها بين قدرة الأعداد الطبيعة و قدرة الأعداد الحقيقية ؟

وهنا طرح كنتور سؤالا بقي لعقود يعرف بمسألة فرضية المستمر حتى أن هلبرت وضعه كأول سؤال في مسائله الشهيرة.

فرضية المستمر تقول أن أي جزء من مجموعة الأعداد الحقيقية إما منته أو قابل للعد أو بقوة المستمر أي بقوة R

كان يجب انتظار قدوم غودل سنة 1938 أين بين أن إضافة فرضية المستمر إلى النظام المسلماتي ZF لا يناقضه.

ثم أنهى المسألة بول كوهين سنة 1963 حين بين أن فرضية المستمر مسألة غير قابلة للتقرير في نظام ZFC فهي مسألة خارجة عنها أي لا هي خاطئة ولا هي صحيحة هي مسألة منفصلة تماما على المسلمات المعروفة.

هذه يا ولدي باختصار قصة العد وعدم القدرة على العد فلو نظرنا في المسألة لوجدنا العد مجرد اختيار متتابع.

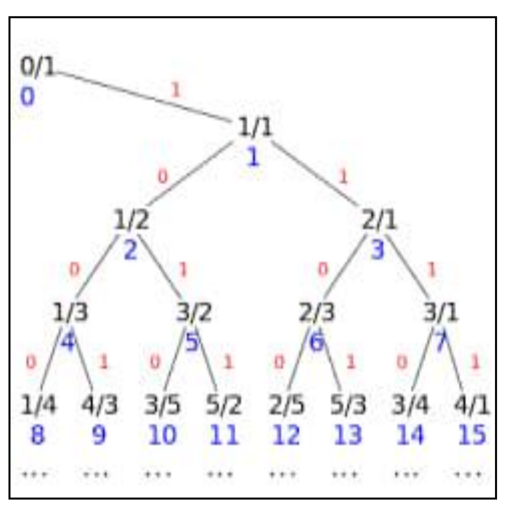
أما عدم القدرة على العد الذي هو يقابل مجموعة الأعداد الحقيقية فهو اختيار اختيارين في آن واحد لاختيارين و هكذا كشجرة متفرعة كلما سلكت غصنا تفرع لغصنين.

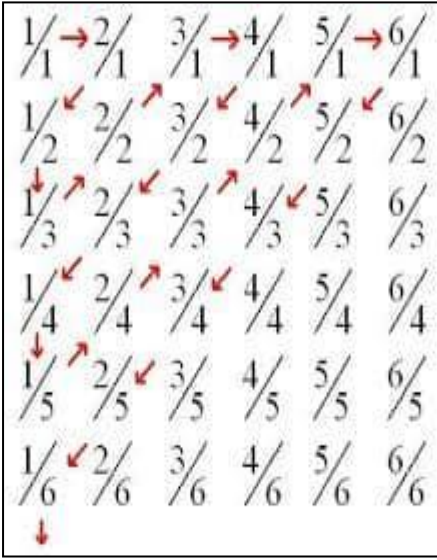
و هذا ما يفسر أن مجموعة كنتور التي صنعها لبيان وجود مجموعات مهملة و غير قابلة للعد ، غير قابلة للعد.

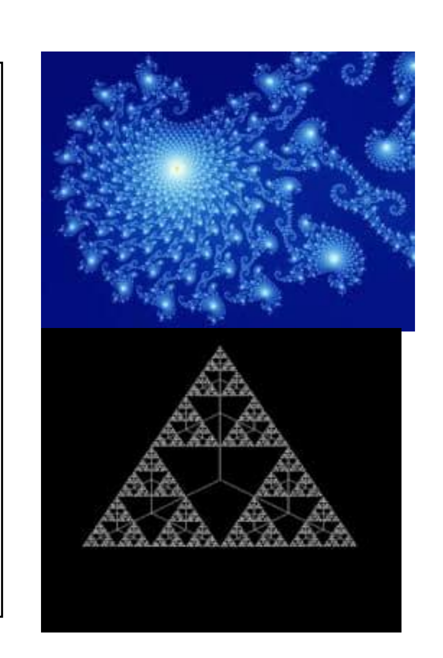
فقد صنعها كنتور من خلال أخذ المجال بين الصفر و الواحد ثم يقسمه على ثلاث و ينزع وسطه ثم يأخذ كل قسم من القسمين الباقيين فيقسمه على ثلاث و ينزع وسطيهما ثم يواصل العملية هكذا فيصنع مجموعة قياسها صفر و غير قابلة للعد، فكما ترى هذا اختيار متفرع.

في الحقيقة كنتور فهم أصل المشكلة و هو الخيار المتفرع فهذا هو الذي ولد عدم قابليه العد.













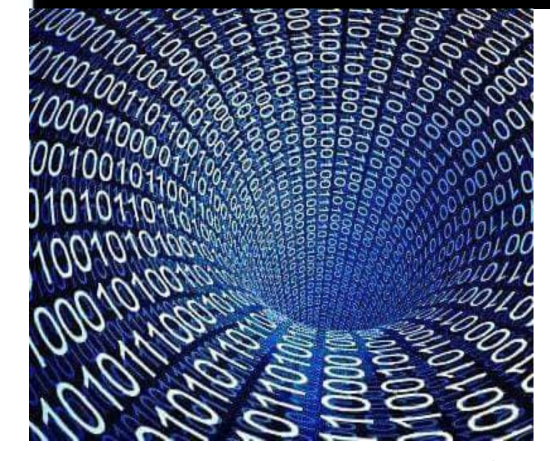


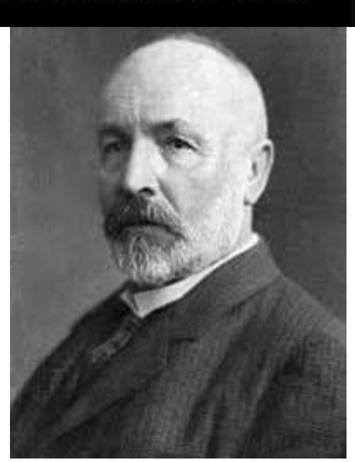







Repères historiques sur les fondements mathématiques depuis le début du XXᵉ siècle





المشاغب وعد مجموعة الأعداد الحقيقية

عندما نقول إنه لا يمكن مقابلة الاعداد الحقيقية بالطبيعية أي غير قابلة للعد إنما نقوله في نظرية المجموعات ZFC

أي انه لا يمكن مقابلتهما بمفهوم المجموعات فالتطبيق مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي.

لكن لا يمنع مقابلتهما بمفهوم آخر غير المجموعة فيمكن عد الاعداد الحقيقية لكن بتطبيق ليس بمجموعة إنما يكون له مفهوم آخر خارج نظرية ZFC

عدم قابلية العد للأعداد الحقيقية نتيجة لمتناقضة راسل أي لا يمكن مقابلة مجموعة بمجموعة أجزائها وهذا غير ممكن لأننا في إطار المجموعات فمسلمات نظرية المجموعات من تفرض علينا ذلك فمتى غيرناها أمكن تغيير النتائج.



الكتابة الرياضياتية : من العدد إلى الترميز والمتغير والمجهول.

قال الله عز وجل في سورة البقرة : وَعَلَّمَ آدَمَ الْأَسْمَاءَ كُلَّهَا ثُمَّ عَرَضَهُمْ عَلَى الْمَلَائِكَةِ فَقَالَ أَنبِئُونِي بِأَسْمَاءِ هَٰؤُلَاءِ إِن كُنتُمْ صَادِقِينَ (31).

للإنسان مقدرة غير موجودة عند غيره وهي تسمية الأشياء فما من شيء إلا أمكنه وصفه واشتقاق اسم له.

يظهر ذلك جليا في حياتنا اليومية فلو سألت أحدهم هل اشتريت خروف العيد فسيجيبك نعم لكن لو سألته بكم يباع الخروف في السوق فسيجيبك كذلك بثمنه رغم أن لفظ الخروف الأول يعني به خروف معين موجود في منزله لكن الخروف الذي يباع في السوق يقصد به أي فرد من جنس الخرفان.

فالإنسان لا يكتفي بتسمية الأشياء فقط بل يصنفها في عائلات ويجرد أوصافها ليعطيها تسميات كذلك.

فالقط من السنوريات والسنوريات من الحيوانات والحيوانات من المخلوقات فكل هذه ألفاظ كل منها أعم من سابقه ويدل على مجموعة أوصاف.

فالإنسان يفرق بين الشيء بعينه وبين أوصافه التي يشترك بها مع أفراد جنسه.

فكل منا إنسان والفرق بين كل منا والإنسان أننا أفراد أما لفظ إنسان فهو جنس البشر.

فإذا أردنا شرح وصف يشترك فيه جميع البشر فنقول للإنسان مقدرة على النطق والتفكير فهذا الوصف ينطبق على كل فرد منا أو بالأحرى ينطبق على كل من صح عليه تسمية إنسان.

البشر يستعمل هذه الطريقة في التسمية كثيرا في حياته فإشارات المرور مثلا ما هي إلا طريقة ترميز لمفاهيم مجردة تعارفنا عليها.

الرياضيات كعلم لم يخالف غيره في هذه القاعدة فقد قام البشر بإعطاء تسميات لمفاهيمها بدأ من مفهوم العدد.

فما هو العدد 2 ؟ العدد 2 ما هو إلا ترميز لتكرار 1 مع نفسه.

فالبشر لم يكتفوا فقط بتسمية الأعداد بل أعطوها ترميزات والفرق بين التسمية والرمز أن التسمية لغوية أما الرمز فكتابي.

فائدة الترميز الاختصار على عكس التسمية التي بطبيعتها اللغوية تكون طويلة الكتابة.

فلو أخذنا مثلا العدد مليون وكتبناه على أصله لكتبنا 1 و 1 و ... مليون مرة فهذا يكاد يكون مستحيل الكتابة لذلك اختصر العرب هذا في قولهم ألف ألف فهي تسمية مختصرة لهذا التكرار.

ثم استعملنا اللفظ اللاتيني مليون

ثم الترميز 1000000 وهو أسهل كتابة.

تصوروا لو أردنا وصف عملية هندسية مثل:

مساحة أرض مربعة لها طول ضلع معين إذا أضفنا لها مساحة أرض مستطيلة لها نفس الطول مع طول ضلع الأرض الأولى وعرضها متر ، كل هذا يساوي 5 متر مربع فكم طول ضلع الأرض الأولى ؟



كتابة هذه المسألة فقط تعطي وجعا للرأس رغم أن هذه هي الرياضيات التي بدأ بها العرب قبل أن يخترعوا الترميز في أزمنة متأخرة من حضارتنا.

فالترميز في الرياضيات يختصر المفاهيم كتابيا فبدل أن نقول عندنا متغير حقيقي ونتعامل مع هذه الجملة في جميع المراحل الحسابية فيكفي أن نرمز له بـ x .

ف x مجرد رمز يحل محل التسمية فهي طريقة كتابة تدل على مفهوم يمثل جنس العدد.

وبالمناسبة أصل x حرف الشين العربي ذلك أن العرب من أدخلوه كمجهول للتعبير عن شيء ومن المفارقة أننا أعدنا تعريبه لنجعل اسم المتغير س.

كما ذكرنا سابقا الفرق بين لفظ خروف وخرف في بيتي وخروف في بيتك فكذلك هو نفس الفرق بين x كرمز لمتغير حقيقي وإعطائه قيمة معينة ك 1 و 2 و pi .

فالمتغير هو جنس أما العدد فهو فرد من أفراده.

فالجنس يمثل الوصف المشترك لجميع أفراده ويمكنه أخذ مكان أي أحد منها بشكل بدلي فأنا إنسان وأنت إنسان وكلانا ينتمي لجنس الإنسان.

لكن ما الفرق بين المتغير x والمجهول x ؟

حرف x ترميز يظهر في كليهما لكن المتغير يعبر عن جنس أما المجهول فهو عنصر لم نحدده بعد.

فإذا تأملنا كل ما سبق سنفرق بين مفاهيم متعددة:

الترميز وهو طريقة كتابية تعبر على مفهوم معين ك x للأعداد الحقيقية.

المتغير وهو جنس أفراد تجمعها أوصاف معينة كالأعداد الحقيقية

المجهول وهو فرد لم نحدده بعد كحل معادلة $x^2-1=0$ في مجموعة الأعداد الحقيقية.

ونشير أخيرا إلى أن الكتابة الرياضية ليست مجرد كتابة جامدة بل هي كتابة خوارزمية يمكننا تحويلها بقواعد متفق عليها مثل الخوارزميات الحسابية في النظام العشري: $100\times15 = 1500$

وخوارزميات القوى

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$a^n \times a^m = a^{(n+m)}$$

وخوارزميات المعادلات:

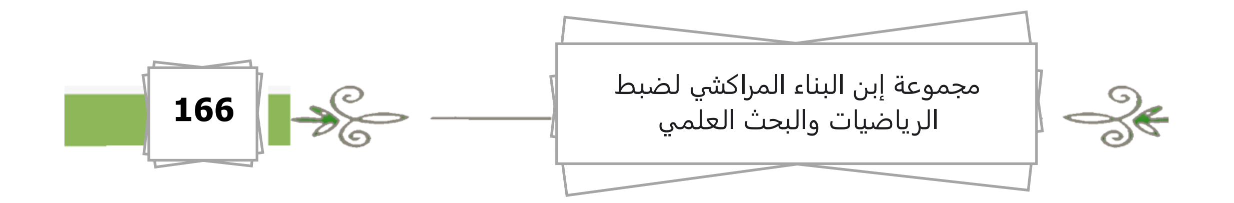
$$x + x -2 = 2x -2$$

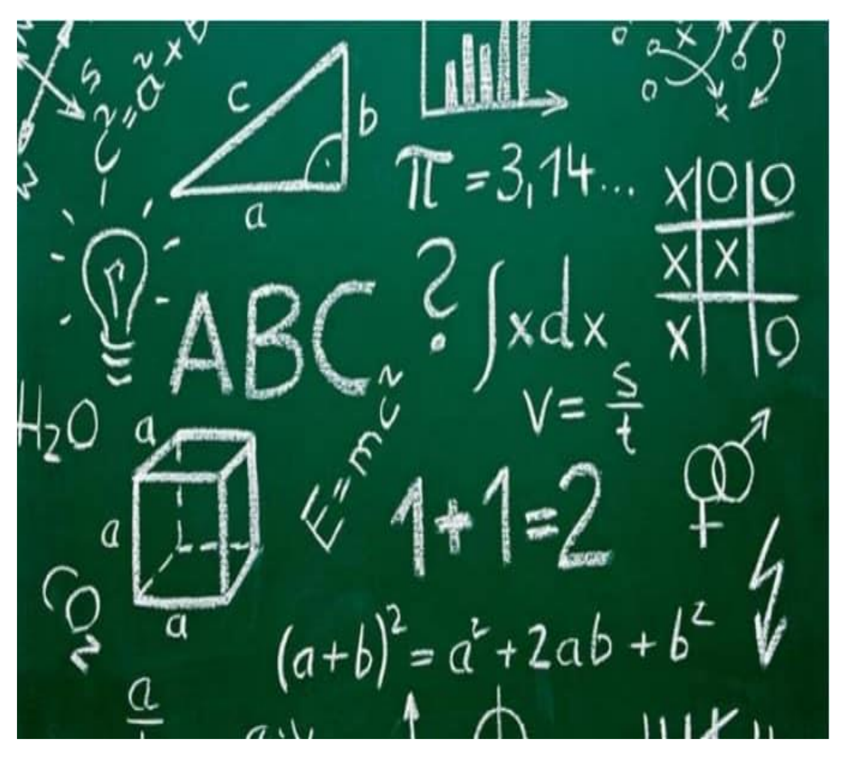
والمتراجحات

$$x > y \Rightarrow 2 x > 2 y$$

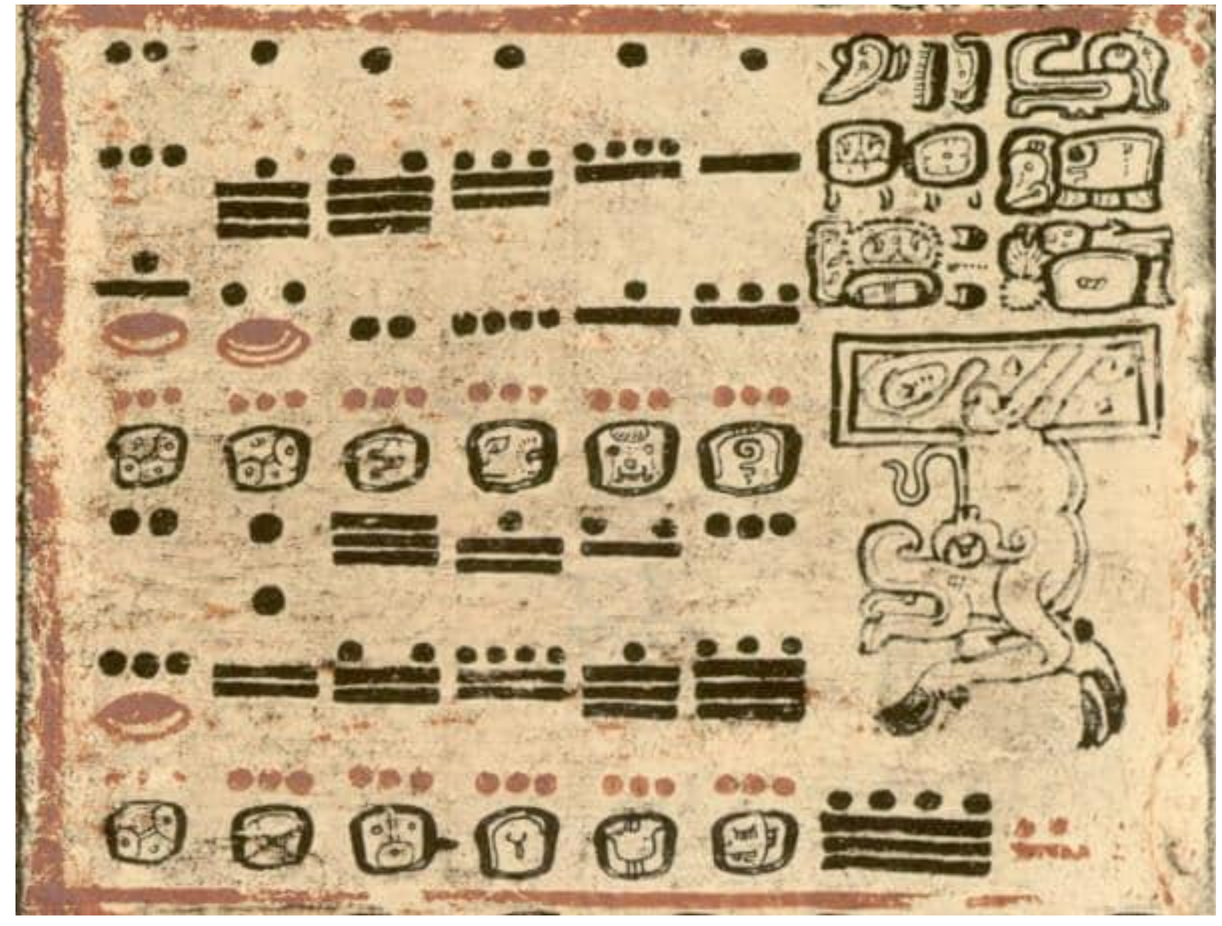
.....

وحتى المنطق والمجموعات فكل كتاباتها كتابات خوارزمية تسهل تحويل القضايا وربطها منطقيا.




π = 3,14...
ABC
∫xdx
v = s/t
E=mc²
1+1=2
(a+b)² = a²+2ab+b²
H2O
CO2





عندما يبدع أولر في حل مسألة بال

مسألة بال نسبة إلى مدينة بال السويسرية و تعرف كذلك بمسألة مانغولي نسبة إلى بييترو مانغولي والذي طرحها سنة 1644 ثم درسها بارنولي المولود في بال : وهي حساب نهاية مجموع مقاليب مربعات الأعداد الطبيعية غير المعدومة.

قام أولر المولود ببال سنة 1735 بشيء جنوني إذ أخذ النشر المحدود للدالة الجيبية فقسمه على x ثم اعتبره ككثير حدود ينعدم عند كل مضاعفات π ومنه هي تكتب كجداء غير نهائي لكثيرات حدود أحادية جذرها مضاعف ل π ثم حسب معاملات هذه الجدآت و قارنها مع معاملات النشر المحدود فوجد من ناحية معامل 2^x يساوي سلسلة جمع مقاليب مضاعفات مربعات الأعداد الطبيعية غير المعدومة مقسومة على π مربع و من ناحية أخرى مقلوب !3 أي مقلوب 6 فاستنتج أن السلسلة تتقارب إلى π مربع على 6.....

بالطبع هذه الطريقة لا تعد برهانا لكنها أعطت قيمة السلسلة و جعلت أولر مشهورا ، سنوات بعدها قام آول بتقديم برهان مضبوط عن طريق التكاملات.

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\frac{\sin(x)}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots$$

$$\frac{\sin(x)}{x}=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots$$
$$=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

$$-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right)=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$-\frac{1}{6}=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

نظرية المجموعات



يا أستاذ حدثني عن المجموعة ؟

المجموعة هي إمكانية تمييز عناصر بخصائص انطلاقا من عدم التمييز والذي نصطلح عليه بالمجموعة الخالية .

نقول إمكانية التمييز احترازا من عدم الإمكانية كمجموعة جميع العناصر فهذه لا يمكن تمييزها فهي غير موجودة.

مثلا لو أخذت من مجموعة أقلام قلمين لأشكل مجموعة فكل ما فعلته هو تمييز القلمين عن الباقي وبدون أن يتغير منهما شيء وهذا ما يفسر انتماء العنصر لأكثر من مجموعة إذ لا أحد يمنعني من استعمال أحد القلمين في إنشاء مجموعة أخرى.

في نظرية المجموعات نسلم بوجود المجموعة الخالية فهذه أول مجموعة ثم نسلم بإمكانية صناعة مجموعة انطلاقا من عنصر فيكون الوحيد فيها.

إذن الأصل المجموعة الخالية ثم تشكيل المجموعات انطلاقا من عناصر.

أما مجموعة المجموعات فهي غير موجودة وهذا ما يسمى بمتناقضة راسل ، فلو فرضنا أن هناك مجموعة عناصرها مكونة من جميع المجموعات التي يمكن أن نتصورها فسنحصل على تناقض بهذه القضية:

داخل هذه المجموعة، نكون مجموعة جزئية المتكونة من العناصر التي لا تنتمي لنفسها، و نسميها المجموعة م.

السؤال المطروح : هل المجموعة م تنتمي لنفسها أو لا ؟

إن قلنا لا تنتمي لنفسها فحسب تعريف المجموعة م بكونها مكونة من العناصر التي لا تنتمي لنفسها فلابد أن تنتمي لنفسها لانها داخلة في تعريفها و هذا تناقض.

و إن قلنا المجموعة م تنتمي للمجموعة م فحسب تعريف م بكونها مكونة من العناصر التي لا تنتمي لنفسها فلا بد أن لا تنتمي لنفسها و هذا تناقض كذلك....

إذن لا توجد مجموعة مكونة من جميع المجموعات التي يمكن تصورها.

وأصل المشكل أنه لو تصورنا مجموعة مكونة من جميع المجموعات فستشمل نفسها كعنصر فنحصل على دور إذ لبناء هذه المجموعة نحتاج لنفسها لأن البناء يتم عن طريق تمييز العناصر فكيف نميز هذه المجموعة كعنصر لبنائها كمجموعة ونحن لم نبنها بعد ؟

لذلك نظرية المجموعات ZF أضافت شرطا للخروج من هذا المأزق وهو أن لا تنتمي المجموعة لنفسها.



المجموعة...

المجموعة في الرياضيات مجرد تمييز لعناصر عن غيرها لذلك المجموعة هي العناصر و العناصر هي المجموعة فمتى حددت العناصر التي تنتمي إلى مجموعة فقد حددت المجموعة.

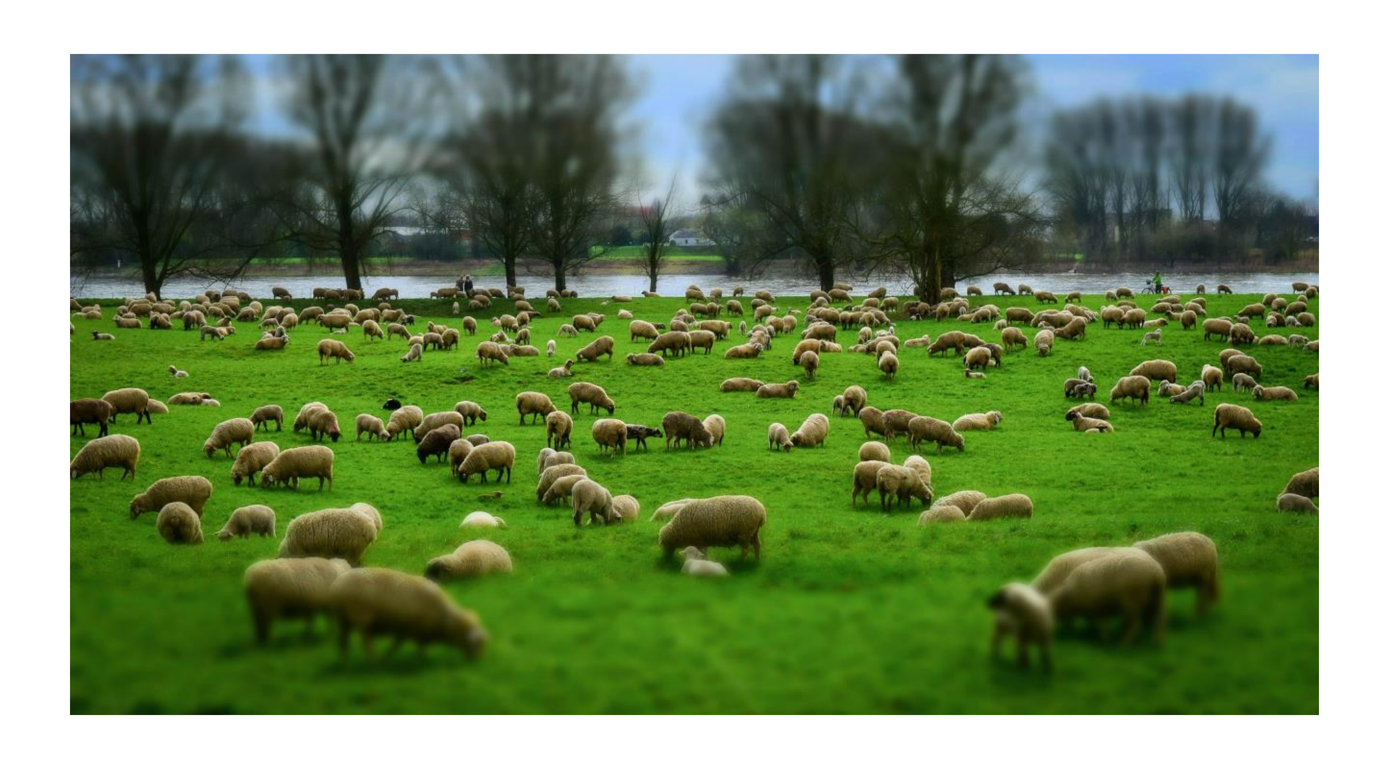
ولهذا تساوى المجموعات يعرف على وجود عناصر كليهما في الآخر و لهذا توجد مجموعة خالية واحدة فقط في نظرية المجموعات.

وقد يقال ما هي المجموعة الخالية ؟ المجموعة الخالية هي عدم تمييز أي عنصر عن غيره.

فالمجموعة نشأت عن قابلية البشر لتمييز عناصر عن غيرها في الذهن.

أما الصورة الذهنية الملموسة التي يبدأ بها الأطفال ككيس فيه حلويات أو قريصات فهي صورة غير مجردة تجمع الخصائص بأشيائها فمتى جردناها اختفى الكيس فلم يبقى إلا مفهوم تمييز القريصات عن بقية الأشياء.

لذلك يمر الطفل من مفهوم الكيس نحو مجموعة أغنام أين لا يوجد كيس يشملها إنما تميز عن غيرها في مكان ما بكونها أغنام لا غير.



نظرات في نظرية المجموعات

هل المجموعة سابقة للعنصر أم العنصر سابق للمجموعة وما الفرق بين الانتماء والاحتواء ؟

نظرية المجموعات لا تعطي تعريفا لعلاقة الانتماء لكن تسلم بوجودها وتعطيها تعريفا بنائيا فالعنصر ينتمي إلى مجموعة بسبب بنائها بنظرية المجموعات.

نظرية المجموعات تعرف المجموعة بعناصرها.

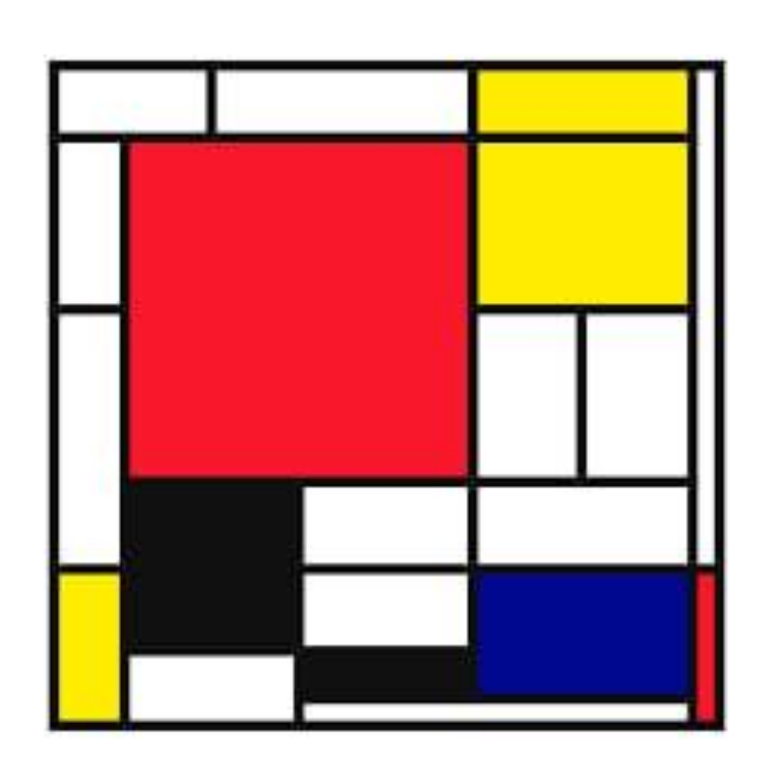
بالنسبة للاحتواء فهي علاقة معرفة انطلاقا من الانتماء فمجموعة محتواة في مجموعة إذا انتمت جميع عناصرها إليها.

من ناحية المقارنة فعلاقة الانتماء علاقة بنائية أي العنصر ينتمي إلى المجموعة لأن المجموعة بنيت به فالعنصر سابق وجودا عن المجموعة ما عدا المجموعة الخالية لذلك نسلم بوجود المجموعة الخالية ثم نصنع منها الأعداد الطبيعية فنعتبرها كعنصر.

أما الاحتواء فهي علاقة مشاركة مثلها مثل التقاطع.

كخلاصة : الانتماء علاقة مساهمة أي العنصر مساهم في بناء المجموعة.

أما الاحتواء فعلاقة مشاركة أي عناصر المجموعة ساهمت في بناء غيرها.



نظرات في نظرية المجموعات.

ما هو التعريف الرياضي للمجموعة ؟

التعريف المباشر رياضيا للمجموعة غير موجود فنظرية المجموعات تنطلق من المفهوم الحدسي والذي يربط المجموعة بمفهوم عناصر يمكن تمييزها عن غيرها.

لكن رياضيا نظرية المجموعات بنيت على مسلمات تخولنا إعطاء تعريف رياضي إصطلاحي للمجموعة وهو :

المجموعة هي كل كائن نتج من مسلمات نظرية المجموعات وأصطلحت عليه لفظ مجموعة.

أي نظرية المجموعة تعرف المجموعة بنائيا إنطلاقا من المجموعة الخالية او عنصر او مجموعات تبنى من هذه المجموعات الأولية كمجموعة أجزاء المجموعة وإتحاد مجموعتين.

فالمجموعة وحيدة العنصر رياضيا هي مجموعة لأن نظرية المجموعات أعطت لها وجودا يصطلح عليه مجموعة إنطلاقا من المسلمة الثانية لنظرية زارميلو والتي تنص على أنه إذا كان هناك كائن A فهناك مجموعة تشمله فقط {A}

نظرية المجموعات تعرف المجموعة بنائيا فالمجموعة هي كل كائن أعطت له نظرية المجموعات وجودا كمجموعة إنطلاقا من مسلماتها.

والتعريف البنائي يجعلها تحل مشكلة متناقضة راسل فلا يمكن بناء مجموعة تشمل جميع المجموعات أو مجموعة تنتمي لنفسها.



نظرات في نظرية المجموعات.

كيف تبنى الرياضيات المجموعات وكيف تجردها عن الواقع ؟

نظرية المجموعات تبني المجموعة خوارزميا إنطلاقا من التسليم بالأفكار الحدسية الأولية.

فمثلا لصناعة مجموعة انطلاقا من عنصرين يكفي تطبيق مسلمة التزاوج أو الإقتران من نظرية المجموعات لزارميلو والتي تقول:

مهما كان الكائنين a و b فإنها توجد مجموعة C تحقق:

مهما يكن x : x ينتمي إلى C إذا وفقط إذا كان x يساوي a أو b بمعنى $c = \{a,b\}$

إذن نظرية المجموعات تسلم بتكافؤ تمييز عنصرين لتشكيلهما لمجموعة وهو مفهوم أولي فالبناء هنا هو تسليم وجودي.

وكذلك نفعل نفس الشيء بالتسليم بوجود المجموعة الخالية ومسلمة الاتحاد وكذا مجموعة المجموعات الجزئية.

لكن لو تأملنا جيدا نلاحظ أن هذه المسلمات تعرف خصائصا لا كائنات فمثلا لو رجعنا للمثال الأول فصغناه بشكل مجرد بتعويض اسم مجموعة بكائن و الانتماء بعلاقة R فسنجد ان التعريف لا يتغير:

مهما كان الكائنين a و b فإنه يوجد كائن C يحقق:

مهما يكن x : x متعلق بعلاقة R بـ C إذا وفقط إذا كان x يساوي a أو b

فهنا عوضنا مفهوم الانتماء لمجموعة بمفهوم العلاقة R لكن نلاحظ أننا نبقى في نفس التعريف.

إذن مفهوم علاقة الإنتماء لا يغير شيئا في نظرية المجموعات إذا البناء كله على مفهوم التساوي وعلاقة كيفيةR

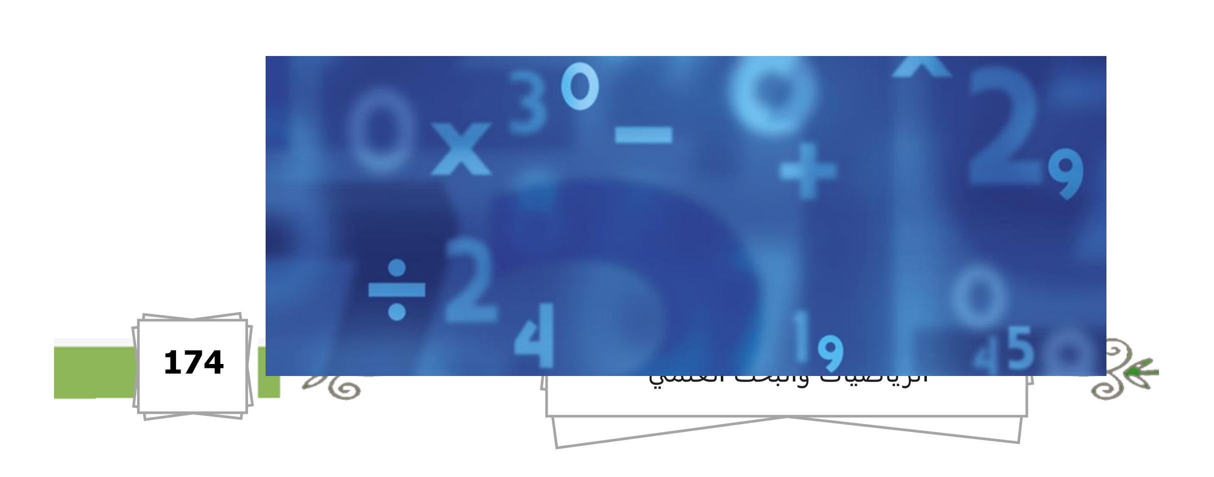
ومفهوم التساوي قد تكلمنا عليه سابقا وهو يعني تحقيق نفس الخصائص مهما كانت الخاصية.

إذن نظرة المجموعات مبنية على العلاقة بين خصائص الكائنات والتي ننظر لها من ناحية الخصائص.

إذن الرياضيات مبنية على الخصائص والعلاقات وهذه طريقتها لتجريد الواقع.

لكن كيف أمكننا إعطاء معنى للوجود ؟ امكننا ذلك بالمسلمات الوجودية كوجود المجموعة الخالية وكان هذا كافيا لبناء جميع المجموعات المشهورة كالمجموعات العددية.

إذن الرياضيات مبنية على التسليم بوجود كائن ثم بناء متعلق بعلاقة وخصائص ولا يهم في ذلك تسمية الكائنات بعناصر او مجموعات وللعلاقة بالإنتماء.



نظرات في نظرية المجموعات

أزمة الأساسيات، عندنا كادت الرياضيات أن تنهار : هل مجموعة جميع المجموعات موجودة ؟

متناقضة راسل الشهيرة حطمت أعمال فريج بعد أن أمضى سنوات عديدة في صناعة نظرية مكتملة للمجموعات والتي تسمى بالنظرية الساذجة للمجموعات.

أمضى غوتلوب فريج بعد ثلاثين سنة في صناعة نظرية مكتملة للمجموعات والتي تسمى بالنظرية الساذجة فلما كان على وشك نشرها تلقى رسالة من راسل حطمت عمل عمره وفتحت باب ما يسمى أزمة الأساسيات في السنوات الأولى من القرن العشرين، هل الرياضيات مبنية على تناقض ؟

متناقضة راسل تنص على أن مجموعة جميع المجموعات غير موجودة لأنها لو كانت كذلك لشملت مجموعة أجزائها وهذا مستحيل لأنه لا يمكن أن نجد تطبيقا غامرا من مجموعة نحو مجموعة مجموعات أجزائها.

أحدثت متناقضة راسل ما يسمى بأزمة الأساسيات في بداية القرن العشرين والتي دفعت العلماء إلى إعادة بناء الرياضيات على أسس سليمة.

هذه المتناقضة تستعمل مسلمة بسيطة وهي أننا يمكننا صناعة مجموعة من أي خاصية مفهومة.

يتم برهان عدم وجود تطبيق غامر من مجموعة نحو مجموعة أجزائها بالخلف:

نفرض أنه موجود وغامر نسميه T من A نحو مجموعة مجموعاتها الجزئية P(A)

ثم لنأخذ المجموعة الجزئية M المعرفة كالتالي:

تشمل كل عنصر x من A لا ينتمي لصورته بالتطبيقT

$$M = \{ x \text{ in } A : x \text{ not in } T(x)\}$$

بما أن M مجموعة جزئية من A اذن هي تنتمي ل P(A)

وبما أن T غامر فالمجموعة M لها سابقة y بحيث $T(y) = M$

السؤال هل y تنتمي إلى M او لا ؟ إن قلنا تنتمي إلى M أي $y \in M$

فحسب تعريف M كل عناصرها لا تنتمي إلى صورها أي $y \notin T(y) = M$

وهذا غير ممكن وإن قلنا لا تنتمي ل M أي $y \notin M$

فحسب تعريف M فإنها تشمل كل العناصر التي لا تنتمي إلى صورها بالتطبيق T لكن y تحقق الشرط إذن تنتمي ل M وهذا غير ممكن كذلك.

ففي كلا الحالتين نصل إل تناقض.

إذن التطبيق T غير موجود

رغم أن أعمال فريج لم تكلل بالنجاح لكن شكلت مرحلة مهمة في إنشاء نظرية المجموعات ZF وZFC

ZFC=Zermelo–Fraenkel set theory with the axiom of choice

ZFC=Zermelo–Fraenkel set theory with the axiom of choice excluded



ذكر راسل أنه توصل إلى المتناقضة بدراسة برهان كنتور على أن قدرة مجموعة أصغر من قدرة مجموعة مجموعاتها الجزئية.

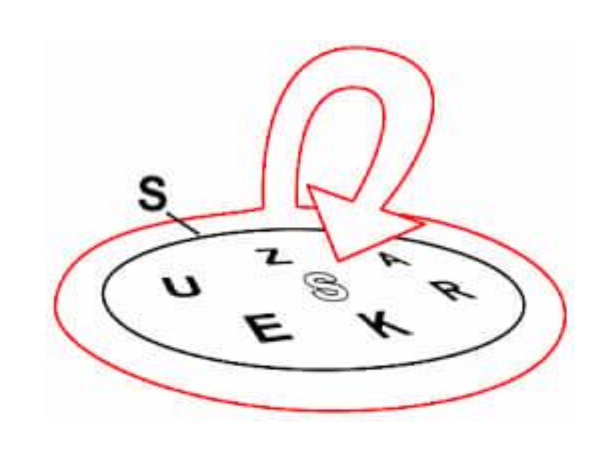
لو دققنا في متناقضة راسل لوجدنا أن أصل المشكلة الدور، فمسلمة الفهم الساذجة تمكننا من وضع وجود لمجموعة تنتمي لنفسها وهذا ما أوقعنا في التناقض فهذا تعلق لا نهائي لمجموعة بنفسها.

لتجنب ذلك قامت نظرية المجموعات ZF وبالضبط مسلمات زراميلوا منها بوضع طريقة لصناعة المجموعات بنائيا إنطلاقا من عنصر فلم تعطي إمكانية للوصول لمثل هذه المجموعات الدورية.

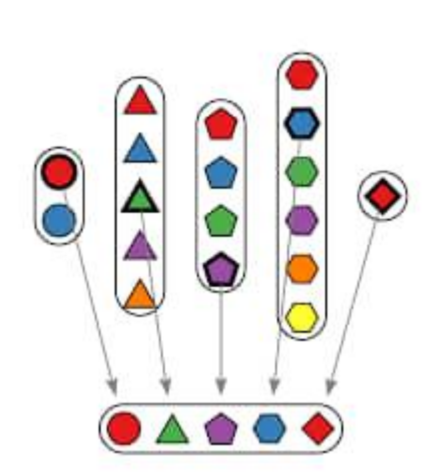
وقيدت مسلمة الفهم لكي لا تكون إلا داخل مجموعة وقيد مفهوم المجموعة لكي لا تنتمي مجموعة لنفسها.

أضيف لنظرية المجموعات ZF أي نظرية زارميلو فرانكل مسلمة الإختيار لتصبح ZFC

هذه النظرية المعتمدة اليوم في الميدان الرياضي لصناعة جميع الرياضيات والتي يجب على كل دارس للرياضيات معرفتها.









نظرات في نظرية المجموعات: هل يمكن لمجموعة أن تنتمي لنفسها ؟

في نظرية المجموعات لزارميلو لا يمكن لمجموعة أن تنتمي لنفسها.

يمكن برهنة ذلك بسهولة إنطلاقا من مسلمة التأسيس والتي تنص على أن أي مجموعة غير خالية تشمل عنصر لا يتقاطع معها.

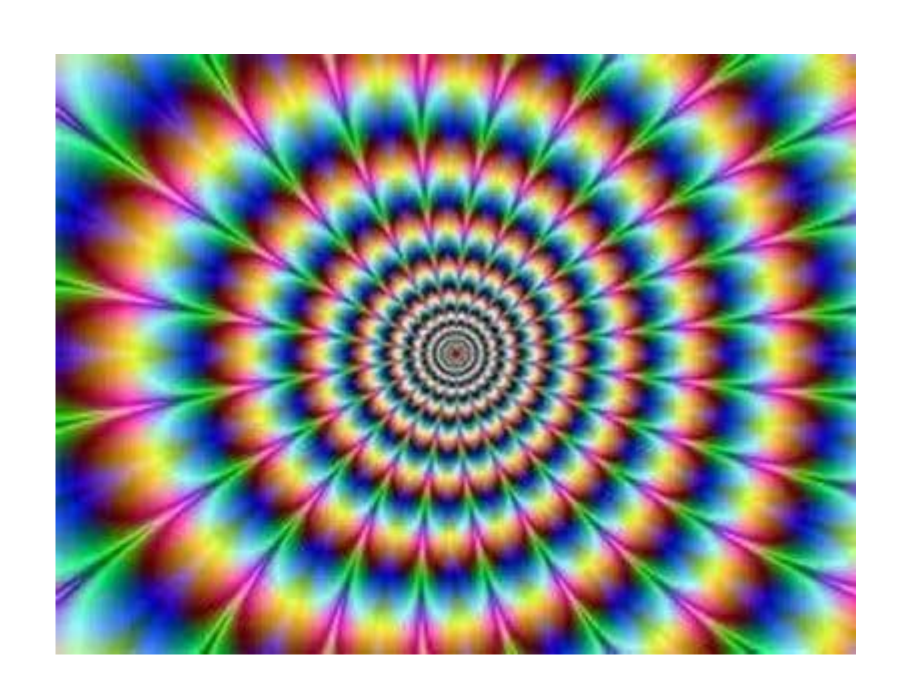
فلو فرضنا مجموعة A تشمل نفسها أي $A \in A$ واخذنا المجموعة $X = \{A\}$

فهذه المجموعة لا تحقق مسلمة التأسيس لأن X تقاطع A تعطي حتما A لأن A ينتمى للمجموعتين

$A \in A$

$A \in X$

إذن X غير خالية و تشمل عنصرا وحيدا غير منفصل عنها.



لنضبط الأساسيات : نظرية المجموعات ZFC

في بداية القرن العشرين ظهرت ما يسمى بأزمة الأساسيات في الرياضيات، ذلك أن الكثير من المفاهيم الرياضياتية كانت مبنية على حدسيات كمفهوم المجموعة والخاصية وعموما ما يسمى بنظرية المجموعات الساذجة.

في هذه النظرية يمكن لكل قضية مفهومة صناعة مجموعة مما أدى إلى اكتشاف تناقضات فيها أشهرها متناقضة راسل والتي تبين أن مجموعة جميع المجموعات غير موجودة فليس كل قضية تصنع مجموعة.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Crise_des_fondements

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Russell

قام العديد من العلماء بضبط نظرية المجموعات على نظام متين يسمى بنظرية المجموعات ZFC وعليها تم إعادة بناء جميع الرياضيات المعاصرة.

في مقالنا هذا سنتطرق لمسلمات نظرية المجموعات ZFC ببعض الشرح حتى نبسطها للقارئ.

أولا نظرية المجموعات ZF من غير C وهو رمز مسلمة الاختيار وسنعود إليه لاحقا، مكونة من مسلمات نظرية المجموعات لزارميلو مضاف إليها مسلمتين وتسمى بـ ZF نسبة ل Zermelo–Fraenkel

(Abraham Adolf Fraenkel , Ernst Zermelo)

وكما يدل عليها اسمها هي موجهة لضبط بناء المجموعات في الرياضيات.

نظرية المجموعات لزارملو:

المسلمة الأولى : مسلمة التمديد Axiome d'extensionnalité

هذه المسلمة تخبرنا أنه لا يهم كيفية بناء المجموعة إنما المهم ما هي فمتى كان للمجموعتين نفس العناصر فهما مجموعة واحدة.

أي أن المجموعة هي عناصرها ولذلك تصاغ كالتالي:

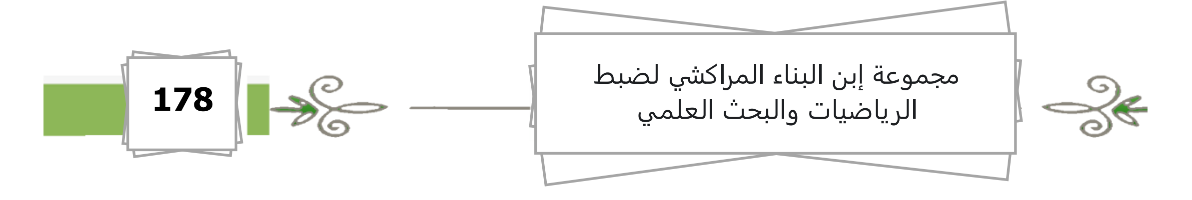
إذا كانت عندنا مجموعتان A و B وكانت عناصر A موجودة في B وعناصر B موجودة في A فإن A تساوي B :

$$\forall A, \forall B\, [\forall x\, (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B\,]$$

ونلاحظ هنا أنه استلزام $\Rightarrow A = B$

وليس تكافؤ كما يظن البعض عند تعريفهم $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

ذلك أنه لا يمكن أن ننطلق من $A = B$ قبل إعطاء معنى لهذه المساواة والمعنى المعطى للمساواة إنما يعطى بشكل عام في الرياضيات عن طريق مفهوم ليبنز الذي ينص على أن تساوي كائنين يعني أن لهما نفس الخصائص، فتعريف المساواة متقدم عن هذه المسلمات فلا يمكن إدراجه هنا كجزء منها في الحالة الخاصة للمجموعات.



للمزيد ينظر هذا الرابط

https://www.facebook.com/groups/1821825877897150/permalink/4494171777329200/

المسلمة الثانية مسلمة الأزواج وهي بنائية: l'axiome de la paire

وهي تخبرنا أنه من مجموعتين يمكننا بناء مجموعة تشملهما كعناصر أي من A و B نصنع {A,B}

إذا كانتا مختلفتين و {A} إذا كانت نفسها ونكتبها بالشكل :

$$\forall A, \forall B, \exists C\, [x \in C \Leftrightarrow (x = A \vee x = B)]$$

المسلمة الثالثة وهي مسلمة الاتحاد وهي بنائية: l'axiome de la réunion

تخبرنا أنه من مجموعة تشمل عدة مجموعات يمكن صناعة مجموعة تشمل جميع عناصر هذه المجموعات أي اتحادها.

بعبارة أخرى ما دمنا نعمل داخل مجموعة فيمكننا توحيد المجموعات.

$$\forall A, \exists C, \forall x\, [x \in C \Leftrightarrow \exists y\, (y \in A \wedge x \in y)]$$

من مسلمة الأزواج نستفيد وجود المجموعة $C = \{A,B\}$

ومن مسلمة الاتحاد نستفيد أنه يمكننا توحيد عناصرها أي وجود $D = A \cup B$

المسلمة الرابعة وهي مسلمة مجموعة أجزاء المجموعة وهي بنائية:

l'axiome de l'ensemble des parties

وهي تخبرنا بوجود مجموعة أجزاء مجموعة:

$$\forall A, \exists C, \forall x\, (x \in C \Leftrightarrow x \subset A)$$

المسلمة الخامسة مسلمة المالانهاية وهي بنائية: Axiome de l'infini

وعندها عدة صياغات نختار منها المسلمة التي تخبرنا بوجود مجموعة غير منتهية قابلة للعد مثل N فهي التي تساعدنا في صناعتها على طريقة نيومان ويمكن صياغتها بالشكل التالي:

توجد مجموعة C تشمل المجموعة الخالية كعنصر وتحقق $\forall x\, (x \in C \Rightarrow x \cup \{x\} \in C)$

فطريقة نيومان لصناعة N تنطلق من تمثيل كل عدد بمجموعة فالصفر يمثل بالمجموعة الخالية $0 = \varnothing$ ثم نضيف مجموعة لتمثيل 1 : $1 = \{\varnothing\} = 0 \cup \{0\}$ وهكذا

$$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = 1 \cup \{1\}$$

$$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = 2 \cup \{2\}$$

...

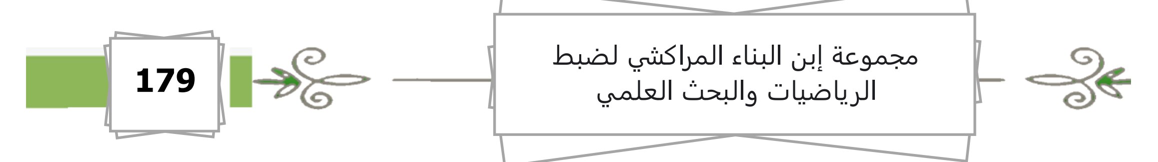
$$n+1 = n \cup \{n\}$$

فلكي نكمل العملية للمالانهاية فلابد من التسليم بذلك مهما كان n

قد تم ضمنيا التسليم بوجود المجموعة الخالية هنا لكن ستأتي مسلمة خاصة بها.

المسلمة السادسة هي مسلمة الفهم وهي بنائية: schéma d'axiomes de compréhension

وهي تنص على أن أي عبارة منطقية معرفة جيدا P وأي مجموعة A فتوجد مجموعة B مشكلة من



عناصر A التي تحقق P أي

$$\forall P, \forall A, \exists B, [\forall x (x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge P(x))]$$

هذه المجموعة قد تكون خالية.

فهذه المسلمة التي تسمح لنا بأن نعرف مجموعة حلول معادلة مثلا على مجموعة.

المسلمة السابعة هي مسلمة المجموعة الخالية فنسلم بوجودها وبها نصنع N كما تقدم.

هنا تنتهي مسلمات زارملو وللحصول على ZF سنضيف لها مسلمتين:

مسلمة التعويض Schéma d'axiomes de remplacement

تحتاج هذه المسلمة بعض التركيز لفهمها.

فهي تخبرنا أن صورة مجموعة بعلاقة دالية (relation fonctionnelle) هي مجموعة.

العلاقة الدالية ليست بمفهوم الدوال المعروف لأننا هنا ما زلنا في نظرية المجموعات لكن يمكننا أن نعرفها بعبارة منطقية F ذات متغيرين تحقق $\forall x, \forall y, \forall y' : [F(x,y) \wedge F(x,y') \Rightarrow y = y']$

فالتعريف يشبه كثيرا تعريف الدالة لكن هنا لا نذكر المجموعات.

إذن مسلمة التعويض تخبرنا أن هذه العلاقة تنقل مجموعة لمجموعة أي

$$\{\forall x, \forall y, \forall y' : [F(x,y) \wedge F(x,y') \Rightarrow y = y']\}$$
$$\Rightarrow \forall A, \exists B, \forall y [y \in B \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge F(x,y))]$$

يمكننا اعتبار مسلمة الفهم كحالة خاصة من مسلمة التعويض.

تستعمل مسلمة التعويض في نظرية قدرات المجموعات.

المسلمة الثانية التي نضيفها موجهة للتخلص من متناقضة راسل وهي **مسلمة البناء** أو **التأسيس**

Axiome de fondation

وتنص على أن كل مجموعة غير خالية تشمل عنصرا لا يتقاطع معها أي

$$\forall x [x \neq \varnothing \Rightarrow \exists y (y \in x \wedge y \cap x = \varnothing)]$$

كنتيجة من هذه المسلمة لا يمكن لمجموعة أن تنتمي لنفسها ذلك لو كانت A تنتمي ل A فبمسلمة مجموعة الأجزاء أو بمسلمة الفهم يمكننا تشكيل المجموعة $\{A\}$

وهذه لا تشمل عنصرا لا يتقاطع معها فهي في تناقض مع مسلمة البناء.

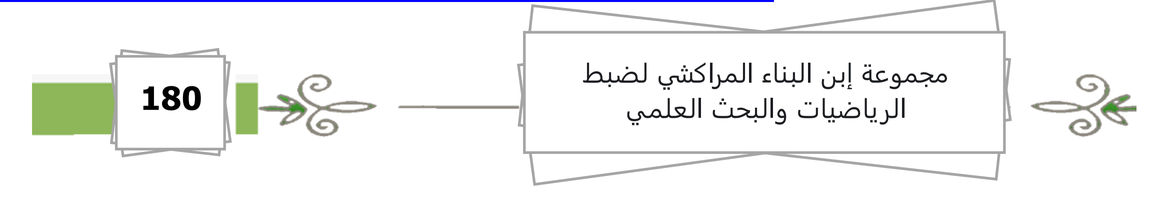
مسلمة البناء تمنع علاقات تراجعية من الشكل $x_0 \in x_1 \in \ldots \in X_n \in X_0$

فهذه نظرية المجموعات ZF وإذا أضفنا لها مسلمة الاختيار أصبحت نظرية المجموعات ZFC .

https://fr.m.wikipedia.org/…/Th%C3%A9orie_des_ensembles…

وتنص مسلمة الأختيار على أنه من كل مجموعة عناصرها مجموعات جزئية من مجموعة نسلم أنه يمكننا إرفاق كل مجموعة منها بعنصر منها أي نختار من كل واحدة عنصر فنصنع مجموعة جديدة.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Axiome_du_choix



المسلمة تبدو لأول وهلة غريبة لكن الأمر ليس سهلا عندما تكون عندنا مجموعات عددها غير قابل للعد.

لصناعة R مثلا يمكننا استعمال مجموعة المتتاليات الكوشية الناطقة فنعرف علاقة تكافؤ بين متتاليتين بـ $\lim U_n - V_n = 0$

فهذه العلاقة تشكل أصناف تكافؤ كل صنف منها هو مجموعة حسب مسلمة الفهم وهو يمثل عددا حقيقيا فلا فرق بين $1/n$,$1/n^2$

لأن كلاهما يؤول للصفر فهي متتاليات تعبر عن الصفر وكذلك $U_n = (1+1/n)^n$

و $V_n = 1 + 1/1! + 1/2! + ... + 1/n!$ فكلاهما يعبر عن العدد e

لكن لوضع هذه المجموعات كعناصر في مجموعة جديدة R نحتاج اختيار ممثل من كل مجموعة منها لتشكيلها وهذا الاختيار ممكن لو كانت هذه المجموعات قابلة للعد باختيار عنصر من كل مجموعة بعد مجموعة بالترتيب لكن مع عدد غير قابل للعد لا يمكننا استغراقها جميعا فليس لدينا إلا التسليم بإمكانيته.

فهنا نحتاج لمسلمة الاختيار.

مسلمة الاختيار تكافؤ مبرهنة زارميلو والتي تنص على أن أي مجموعة يمكن ترتيبها ترتيبا جيدا والترتيب الجيد هو ترتيب كلي مع خاصية زائدة وهو أن كل مجموعة جزئية غير خالية تقبل عنصرا أصغريا.

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Zermelo

فالمسألة كذلك مسألة استغراق فإنه يمكننا أن نرتب عناصرا باختيارها واحدة تلو الأخرى لكنها هنا قابلة للعد أما إذا لم تكن كذلك فلن نستغرقها فنحتاج للتسليم بذلك وهذا ما يعطينا مبرهنة زارملوا وتكافؤها مع مسلمة الاختيار .

و كذلك مسلمة الاختيار تكافؤ توطئة زورن والتي تنص على أن أي مجموعة مزودة بعلاقة ترتيب بحيث كل جزء مرتب منها يقبل حدا أعلى فهي تقبل عناصر أعظمية فالعنصر الأعظمي كذلك يظهر من استغراق الترتيب.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Lemme_de_Zorn

بتوطئة زورن نبرهن على وجود قاعدة لأي فضاء شعاعي وبها كذلك نبرهن مبرهنة هان باناخ والكثير من المبرهنات الأخرى.

فهذه خلاصة نظرية المجموعات وعليها تبنى جميع كائنات الرياضيات.

فالتطبيق مثلا هو مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي لمجموعتين فإذا سميناه f وكان ينطلق من المجموعة E نحو المجموعة F فهو مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي لـ $E \times F$

بحيث: $f \subset E \times F$

و تحقق الخاصيتين: $\forall x \in E, \exists y \in F : (x , y) \in f$

التي تعني أن التطبيق معرف عند كل عنصر من E



$\forall (x,y)\ ,\ (a,b) \in f : x = a \Rightarrow y = b$

وهذا يعني أن لكل سابقة صورة واحدة.

إذا اقتصرنا على الشرط الثاني فقط تحصلنا على تعريف الدالة.

على هذا التعريف لدينا $y = f(x) \Leftrightarrow (x,y) \in f$

علاقة الترتيب هي كذلك مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي لمجموعة في نفسها تحقق:

$\leq \subset E \times E$

$\forall x\ (x \in E \Rightarrow (x,x) \in \leq)$

وهذا يعني أن العلاقة انعكاسية أي $x \leq x$ الشرط الثاني غير تماثلية أي:

$\forall x, \forall y\ [(x,y) \in \leq \wedge (y,x) \in \leq \Rightarrow x = y]$

بصياغة أخرى: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

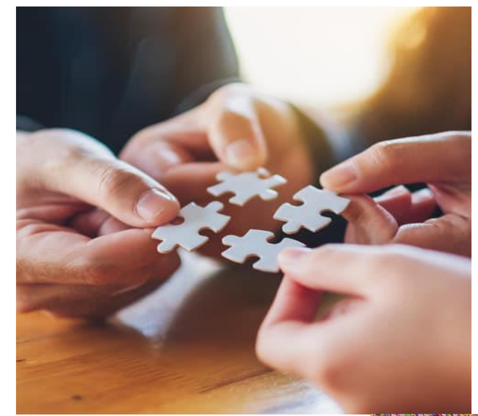
الشرط الثالث متعدية أي: $\forall x, \forall y, \forall z\ [(x,y) \in \leq \wedge (y,z) \in \leq \Rightarrow (x,z) \in \leq]$

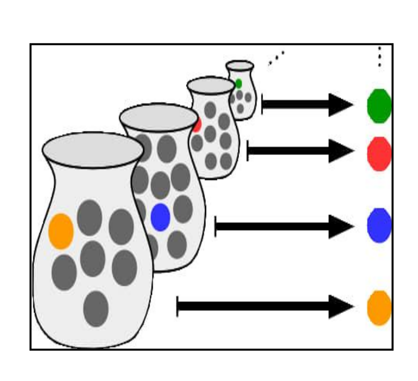
بصياغة أخرى: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

كل كائنات الرياضيات مجموعات وتصنع من نظرية المجموعات ZFC .

مجموعة بورباكي تبنت نظرية المجموعات وأعادت بناء الرياضيات عليها لكنها عوضت مسلمة الاختيار بإبسيلون هلبرت وهي مسلمة أقوى منها.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Epsilon_de_Hilbert









نظرية المجموعات : ZFC كيف نبرهن وجود مجموعة الجداء الديكارتي لمجموعتين ؟

في هذا المنشور سأقدم طريقة لصناعة الجداء الديكارتي لمجموعتين A و B او بالضبط إعطائه معنى وجودي ككائن في نظرية المجموعات.

جرت العادة بتعريف الجداء الديكارتي لمجموعتين A و B بتعريف الثنائيات

$$(x , y) , x \in A \wedge y \in B$$

ثم نعرف مجموعة الجداء الديكارتي ل A و B بمجموعة هذه الثنائيات والتي نرمز لها بـ

$$A\times B = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

سنبرهن على وجود هذه المجموعة إنطلاقا من مسلماتZF .

للتذكير هذا رابط يستعرض جميع هذه المسلمات:

(مقال لنضبط الأساسيات : نظرية المجموعات ZFC)

https://www.facebook.com/groups/1821825877897150/permalink/4290936817652698/

الفكرة تكمن في تشكيل مجموعات من الشكل $\{x, \{x ,y\}\}, x \in A \wedge y \in B$

فهذه المجموعات هي ما نسميه الثنائيات والتي نرمز لها بـ (x,y)

لنبدأ بصناعة المجموعات $\{x,y\}$

أولا:

سنقوم بتوحيد A و B في مجموعة C وهذا ممكن عبر مسلمتين:

مسلمة الأزواج والتي تخبرنا أنه من A و B يمكننا صناعة مجموعة منهما كعناصر $\{A,B\}$

ثم مسلمة الاتحاد والتي تخبرنا أن أي مجموعة تحوي عناصر كمجموعات فيمكن توحيد عناصرهما في مجموعة وهذا ما يسمح لنا أن نكتب $C = A \cup B$

ثانيا : سنصنع الآن مجموعة أجزاء C من مسلمة مجموعة الأجزاء: $P(C)$

ثم بمسلمة الفهم سنصنع المجموعة D المكونة من عناصر مجموعة مجموعات الأجزاء التي تشمل فقط عنصر وحيد من A و عنصر وحيد من B أي من الشكل $\{x,y\} , x \in A \wedge y \in B$

فنكتب

$$D = \{ S \in P(C) : \exists! x [x \in (S \cap A)] \wedge \exists! y [y \in (S \cap A)]\}$$

حيث الرمز $\exists!$ يعني يوجد ووحيد.

فنكون قد أنشأنا المجموعة D المكونة من المجموعات $\{x,y\}$

لابد أن ننتبه هنا إلى أنه إذا كان $x = y$ فالمجموعة من الشكل $\{x\}$

ثالثا : سنصنع مجموعة الثنائيات ولهذا سنوحد كل من A وD

$$E = A \cup D$$

ثم من مجموعة أجزاء E وبمسلمة الفهم سنختار المجموعات من الشكل $\{x , \{x\}\}$



بحيث $x \in A \wedge \{x\} \in D$

أو $\{x,\{x,y\}\}$

بحيث

$$x \in A \wedge (\exists y \in B : \{x,y\} \in D \wedge x \neq y)$$

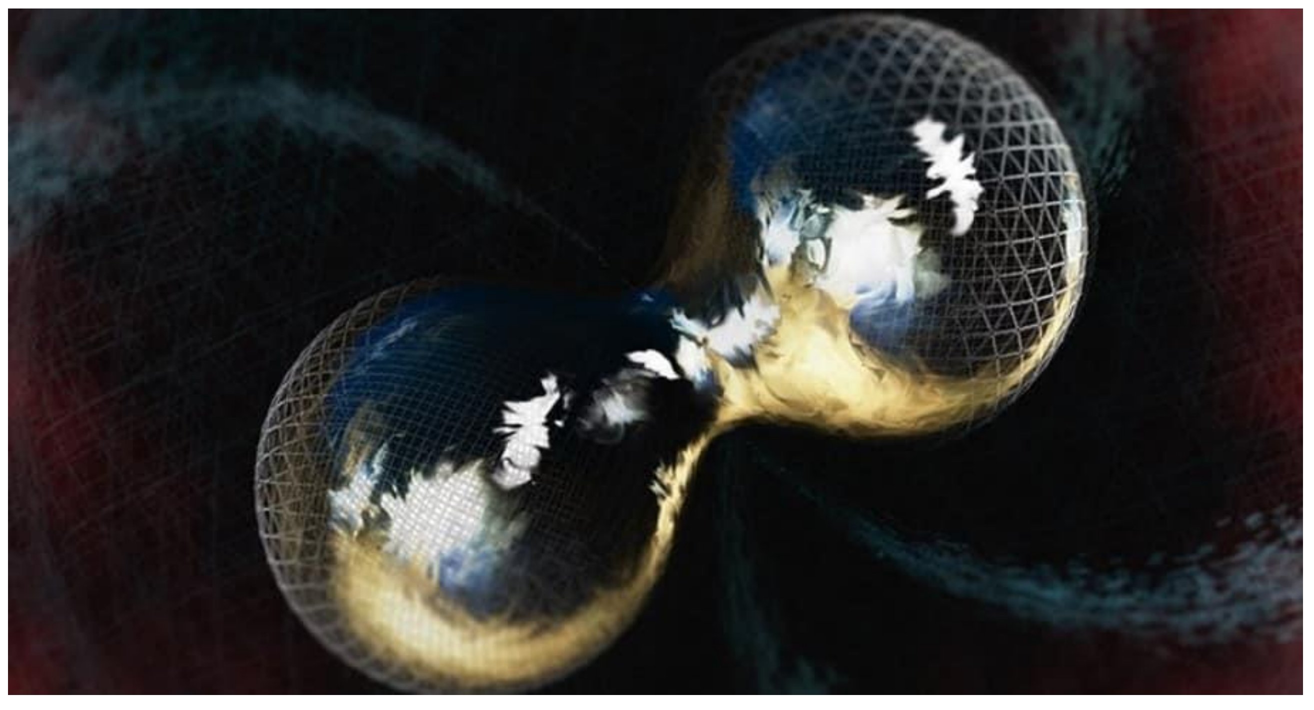
وهنا نكون قد صنعنا الجداء الديكارتي من الثنائيات من الشكل

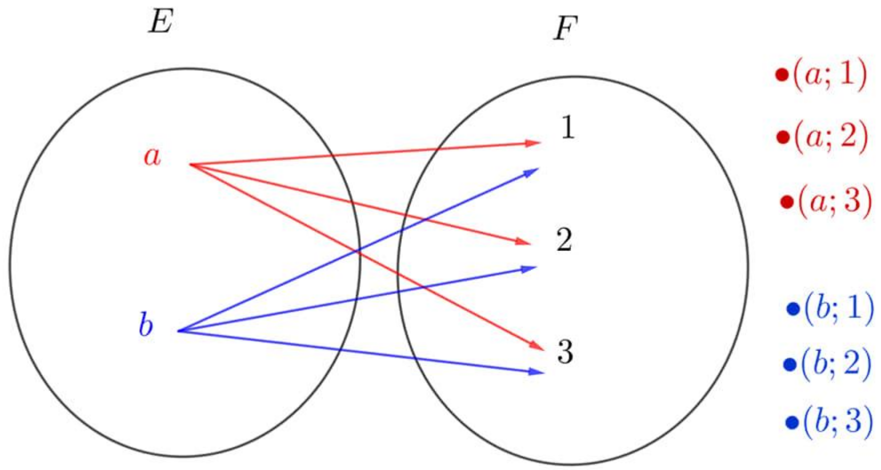
$$(x,y) = \{x,\{x,y\}\} , x \in A \wedge y \in B$$

والذي نرمز له بـ $A\times B$

نلاحظ أن نظرية المجموعات كائناتها مجموعات، وأنه لابد أن نفرق بين الترميز والكائن ذلك أن الترميز كتابة تعبر عن معنى رياضي فإن كان لدينا حرية في الترميز فإن الرياضيات لا تقبل وجودا بمجرد الترميز إليه بل لابد من إثبات ذلك عبر نظرية المجموعات كما تقدم فعله.

وهذا ما نفعله مع جميع الكائنات.





لماذا المجموعات الجزئية من جداء ديكارتي ليست بالضرورة جداء ديكارتي ؟

نظرية المجموعات وضعت مسلمات تبين طرق بناء مجموعة وأهم ما جاءت به هو الجواب عن متناقضة راسل عن طريق تحديد مسلمة الفهم.

للتذكير متناقضة راسل نابعة عن مسلمة الفهم غير المقيدة بجعل أي جملة مفهومة تحدد خصائص تولد مجموعة.

مسلمة الفهم الساذجة تؤدي إلى توليد مجموعة جميع المجموعات .

نظرية المجموعات ZF قيدت مسلمة الفهم بجعلها صالحة داخلة مجموعة فقط فكل خاصية داخلة مجموعة تشكل مجموعة.

ثم أضافت نظرية المجموعات طرقا لبناء هذه المجموعات عن طريق العناصر ببنائها من المجموعة الخالية نحو الأكبر فالأكبر.

بما أن مسلمة الفهم تشكل لنا أي مجموعة نريدها داخل مجموعة فالأهم في المسلمات الباقية هي إعطاء أكبر مجموعة ممكنة بنائها ولذلك نجد مسلمة مجموعة جميع المجموعات الجزئية تعطينا أكبر مجموعة يمكننا تشكيلها من أجزاء مجموعة دون الحاجة لبنائها مجموعات مجموعات كأن نبدأ بالمجموعات الأحادية ثم الثنائية .. إلخ

فإذا أردنا مجموعة المجموعات الأحادية مثلا فهذه نستخرجها من مسلمتين:

وجود مجموعة جميع المجموعات الجزئية لمجموعة

ثم مسلمة الفهم عن طريق خاصية المجموعات الأحادية منها والتي تشكل لنا مجموعتنا التي نريدها.

بالنسبة للجداء الديكارتي فهو يتبع نفس النمط فلبنائه نستخدم مسلمات نظرية المجموعات لبناء أكبر مجموعة ممكنة من الثنائيات.

ثم إذا أردنا جزء منه كالعلاقة مثلا فهي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي فنضيف على الجداء الديكارتي خاصية مقيدة عن طريق مسلمة الفهم.

هذه الخاصيات المقيدة من البديهي أنها لا تعطي أي ربط بين عناصر مجموعتين في الجداء الديكارتي إلا أن تكون الجداء الديكارتي نفسه ولذلك ما تنتجه هي مجموعة ثنائيات فقط.

يمكننا أن نرى الجداء الديكارتي كأكبر علاقة يمكن تعريفها بين مجموعتين عن طريق $x \in E , y \in F$ فمجرد انتماء x ل E و y ل F يجعلهما متعلقان ببعضهما وهذا ما نسميه (x,y)

فالجداء الديكارتي علاقة أعظمية وكل جزء منه هو علاقة جزئية قد تكون أعظمية بين مجموعتين جزئيتين فتكون جداء ديكارتيا كذلك وقد لا تكون فعندها لا تمثل جداء ديكارتيا.

للمزيد:

مقال نظرية المجموعات : ZFC كيف نبرهن وجود مجموعة الجداء الديكارتي لمجموعتين ؟



https://www.facebook.com/groups/1821825877897150/permalink/4296197870459926/

مقال لنضبط الرياضيات معا : ما هو تعريف التطبيق والدالة في نظرية المجموعات ZFC ؟

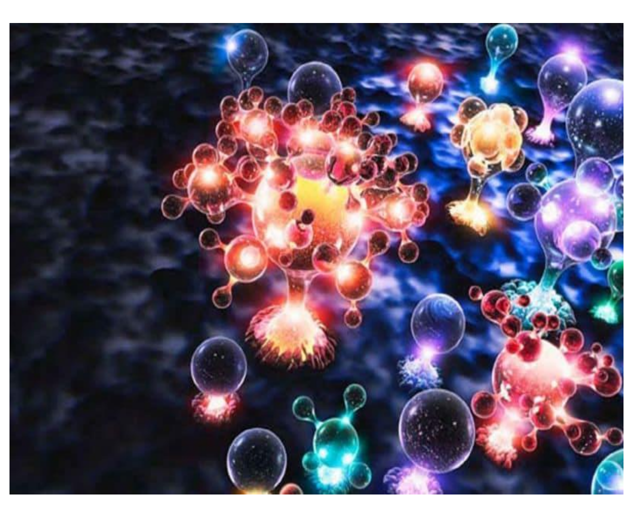
https://m.facebook.com/groups/1821825877897150/permalink/4245304035549310/

مقال نظرات في استحالة وجود مجموعة جميع المجموعات

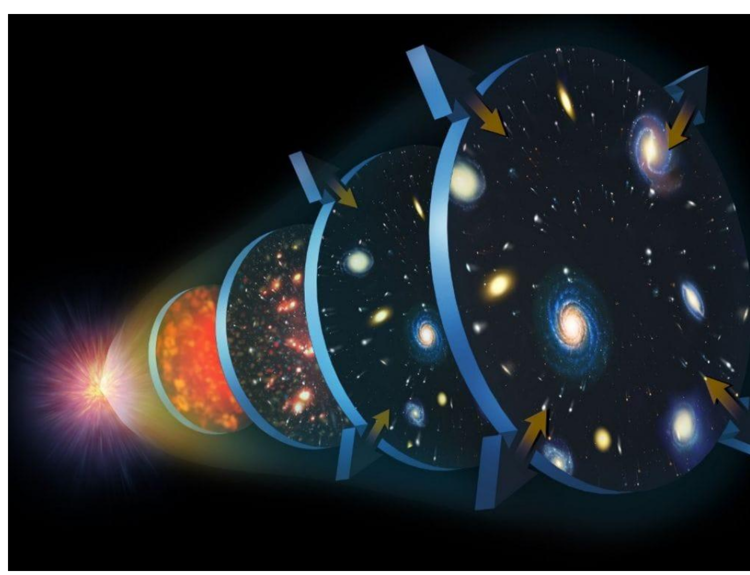
https://www.facebook.com/groups/1821825877897150/permalink/4169588299787551/

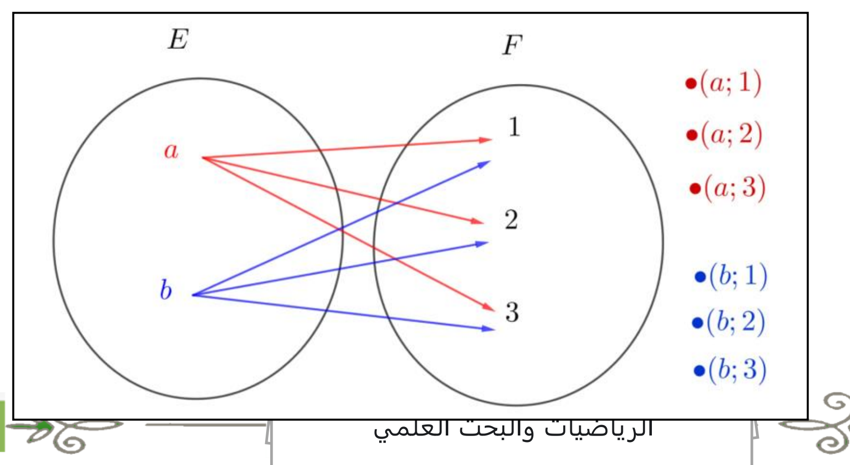
مقال أزمة الأساسيات

https://m.facebook.com/groups/1821825877897150/permalink/2240209066058827/









المجموعة : بين الانتماء والاحتواء

المجموعة كمفهوم هي تمييز عناصر ولذلك في نظرية المجموعات المجموعة هي عناصرها فلا يوجد شيء زائد على ذلك، ندرك هذا من مسلمة التمديد التي تخبرنا أن تساوي عناصر مجموعتين يعني أنهما نفس المجموعة.

لكن كيف يتم تمييز العناصر في نظرية المجموعات ؟

مسلمات ZFC تعطينا طرق متعددة لتمييز العناصر لصناعة مجموعة جديدة بطرق بنائية مثال ذلك أنه من مجموعتين A و B يمكننا صناعة مجموعة {A,B}

فإذا نظرنا من ناحية العنصر نفسه بالنسبة للمجموعة فتمييزه مع عناصر أخرى لصناعة المجموعة يعني انتماءه لها فالانتماء علاقة بنائية بين العنصر والمجموعة تعني دخوله في تركيبها.

بعبارة أخرى نظرية المجموعات لا تعطي تعريفا مباشرا لعلاقة الانتماء إنما هذه العلاقة نسلم بها بل نبني بها مسلمات نظرية المجموعات.

أما الاحتواء فهو علاقة شراكة بين مجموعتين تقتضي أن عناصر إحداهما تنتمي للأخرى وهذا يعنى أن علاقة الاحتواء مبنية على علاقة الانتماء ولذلك نظرية المجموعات تعطي تعريفا للاحتواء عن طريق العبارة التالية: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$

إذن علاقة الانتماء هي علاقة بنائية بين عنصر ومجموعة بكونه داخل في تركيبها.

أما علاقة الاحتواء فهي علاقة شراكة بين مجموعتين من كون عناصر إحداهما موجودة في المجموعة الأخرى.







لنفهم الرياضيات كما يفهمها أصحابها : ما هي العلاقة ؟

إن الرياضيات وليدة تجريد البشر لخصائص الواقع، كل ما نجده في الرياضيات هو خصائص وجدناها في الواقع ثم عممناها.

فالبشر يفهم الواقع بمقارنته ببعضه فيصف ما يراه بالأوصاف المشابهة لما رآه من قبل في أشياء سابقة وكلما وجد وصفا جرده.

فعندما نقول هذا لونه أحمر ذلك أننا رأينا شيئا لونه أحمر فوصفناه بذلك وجردنا الوصف فسميناه أحمرا فأصبحنا نطلقه على كل ما يشبهه الشيء الأول في هذه الخاصية.

وكذلك الخروف فلما عرفنا أوصافه سميناه خروف وكل ما اتصف بتلك الأوصاف سميناه بالخروف.

وكذلك العدد، فعندما نرى خروفين ونرى بقرتين فنحن ندرك أن بينهما صفة مشتركة وهو التكرار فسمينا ذلك إثنين.

البشر لا يكتفي فقط بتجريد الخصائص المتماثلة بل هو يربط بالأشياء عبر المقارنة فيرى هذا أكبر من هذا وهذا أصغر من هذا وهذا أثقل....

ويرى أن هذا أصله من هذا وهذا سيعطي هذا وهذا تسبب في هذا....

فهذا ما نسميه وجود رابط أو علاقة.

للغة تعبير دقيق تجرد به الرابط وهو لفظ "مع"

فنقول فلان ذهب مع فلان ونقصد به رابط مكاني وزماني

ونقول فلان متفق مع فلان ونقصد به رابط في فكري.

ونقول فلان وفلان ولدا معا في نفس السنة.....

الرياضيات قائمة على هذه الملاحظة وهو تجريد الرابط بين شيئين وبما أن الرياضيات تعمل بالمنطق والمجموعات فهي تقوم بتعريف هذا الرابط بين الأشياء فتسميه علاقة وتستعمل في ذلك آلياتها المنطق والمجموعات.

سنهتم هنا بما نسميه بالعلاقة الثنائية وهي كائن رياضي يربط بين عناصر مجموعتين ولتكونا A وB

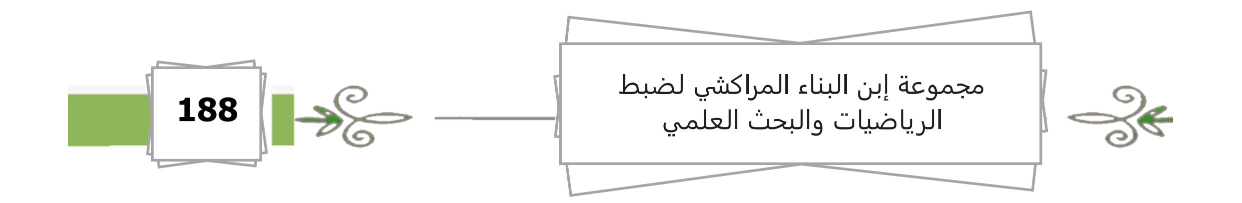
فكيف يمكن أن نعبر عن وجود رابط بين عنصر من A وعنصر من B ؟

الطرق في الرياضيات عديدة وسأعطي بعضا منها وكلها متكافئة وتعني نفس الشيء بل يمكن لكم إن فهمتم ما سيأتي أن تصنعوا طرقا خاصة بكم في تعريف العلاقة.

سنسمي علاقتنا R وسنصطلح على x من A مع علاقة بـ y من B : $x\,R\,y$

الطريقة الأولى بالعبارات المنطقية.

عندما نقول x من A عنده علاقة مع y من B فنحن نقول توجد خاصية متعلقة بمتغير نسميها P تخبرنا



أن هناك رابطا بين x و y أي:

$x\ R\ y \Leftrightarrow P(x,y)$ صحيحة

إذن نحن نرى هنا العلاقة كخاصية تجمع بين عنصرين وهي وجهة نظر حدسية ملموسة.

طريقة ثانية:

يمكننا أن نقول x متعلق بـ y يكفي أن نكتبها كثنائية (x,y)

فمجرد كتابتنا لها كثنائية فذلك يعني وجود رابط بينهما وعلى هذا R هنا هي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $R \subset A\times B$

طريقة ثالثة:

وقد نقول نرمز لها بثلاثية $R = (A,B,G)$ حيث G هي المجموعة جزئية من الجداء الديكارتي تجمع كل الثنائيات x و y المتعلقة ببعضها.

طريقة رابعة:

يمكن أن نعرفها هكذا $R = (A,B,P)$ حيث P الخاصية السابقة الذكر.

قد يقول قائل لكن رياضيا هذه كائنات مختلفة فالثلاثية غير المجموعة غير الخاصية المنطقية ؟

والجواب أن الرياضيات لا تهمها الشكليات إنما تهتم بالخصائص فنحن نقول مثلا أن مجموعة الأعداد الحقيقية تصنع بطرق مختلفة:

بأصناف تكافؤ المتتاليات الكوشية

بمقاطع ديديكاند

بأشباه المورفيسم

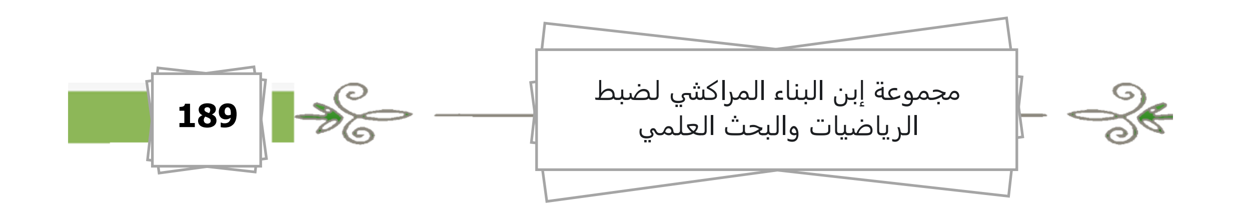
ورغم أن كل هذه ليست نفس الكائنات لكنها تصنع نفس المجموعة فالرياضيات تهتم بالخصائص.

وكذلك نقول مجموعة الأعداد الحقيقية R محتوات في مجموعة الأعداد العقدية رغم أن الأخيرة هي بنية على R^2 لكن لما وجدنا تماثلا بين الحقل الحقيقي والحقل الجزئي من الحقل العقدي المكون من العناصر $(x,0)$

قلنا أنهما واحد لأن لهما نفس الخصائص.

وفي ذلك يقول أستاذنا الفاضل الدكتور ناجي هرماس في تعريفي الدالة بالثلاثية وبالمجموعة الجزئية من الجداء الديكارتي:

وسواء تم اعتماد الثلاثية أو الثنائية كتعريف للدالة، فالأمر سيان. لماذا؟ لأن معرفة الثنائية تحدد تماما الثلاثية، وبالعكس، معرفة الثلاثية تحدد تماما الثنائية. لذلك نجد أساتذة الرياضيات المحترفين يطابقون بين مثل هذه المفاهيم الرياضية التي تحدد بعضها البعض.



فقط أود الإشارة إلى شيء مهم للغاية، وهو يدور حول مسألة كتابة العبارات الرياضية: إما أن تكتب هذه العبارة بطريقة صحيحة بواسطة الرموز، وإما أن تكتب بطريقة صحيحة بواسطة مفردات لغوية معتادة مع قليل من الرموز الرياضية. مثل هذه الكتابة الأخيرة يدعوها علماء الرياضيات "لهجة رياضية"، وهي محبذة جدا لكتابة النصوص الرياضية.

....

إن الإجابة على الأسئلة التالية تحوي بحول الله وعونه الشفاء الكافي لكل عليل شقي فكره في استيعاب العلاقة بين الثنائية والثلاثية الواردتين في الصورة:

1)كم توجد "مجموعة أعداد طبيعية" في الرياضيات؟

2)كم توجد "مجموعة أعداد صحيحة" في الرياضيات؟

3)كم توجد "مجموعة أعداد كسرية" في الرياضيات؟

4)كم توجد "مجموعة أعداد حقيقية" في الرياضيات؟

5)كم توجد "مجموعة أعداد عقدية" في الرياضيات؟

وأقول هنا بكل وضوح: لو فهمت الغاية من إدخال وتدريس علاقات التكافؤ في الرياضيات على نحو سليم، ... أه

فكل التعريفات السابقة تشير لنفس الكائن لكن من نظرات مختلفة وركز جيدا على لفظ تشير.

لتبسيط ذلك بهذا المثال فتصور أحدا سأل عن مكان منزل ثلاث أشخاص.

أما الأول فصاحب القضايا أخذ بيد الرجل إلى المنزل فقال له هذا هو المنزل الذي سألتني عنه فهذا هو الذي عرف العلاقة بالخاصية

صحيحة $x \, R \, y \Leftrightarrow P(x,y)$

أما الثاني فصاحب المجموعات فأخرج خريطة للمدينة فأراه مكان المنزل فيها فقال هذا مكانه فهذا الذي عرف العلاقة بـ $R \subset A \times B$

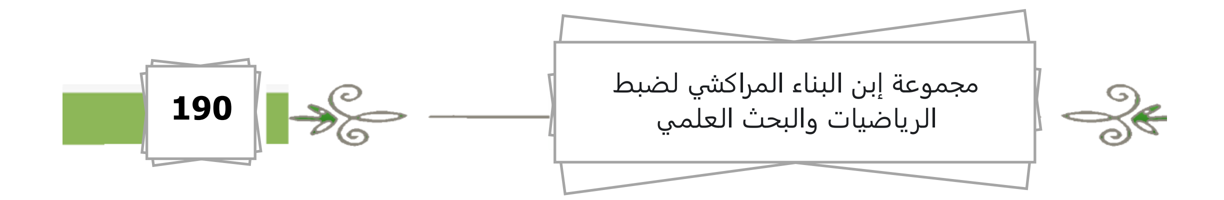
أما الثالث فصاحب شكليات، فأخرج ورقة وقلم وكتب عنوان المنزل برقمه وشارعه ومدينته فهذا الذي عرف العلاقة بـ $R = (A,B,G)$

نعم طريقة كل واحد من الثلاثة في تحديد المنزل مختلفة لكنه منزل واحد لأن هذه كلها طرق تحديد للمفهوم الذي نبحث عنه من حيث الشكل لكن المفهوم نفسه هو خصائصه لا شكله.

أما الذي لم يفهم الرياضيات وجعلها شكليات ظن أن الورقة المكتوب عليها عنوان المنزل هي ذات المنزل فتصايح لما رأى أحدهم يشير لمكان المنزل في الخريطة بأنه لم يضبط تعريف المنزل....

ولله في خلقه شؤون.

يقول المثل:



أنا أشير إلى القمر والأحمق ينظر إلى أصبعي.

إذن الرياضيات تعبر بأشكال مختلفة على الكائن لكن خصائصه تبقى واحدة.

فالعلاقة هي رابط بين عناصر مجموعتين.

https://fr.m.wikipedia.org/.../Relation_(math%C3%A9matiques)

وهي أنواع فهناك العلاقة الانعكاسية والتي تتصف بأن أي عنصر له علاقة بنفسه x R x

مثل مجموعة غير خالية تتقاطع مع مجموعة في عناصر فكل مجموعة غير خالية لها علاقة بنفسها لأنها تتقاطع مع نفسها.

وهناك العلاقة التناظرية أي إذا كان x متعلق بـ y فإن y متعلق بـx

$$x R y \Rightarrow y R x$$

مثل عدد عناصر مجموعة منتهية فإذا كانت E لها نفس عناصر F فالعكس صحيح.

ومنها العلاقة المتعدية أي إذا كان x له علاقة بـ y و y له علاقة بـ z ف x له علاقة بـ z .

مثل 1 أصغر من 2 و 2 أصغر من 3 ف 1 أصغر من 3 .

ومنها علاقة التكافؤ وهي علاقة انعكاسية تناظرية متعدية.

ومنها علاقة الترتيب.

ومنها التطبيقات وهي التي تحقق لكل سابقة صورة وحيدة.

وكذلك الدوال...

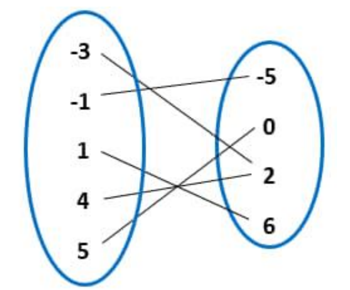
فالرياضيات تستعمل العلاقات لدراسة الكائنات بمقارنتها بعناصر أخرى وهذا بالضبط ما يفعله العقل البشري.

فمن يدرك الواقع يفهم الرياضيات.

ملاحظة : إذا عرفنا علاقة ثنائية من A نحو B فنستطيع منها تعريف علاقة ثلاثية عن طريق $(A\times B)\times C$

فننظر ل $A\times B$ كمجموعة $(x,y,z) = ((x,y),z)$

وهكذا نعمم العلاقات على جداء ديكارتي لمجموعات متعددة.



X	Y
1	6
-3	2
5	0
-1	-5
4	2





Définition 1. — Une *relation binaire entre E et F*, ou de *E* vers *F*, est un sous-ensemble du produit cartésien *E* × *F*. Dans le cas particulier où *E* = *F* on parle de relation binaire sur *E*[1].

Une variante est de définir une relation en intégrant dans la définition l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée (on n'est plus obligé de préciser « entre *E* et *F* », ceux-ci font partie de la définition).

Définition 2. — Une *relation binaire* est un triplet (*E*, *F*, *G*)[2] où *G* est un sous-ensemble du produit cartésien *E* × *F*, appelé *graphe* de la relation[3] ; *E* est l'*ensemble de départ* de la relation, et *F* son *ensemble d'arrivée*.

علاقة الترتيب مفهوم زائد عن مفهوم المجموعة

علاقة الترتيب كما ذكرنا سابقا هي اختيار لأننا عندما نكتب $a<b$

فقد اخترنا a قبل b ولذلك يمكننا تغيير اختيارنا لكتابة $b<a$ ولهذا نجد تكافؤا بين مسلمة الإختيار ومبرهنة زارملو التي تنص على امكانية تزويد المجموعة بترتيب جيد.

فعلاقة الترتيب شيء زائد على المجموعة إذ المجموعة هي تمييز عناصر فلا فرق بين مجموعة وعناصرها فهما شيء واحد.

إذا كانت عندنا مجموعة غير تافهة فيمكننا ترتيبها بطرق مختلفة مما يبين أن هذا الترتيب شيء زائد عليها

فلو اخذنا كمثال المجموعة $\{a,b,c\}$

فيمكننا كتابة خيارات مختلفة لترتيبها

$a < b < c$

$a<c<b$

$b<a<c$

$b<c<a$

$c<b<a$

$c<a<b$

فكل هذه ترتيبات زائدة على المجموعة.

لكن رغم ذلك فتوجد علاقة ترتيب تولد مع مجموعة أجزاء المجموعة وهي علاقة الإحتواء فلدينا

$\{a\} \subset \{a,b\} \subset \{a,b,c\}$

لذلك نلجأ لهذه العلاقة كثيرا في النظريات القائمة على المجموعات كالطبولوجيا فهي تمثل ترتيبا طبيعيا يظهر مع المجموعات.

فعند تعريف النهاية في الطبولوجيا يمكننا العمل بقاعدة جوارات عن طريق ترتيبها بالاحتواء لمحاكات الاقتراب من النهاية عن طريق تصغير الجوار بالاحتواء.



علاقة الترتيب ما هي إلا القدرة على الإختيار.

فعندما ترتب الأعداد الطبيعية فأنت تختارها عددا عددا.

لذلك لدينا تكافؤ بين مسلمة الإختيار ومبرهنة زارميلو فالأولى اختيار من مجموعة غير منتهية والثانية ترتيب جيد لمجموعة غير منتهية.

للتذكير الترتيب الجيد هو علاقة ترتيب كلي يضاف عليها أن أي مجموعة جزئية غير خالية تقبل عنصرا أصغريا.

مبرهنة زارميلو تنص على أنه يمكن ترتيب أي مجموعة ترتيبا جيدا في نظام ZFC

وهي مكافئة لمسلمة الإختيار ومبرهنة زورن ومبرهنات أخرى كتقابل أي مجموعة غير منتهية مع جدائها الديكارتي في نفسها.



الرياضيات وليدة إدراك الإنسان لوجوده : من المجموعة الخالية إلى مسلمة الاختيار.

لماذا المجموعة الخالية محتواة في أي مجموعة ؟

ذكرنا في مواضيع عدة أن المجموعة وعناصرها شيء واحد وأن مفهوم المجموعة هو تمييز عناصر عن غيرها وأنها ليست بمفهوم زائد عن عناصرها بل هي عناصرها ذاتها.

لذلك تساوي مجموعتين هو تساوي عناصرهما.

في نظرية المجموعات تبنى المجموعة عن طريق اختيار عناصرها فالعناصر سابقة عن المجموعة ماعدا المجموعة الخالية ولذلك يمكن لمجموعتين أن تشتركا في بعض العناصر .

مفهوم الاحتواء نفسه بين مجموعتين هو وجود العناصر المميزة المكونة للمجموعة الأولى ضمن العناصر المميزة المكونة للثانية.

بناء المجموعات في نظرية المجموعات له ثلاث طرق:

تمييز العناصر عنصرا عنصرا وإضافتها لبعض لتشكيل مجموعة، وهذه إذا أضيف إليها تكرار العملية بشكل غير منته تولد لنا المجموعات القابلة للعد.

على هذه الطريقة تبنى مجموعة الأعداد الطبيعية.

الطريقة الثانية إضافة مجموعات لبعضها وهذا جمع تمييز مع تمييز.

والثالثة عن طريق مجموعة الأجزاء وهذا الذي يخول لنا بناء مجموعات غير قابلة للعد إذا طبقناه على مجموعات غير منتهية وقابلة للعد.

أما الجداء الديكارتي فهو ترتيب للاختيار ذلك أننا نرتب الثنائية (x,y)

بقي أن "وجود عناصر يمكن صناعة المجموعات منها" نفسه يحتاج لبناء رياضي لذلك نسلم بوجود عنصر على الأقل يسمى المجموعة الخالية وهي مجموعة مشكلة من عدم تمييز أي عنصر، فنعطي لعدم التمييز وجودا لكن ماذا يعني ذلك ؟

عدم تمييز العناصر سابق لتمييز العناصر وإذا وجدنا أي عناصر فلدينا القدرة على عدم تمييز أي أحد منها فهذا الذي نسميه المجموعة الخالية.

فهذا المفهوم هو متضمن في أي عناصر موجودة أمامنا مما يبين سبب احتواء المجموعة الخالية في أي تشكيلة عناصر ونقول تشكيلة لا مجموعة لأنه هنا لا نشترط تمييز العناصر لإيجاد المجموعة الخالية.

أي أن عدم تمييز أي عنصر أو عدم الاختيار لأي عنصر ممكن مع أي تشكيلة سواء كانت مجموعة أو فئة أي أن مفهوم عدم الاختيار أصلي موجود كيفما كانت العناصر المختارة قبل اختيارها.

لكن يمكننا الذهاب لأبعد من ذلك فإمكانية عدم الاختيار موجودة حتى إن لم توجد عناصر فهي لا تحتاج لوجود العناصر، هي تحتاج لإمكانية الاختيار فقط.

إن دققنا فيما سبق سندرك أن إمكانية عدم الاختيار أي المجموعة الخالية نتيجة حتمية لإمكانية الاختيار



وكلاهما هو نتيجة حتمية لكون الإنسان مدرك للوجود بل مدرك لوجود نفسه.

نظرية المجموعات مبنية على إدراك الإنسان لوجوده وإمكانيته للاختيار.

وليس ذلك فقط بل تضيف على ذلك كيفية الاختيار :

إما عنصرا عنصرا بتكرار منته أو غير منته

أو بضم عناصر لبعضها

أو عن طريق تمييز أجزاء المجموعة لتشكيل مجموعة جديدة.

وحتى علاقة الترتيب هي اختيار بين عنصرين.

إذا فهمنا كل ما سبق استنتجنا:

أن المجموعة وعناصرها شيء واحد.

أن المجموعة الخالية وحيدة لأن المجموعة هي عناصرها وهي لا عناصر فيها.

أن المجموعة الخالية محتواة في جميع المجموعات بسبب كونها عدم تمييز عناصر.

أن إمكانية الاختيار متنوعة:

الاختيار البسيط مثل الثنائيات (x,y)

الاختيار غير المنته المرتبط بتكرار المنته وهو بمثل قابلية العد مثل صناعة N

0 , 1, 2....

الاختيار غير قابل للعد وهذا متمثل في مسلمة الاختيار.

كل هذه المفاهيم هي التي تشكل نظرية المجموعات ZFC وعليها بنيت جميع الرياضيات.

هذه المفاهيم تمثل خلاصة تجريد البشر لتعاملهم مع الكون من وجوده وتركيبه من أجزاء وإمكانية الاختيار فيه.



يا أستاذ ما هي مسلمة الإختيار ؟

الأستاذ : عندك خمسة أكياس حلوى اطلب منك اختيار قطعة من كل كيس فهل هذا ممكن ؟

التلميذ : نعم

الأستاذ : وان كان عندك مقدار الاعداد الطبيعية من اكياس فهل ذلك ممكن إذا كان امامك مالانهاية من الزمن ؟

التلميذ : ابقى دائما أختار ولا انتهي ، يعني اختيار سرمدي

الأستاذ : لكن أي كيس هل يحين دوره لإختيار قطعة منه ؟

التلميذ : نعم

الأستاذ : الآن اذا كان عندك مقدار مجموعة الأعداد الحقيقية من الأكياس فهل كل كيس سيأتيه دوره لتأخذ منه قطعة ؟

التلميذ : لكن لا يمكن أن أقول عندي 3.4 كيس ، اليس كذلك

الأستاذ : القيمة ليست مشكلة ،فهذه مجرد رموز، مثلا يمكنك أن تقول نصف ، واحد، واحد و نصف، إثنين، إثنين و نصف...

إذن إن كانت الأكياس بعدد مجموعة الأعداد الحقيقية فهل يمكن ان يأتي لكل كيس دوره ؟

التلميذ : أظن لا ، لان الكيس الذي بعده لا اعلمه

الأستاذ : الجواب لا لكن السبب هو أن الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد فلا يمكن ان نختار كيس بعد كيس كمتتالية، إذن ما العمل ؟

التلميذ : نختار اي كيس ؟

الأستاذ : لا ، لابد من الاختيار من كل كيس قطعة

التلميذ : الله أعلم، المسألة صعبة.

الأستاذ : لا يوجد حل إلا التسليم بإمكانية ذلك فهذه هي مسلمة الاختيار.

من كل مجموعة عناصرها مجموعات جزئية من مجموعة نسلم أنه يمكننا ارفاق كل مجموعة منها بعنصر منها أي نختار من كل واحدة عنصر 😊

التلميذ : مممممم الآن فهمت ،جزاك الله خيرا

الأستاذ : في الصورة التالية مثال تطبيقي لمسلمة الإختيار




صناعة مجموعتين حقيقيتين من الأعداد المتسامية غير متقاطعتين كثيفتين وغير قابلتين للعد

عبد الحكيم بن شعبانة

ترميزات

مجموعة الأعداد الحقيقية	$\mathbb{R}$
مجموعة الأعداد الناطقة	$\mathbb{Q}$
مجموعة الأعداد الجبرية	$\mathbb{A}$
مجموعة الأعداد الجبرية ماعدا الناطقة	$\mathbb{A}\backslash\mathbb{Q}$
مجموعة الأعداد المتسامية	$\mathbb{T}$

بناء المجموعتين

لنعرف علاقة التكافؤ التالية على مجموعة الأعداد المتسامية $\forall x,y \in \mathbb{T} : x \sim y \iff x-y \in \mathbb{A}$

أي أن عددين متساميين ينتميان إلى نفس صنف التكافؤ إذا كان الفرق بينهما جبريا

وسنرمز إلى مجموعة أصناف التكافؤ ب $\mathbb{T}/\sim$

نلاحظ أن أي صنف من أصناف التكافؤ قابل للعد لأنه مولد بعنصر واحد مضاف إليه الأعداد الجبرية وبما أن

$\bigcup_{i\in\mathbb{T}/\sim} X_i = \mathbb{T}$ فإن مجموعة أصناف التكافؤ غير قابلة للعد

بإستعمال مسلمة الإختيار سنختار من كل صنف تكافؤ عنصرا منه لنصنع المجموعة الجديدة غير قابلة للعد $\mathbb{M}$

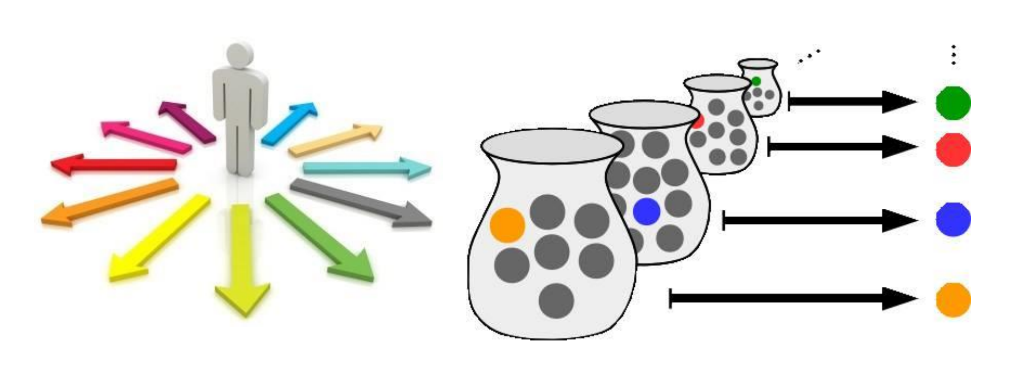
ثم نصنع المجموعتين غير قابلتين للعد و الكثيفتين

$$\mathbb{M}_{\mathbb{Q}} = \{x+y | x\in M, y\in\mathbb{Q}\}$$
$$\mathbb{M}_{\mathbb{A}} = \{x+y | x\in M, y\in\mathbb{A}\backslash\mathbb{Q}\}$$

تقاطع المجموعتين خال لأنه إذا كان هناك عنصر مشترك فذلك يعني أنه أنتج من نفس الممثل عن صنف التكافؤ أي

$$\exists x\in\mathbb{M}, y\in\mathbb{Q}, y'\in\mathbb{A}\backslash\mathbb{Q} : x+y = x+y'$$

وهذا مستحيل ، أما الكثافة فهي نتيجة لكثافة المجموعتين $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{A}\backslash\mathbb{Q}$





مسلمة الإختيار البسيط ومبدأ الثالث المرفوع

هل هناك عناصر في المجموعة غير الخالية ؟ قد يبدو الجواب بديهيا بنعم لكن الأمر ليس بهذه السهولة.

إذ تفريق القضية إما صحيحة أو خاطئة دون حالة ثالثة غير الصحيح والخطأ غير مسلم به إلا إذا سلمنا بمبدأ الثالث المرفوع والذي يرفع الحالة الثالثة، لكن من يدرينا لعله هناك حالة ثالثة غير وجود عنصر أو عدم وجوده في مجموعة ؟

هناك تكافؤ منطقي بين مسلمة الإختيار البسيط وهو إختيار عنصر من مجموعة غير خالية ومبدأ الثالث المرفوع.

وقبل ان ينادي البعض هذا هراء، فأخبرهم بأمرين:

الأول أن مسألة مسلمة الإختيار البسيط قد ألهبت أقلام الرياضياتيين في بداية القرن العشرين وعلى رأسهم زارميلو ولوبيغ وبورال .

فالخلاف كان في أوجه بين المنطق الشكلي بزعامة هلبرت والمنطق الحدسي بزعامة برور.

فأصحاب المنطق الحدسي يرون أنه لا يحق أن نجزم بوجود كائن رياضي إلا إذا أمكننا تحديده فلا يكفي أن نقول أن المجموعة غير الخالية تحوي عنصرا إلا إذا استطعنا تحديده فإذا حدد سموها بالمجموعة المسكونة.

أصحاب هذا المنطق لا تصح عندهم مبرهنة القيم المتوسطة إذ هي لا تحدد صفر الدالة وإن كان ظاهرها يوحي بناء لهذا الصفر.

بل قام العلماء بأكثر من ذلك إذ صنعوا في بداية السبعينات نظريات قريب من ZF ولكن بدون مبدا الثالث المرفوع.

أدى التيار المنطق الحدسي بقيادة تورينغ وغودل إلى بناء فرع جديد في الرياضيات يسمى قابلية الحساب يبحث في قابلية حساب الكائنات الرياضية بآلة تورينغ.

الأمر الثاني : قد تميز القرن السابق بظهور أغرب النظريات الفيزيائية ومنها ميكانيك الكم فتجربة شرودنغر الشهيرة تخبرنا أنه في العلبة يوجد قط حي وميت في آن واحد ... ولو ترجمناها رياضيا وجدناها من نوع صحيح وخطأ في آن واحد فلا هي صحيحة ولا هي خاطئة.

إن قبول العقول لمبدأ الثالث المرفوع منشؤه العادة فلذلك لا يتخيل العقل البشري شيئا آخر غير الصحة أو الخطأ ، الوجود أو العدم لكن ما تخبرنا به الفيزياء أن المسألة لم تحسم بعد ولعل الكون الذي نراه ليس على ظاهره....



كل مجموعة يمكن ترتيبها بحيث لكل عنصر عنصر يليه ما عدا العنصر الأكبر إن وجد.

موضوع الترتيب تطرقنا إليه أكثر من مرة، لكن رغم هذا ما زلنا نرى كثيرا من الناس يستغربون إمكانية ترتيب مجموعات مثل Q و R و C بحيث لكل عنصر عنصر موالي.

والسبب في ذلك عدم تفريقهم بين المجموعات العددية وترتيبها الاعتيادي وعدم التفريق بين قابلية العد والترتيب.

تنص مبرهنة زارملو وهي مكافئة لمسلمة الاختيار وتوطئة زورن على أنه يمكن ترتيب أي مجموعة غير خالية ترتيبا جيدا.

هذا يعني أن أي مجموعة سواء كانت Q أو R أو C أو غيرها يمكن ترتيبها ترتيبا جيدا والترتيب الجيد هو ترتيب كلي مع زيادة أن أي مجموعة جزئية غير خالية تقبل عنصرا أصغريا.

وهنا عادة ما يستغرب البعض فيقول لكن Q و R ليس لديهم عناصر أصغرية ؟

الجواب أن هذا ناتج عن الخلط بين المفاهيم فالناس لا تفرق بين المجموعة R وبين المجموعة R المزودة بعلاقة الترتيب الاعتيادية $(R, <)$ فتجاوزا نسمي هذه R لكن عندنا تقول أنه يمكن ترتيب R ترتيبا جيدا بحيث لكل جزء غير خال منها عنصر أصغري فهنا لا نقصد $(R, <)$ إنما نقصد R مزودة بعلاقة ترتيب جديدة غير الترتيب الاعتيادي المشهور فعلاقة الترتيب غير وحيدة على مجموعة غير منتهية.

الذي ينتج من مبرهنة زارملو أن لكل عنصر مواليه بعلاقة الترتيب الجيد (إن لم يكن العنصر الأكبر) ذلك أنه إذا رمزنا لعلاقة الترتيب هذه بـ $\sim>$ وأخذنا عنصرا كيفي x من R ليس بأكبر عنصر في علاقة الترتيب هذه وأخذنا مجموعة جميع العناصر الأكبر منه $A = \{ y \in R : y \sim> x \}$

فهذه المجموعة تقبل عنصرا أصغريا لأن علاقة الترتيب هذه علاقة ترتيب جيد وليكن x'

فلدينا من تعريف x' أنه موالي لـ x لأنه أصغر عنصر من العناصر الأكبر من x

لا ننسى أن مبرهنة زارملو مبنية على مسلمة الاختيار لذلك هي تعطينا وجود هذه العلاقة لكنها لا تبنيها لنا وهنا البعض كذلك يتعجب إن كانت علاقة الترتيب هذه موجودة فما هو العنصر الموالي لـ 1 أو 2 ؟

والجواب أن مبرهنة زارملو تعطينا وجودا للعلاقة لا البناء وهي غير وحيدة بل يوجد عدد غير منته من الترتيبات الجيدة الممكنة علىR .

المجموعات القابلة للعد كحالة خاصة يمكن بناء ترتيب جيد عليها وذلك بمقابلتها مع N فمثلا من السهل بناء علاقة ترتيب جيد على Q^*_+ إنطلاقا من مقارنة البسط بالبسط والمقام مع المقام.

وهنا نشير إلى أنه هناك فرق بين قابلية العد والترتيب فقابلية العد هي تقابل مع N أو جزء منها أما الترتيب فهو علاقة معرفة على الجداء الديكارتي.

قد يقول البعض قابلية العد تستلزم قابلية الترتيب فالجواب هذا كأنك تقول قابلية العد تستلزم وجود المجموعة الخالية فهذا لا معنى له لأن كل المجموعات قابلة للترتيب ولا تحتاج أن تكون قابلة للعد أو لا لكن المشكل



أن العقل لا يفرق بين العد والاختيار.

نعم قابلة العد تمكننا من بناء علاقة الترتيب وهناك فرق بين إمكانية البناء والوجود.

الترتيب مجرد اختيار لذلك مبرهنة زارملو تكافئ مسلمة الاختيار فالأولى ترتيب والثانية اختيار.

عندما تقول 1 أكبر من 0 فأنت قدمت الواحد على الصفر فهذا مجرد اختيار ولا أحد يمنعك من القيام بالعكس.

أما قابلية العد فهو تكرار للاختيار إلى أن تستغرق المجموعة لذلك في قابلية العد شيء زائد على مجرد الترتيب وهو استغراق المجموعة بالاختيار البسيط والاختيار البسيط غير الاختيار العام فهو لا يحتاج لمسلمة الاختيار.

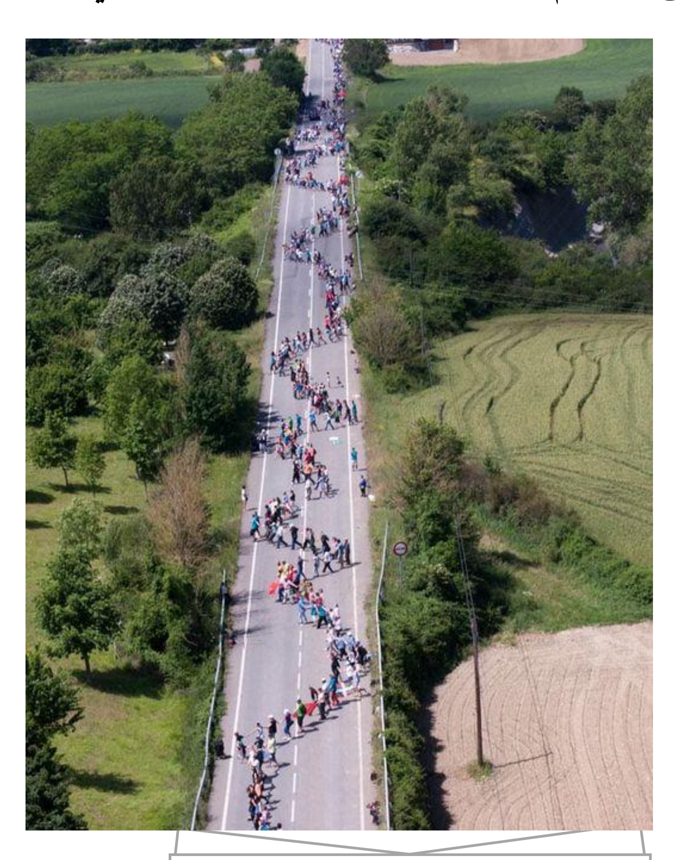
ولذلك البرهان بالتراجع يكون في المجموعات القابلة للعد أما إذا مررنا للمجموعات غير القابلة للعد فقدنا إمكانية الاستغراق البسيط لكن يمكننا أن نعوضه بتوطئة زورن فتوطئة زورن هي تسليم بالاستغراق.

ولذلك عند برهنة وجود قاعدة لأي فضاء شعاعي نلجأ لتوطئة زورن بعد ترتيب القواعد الجزئية بالاحتواء

$A \subset B \subset C .....$

ثم نسلم بالاستغراق على هذا الاحتواء المرتب للوصول للعنصر الأعظمي ولولا توطئة زورن لما أمكننا ذلك في حالة عدد عناصر غير قابل للعد .

هذه المفاهيم نكررها حتى يتنبه الإخوة لها ويفتحوا عقولهم فهذه المفاهيم تمثل الفرق بين رياضيات العوام التي تدرس في الثانوي ورياضيات المختصين التي تبدأ في المرحلة الجامعية والتي يجب على صاحبها أن يدقق فيها لأنه عليها تبنى المفاهيم المتقدمة من فضاءات هلبرتية ونظرية قياس ومؤثرات إلى غير ذلك.



الترتيب الجيد والإستغراق

البرهان بالتراجع يحتاج إلى الترتيب الجيد مع الإستغراق وهذا الذي يتوفر في الأعداد الطبيعية.

فالأعداد الطبيعية مرتبة ترتيبا جيدا أي كل مجموعة جزئية غير خالية تقبل عنصرا أصغريا، مما يجعلها على شكل سلسلة كل عنصر يتبعه عنصر.

البرهان بالتراجع يتبع هذه السلسلة عنصرا عنصرا لكن المهم في الأمر ان كل عنصر ولا بد أن يأتي دوره في رتبة معينة أي أن البرهان بالتراجع يستغرق جميع العناصر بتتبعه للسلسلة.

المجموعات غير قابلة للعد يمكن ترتيبها ترتيبا جيدا، تسمى هذه مبرهنة زارميلو وهي مكافئة لمسلمة الإختيار وتوطئة زورن.

لكن المشكل في هذه السلسلة أنك إذا تتبعتها لا تستغرق جميع العناصر فيكفي أن يكون بين عنصر ما وبين بداية السلسلة عددا غير قابل للعد من العناصر لكي لا يمكنك الوصول له بالعد ذلك ان العد عنصرا عنصرا يعطيك عناصر قابلة للعد.

فمشكلة عدم الإستغراق هي التي تجعل البرهان بالتراجع غير قابل للتطبيق بصيغته على المجموعات غير قابلة للعد.

للفائدة :

برهان البرهان بالتراجع

عبد الحكيم بن شعبانة

برهان البرهان بالتراجع

البرهان بالخلف

لنفرض أنها توجد مجموعة متقابلة مع الأعداد الطبيعية وخاصية تحقق شروط البرهان بالتراجع

$A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$

$P(x_0)$ صحيحة

$\forall n \in \mathbb{N} : \ P(x_n) => P(x_{n+1})$ صحيح

ولنفرض أنه توجد قيم طبيعية عندها الخاصية P غير صحيحة، أي أن

مجموعة هذه القيم غير خالية $M = \{n \in \mathbb{N} : P(x_n)$ خاطئة $\} \neq \emptyset$

بما أن مجموعة الأعداد الطبيعية مرتبة ترتيبا جيدا فلنأخذ العنصر الأصغر من هذه المجموعة

$m = min(M)$

بفصل الحالات : إذا كان $m = 0$ فهذا تناقض لأن $P(x_0)$ صحيحة

إذا كان $m > 0$ فلدينا $P(x_m)$ خاطئة

و $P(x_{m-1}) \implies P(x_m)$ صحيح

إذن $P(x_{m-1})$ خاطئة ومنه $m - 1 \in M$

وهذا تناقض لأن m أصغر عنصر في M

ومنه المطلوب : **صحة البرهان بالتراجع**



يا أستاذ حدثني عن علاقة الترتيب:

لماذا في الأعداد الحقيقية لا يمكننا أن نجد العدد الذي هو موجود مباشرة قبل عدد معين أو مباشرة بعده ؟

الأستاذ : ما هو العدد الذي بعد 1 ؟

التلميذ : 2 يأتي بعد 1 .

الأستاذ : ثم ماذا ؟

التلميذ : 3 .

الأستاذ يعطي التلميذ قلما وورقة ثم يقول:

أكتب العدد 1 في أعلى الورقة ثم بجانبه العدد 2 ثم بجانبه 4 ثم بجانبه 3 .

قام التلميذ بذلك.

قال الأستاذ : ماذا يوجد بعد الواحد 1 في الورقة ؟

التلميذ : 2 .

الأستاذ ؛ وبعد 2؟

التلميذ : 4 .

الاستاذ : لم تصبح 3 ؟

التلميذ : نعم لأننا كتبناها بعد 4!!

الأستاذ : يا ولدي الترتيب مجرد اختيار فنحن من نختار كيف نقول أن هذا قبل هذا، لنقم بتجربة:

وضع الأستاذ أمام التلميذ مسطرة وقلم أزرق وقلم أحمر وممحاة بشكل مبعثر ثم قال : له هل يمكن أن نقول القلم الأزرق بعد الممحاة أو المسطرة قبل القلم الأحمر ؟

التلميذ ؛ لا

الأستاذ : اختر الآن شيئا منها وضعه جانبا

اختار التلميذ القلم الأزرق.

الأستاذ : اختر مرة أخرى وضعه بجانب القلم الأزرق وكرر العملية إلى أن تختار جميع الأشياء.

قام التلميذ باختيار المسطرة ثم الممحاة ثم القلم الأحمر.

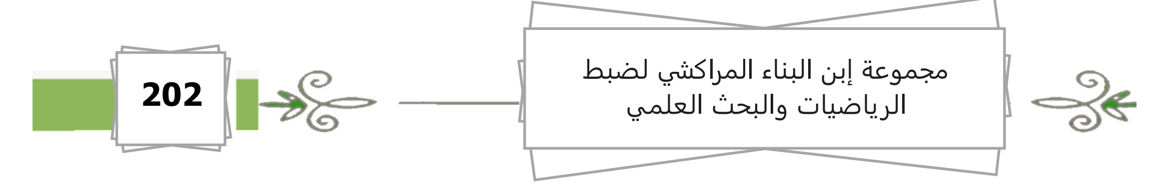
قال الأستاذ : ماذا اخترت بعد الممحاة ؟

قال التلميذ : اخترت القلم الأحمر

قال الأستاذ : الآن أصبح القلم الأحمر بعد الممحاة فما قمت به هو ترتيب عشوائي لهذه الأشياء، فعلاقة الترتيب مجرد نظرتنا في اختيار الأشياء لذلك هي تتغير حسب الوصف الذي نريد ترتيبه به.

الذي نقوم به في الأعداد هو ترتيبها حسب الكمية والكمية تراكمية فمقياسنا هو التكرار.

لذلك نقول الإثنين بعد الواحد لأنها تكرار للواحد فقد صنعناها من 1 .



ونقول 3 بعد 2 لأننا صنعناها بـ 2 زائد واحد.

ونقوم بنفس الشيء في الأعداد الناطقة فأربعة ونصف أكبر من أربعة لأنها تزيد عليها بنصف فهي كمية زائدة.

لكن لو أردنا ترتيب التلاميذ في القسم فلا نجد كمية فهم ليسوا أعدادا لكن نرتبهم حسب قائمة الأسماء لكن في ترتيب الأسماء لماذا الألف قبل الباء والباء قبل التاء ؟

التلميذ : لا أدري ؟

الأستاذ : لأنه بكل بساطة نحن من قررنا ذلك فاخترنا الألف أولا ثم بعده باء ثم بعده تاء إلى نهاية الأحرف فالترتيب مجرد اختيار.

لذلك قد يكون سنك أكبر من سن صاحبك لكنه أطول منك قامة فالترتيب يتغير بالنظرة المختارة.

ثم قال الأستاذ : أرسم قطعة مستقيمة أفقية في الورقة واختر منها نقطة.

قام التلميذ بذلك.

قال الأستاذ : اختر نقطة ثانية قبل النقطة الأولى من هذه القطعة.

قام التلميذ باختيار نقطة ثانية على شمال النقطة الأولى.

قال الأستاذ : لماذا قررت أن شمال النقطة الأولى هو قبل ولم تقرر أن يمينها هو القبل ؟

التلميذ : لأننا دائما نعتبر الشمال كذلك ؟

الأستاذ : لو قلبنا الورقة هل يبقي شمال النقطة الأولى هو الشمال الذي قررته سابقا ؟

التلميذ : يتغير فتصبح النقطة الثانية بعد الأولى لأنها تصبح على يمينها.

الاستاذ : إذن ترتيبك مجرد اختيار منك فأنت ترتب حسب ما تراه من شمالك ويمينك لا من شمال ويمين النقطة لأن ذلك لا معنى له عند النقطة فكل ما حولها متشابه إلا أن تعطيه أنت اتجاها.

الأستاذ : هل يمكن الأن أن تختار من القطعة المستقيمة نقطة تأتي مباشرة قبل النقطة الأولى ؟

التلميذ : لا يمكنني اختيار ذلك فكل ما اخترت نقطة قبلها تبقي نقاط بينهما!!!

الأستاذ : إذن المشكل في طريقة الاختيار التي نتبعها فليس كل اختيار نتفق عليه يمكنه أن يرتب لنا الأشياء بشكل تتابعي.

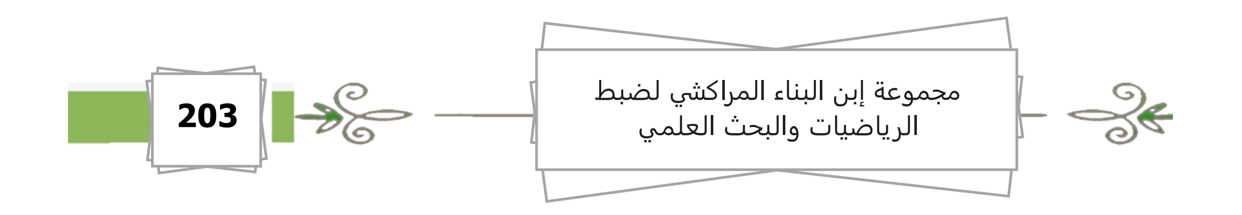
لكن سنقوم بتجربة : هل يوجد عدد ناطق يقع مباشرة قبل العدد $7/5$

التلميذ : لا ، هنا نفس المشكل أي عدد نختاره قبله فيوجد عدد بينهما فمثلا عندنا

$$6/5 < 13/10 < 7/5$$

الأستاذ : لنغير نظرتنا لهذه المجموعة، لننظر للقيم الموجبة ولنرتبها كما يلي فنقول أن $p/q < j/h$

إذا كان بسط الأول أصغر من بسط الثاني $p < j$



أما إذا كان البسطان متساويان فنقارن المقامات $q < h$ إذن يكون عندنا $6/5 < 7/5$

لأن $6 < 7$ و يكون $7/5 < 7/10$ لأن البسطين متساويان و $5 < 10$ فهذا ترتيب جديد.

الآن ما هو العدد الذي يكون قبل $7/5$

التلميذ: يكفي أن ننقص واحد من 5 فهو$7/4$

الأستاذ : نعم هنا أصبح موجودا ففي الحقيقة ما قمنا به هو أن لا ننظر ل Q ككميات ولكن ننظر إليها كثنائيات (p,q)

ونحن نعرف ترتيبا آخر للثنائيات إنطلاقا من ترتيب الإحداثية الأولى ثم الثانية فنحن قلنا فقط أن:

$(p,q) < (j,h)$

إذا كان $p < j$ أو $p = j \,\&\, q < h$

فهذا اختيارنا فصنعنا منه ترتيبا جديدا ولو نظرت لوجدته ترتيبا بيانيا فكأننا نمثل الإحداثيات في معلم متعامد ومتجانس ثم رتبناها من الشمال إلى اليمين ومن أعلى لأسفل.

ولذلك هذا الترتيب يصلح حتى على الأعداد المركبة $x + i\,y < a + i\,b$ إذا كان $x < a$ او $x = a \,\&\, y < b$

بل هناك مبرهنة تسمى بمبرهنة زارميلو تقول أنه يمكننا ترتيب أي مجموعة غير خالية ترتيبا جيدا وهي تبرهن انطلاقا من مسلمة في الرياضيات تسمى مسلمة الاختيار.

فإذا سلمنا بإمكانية اختيار عناصر من مجموعة كيفما شئنا فقد سلمنا بإمكانية ترتيبها.

الترتيب الجيد أقوى من الترتيب الكلي فهو يطلب أن تقبل كل مجموعة جزئية غير خالية عنصرا أصغريا وهذا ما نجده في N .

لكن في R هذا غير صحيح فترتيبها الاعتيادي غير جيد فهي لا تقبل عنصرا أصغريا.

بصفة عامة ليس كل ترتيب يعطينا قبل وبعد ففي الأعداد الحقيقية اخترنا ترتيبا بزيادة الكميات لكن لا توجد كمية صغرى كما هو موجود في N فالكمية الصغرى هي 1 ولذلك في N هناك بعد وقبل لأننا ننتقل بالكمية 1 .

أما في R و Q لا توجد كمية صغرى ننتقل بها فهذا اختيارنا.

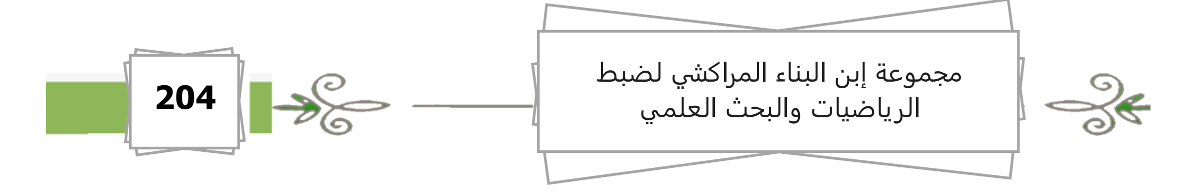
ولذلك عندما غيرنا طريقة الاختيار ونظرنا ل Q كمجموعة ثنائيات مرتبة من $N\times N$ تغير ترتيبنا فأصبح انتقالا بالكميات من الشمال إلى اليمين بزيادة 1 ومن تحت لفوق بزيادة 1 كذلك.

التلميذ : لماذا لا نستعمل هذا الترتيب الجديد فهو يتيح لنا معرفة قبل وبعد في مجموعة ؟

الأستاذ : المشكل أن هذا الترتيب لا يتوافق مع عملية الجمع والضرب.

فالترتيب الاعتيادي في R متوافق مع عملية الجمع والضرب لأنه لدينا

$x < y \Rightarrow x + a < y + a$ و $a\,x < a\,y \Rightarrow x < y \,\&\, a > 0$



فالترتيب بزيادة الكمية متعلق بعملية الجمع لأنه مستخلص منها فهو ينفعنا في الكثير من الأمور.

التلميذ : هل هناك ترتيب متوافق مع عملية الجمع والضرب في مجموعة الأعداد المركبة C ؟

الأستاذ : لا يوجد، بل هناك مبرهنة تقول أن كل حقل مزود بترتيب متجانس مع عملياته – نسمي هذا النوع بالحقول الأرخميدية – فهو حقل متماثل مع حقل جزئي من R .

أي بمعنى آخر أكبر حقل يمكنه أن يكون مزودا بترتيب متوافق أو بلفظ آخر متجانس مع عملياته هو R المزودة بالعمليات الاعتيادية.

لكن هذا لا يمنع من ترتيب C كما سبق وقمنا به بالنظر للأعداد في المستوى من الشمال إلى اليمين ومن أسفل لأعلى.

ويمكننا ترتيبها بشكل آخر فنحن نعلم أن كل عدد مركب يكتب بالشكل: $z = R * e^{tita}$

فيمكن أن نرتب الاعداد حسب طويلتها R فإن تساوت الطويلة نرتبها حسب الزاوية tita وهذا ترتيب دائري.

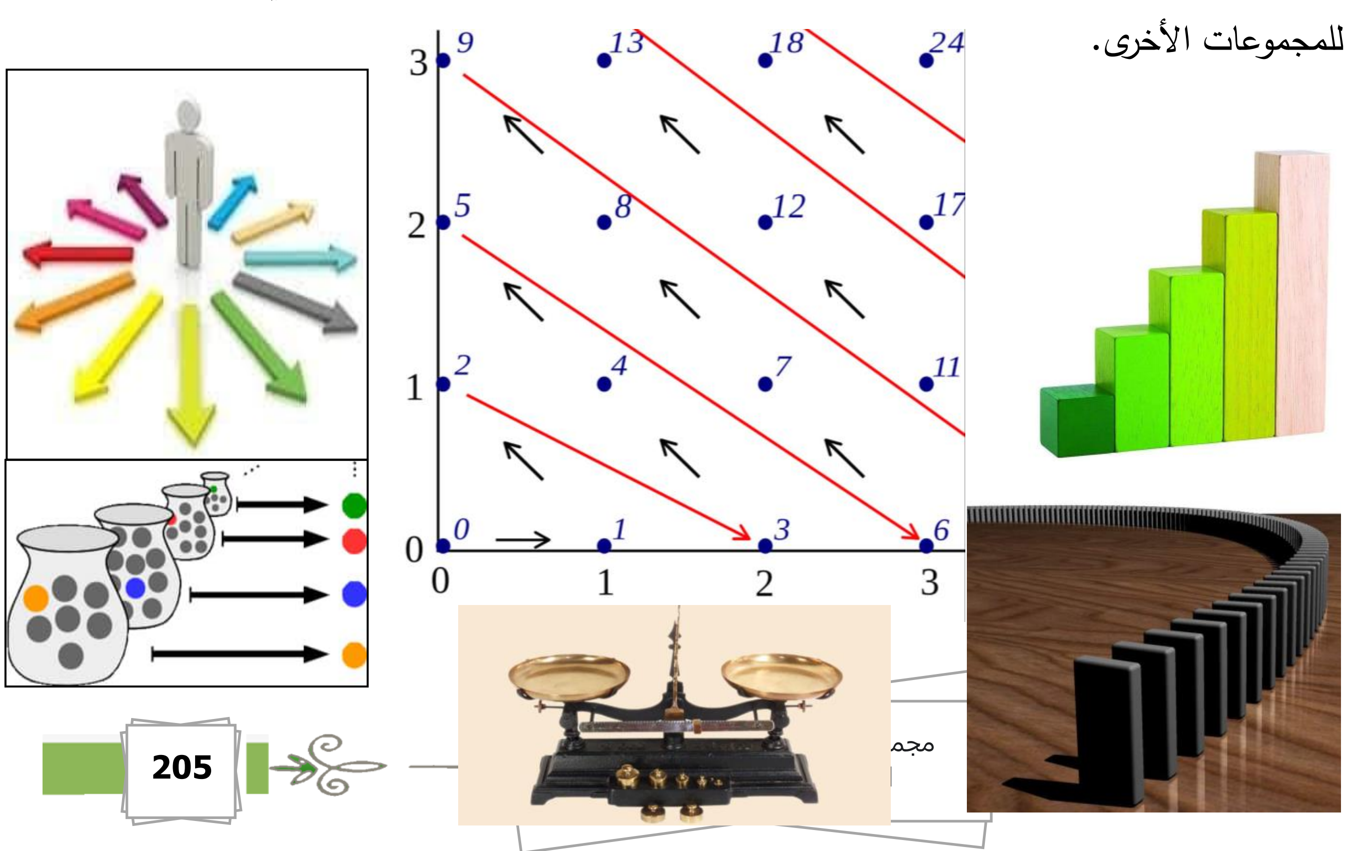
فالترتيب ليس مشكلة في مجموعة بل هو متعلق بقابلية الاختيار التي نجدها في العقل البشري لكن هل كل ترتيب هو نافع ؟ فهذا هو الذي نحتاجه فنحن نحتاج ترتيبا يمكنه أن يفيدنا في مسائل أخرى كالترتيب في R .

قد نستعمل الترتيب لمعرفة قابلية العد لمجموعة مثلا بمقارنتها بـ N وهنا سنحتاج لترتيب جيد فمثلا Q^+ يمكننا أن نرتبها كما هو في الصورة فتعطينا ترتيبا يوافق N نستنتج منه أنها قابلة للعد.

والترتيب يستعمل في النهايات فمثلا الأعداد المركبة ليس فيها ترتيب اعتيادي لكن يمكننا تعميم النهايات عليها انطلاقا من ترتيب طويلتها فهي حقيقية فلو أخذنا متتالية اعداد مركبة Z_n

يمكننا أن نقول أنها تؤول للعدد المركب Z_0 إذا كانت $\lim || Z_n - Z_0|| = 0$

فكما ترى علاقة الترتيب تفتح لنا أفاقا جديدة فالكثير من الخواص الموجودة في R يمكننا تمديدها للمجموعات الأخرى.



مسلمة الاختيار ، مبرهنة زارميلو : لماذا نلجأ لمثل هذا ؟ ولماذا يرفضها أصحاب المنطق الحدسي.

هل هذه خلافات فلسفية أو صناعة لحضارة الغد ؟

مبرهنة زارميلو تنص على أن أي مجموعة يمكن ترتيبها ترتيبا جيدا والترتيب الجيد هو ترتيب كلي مع خاصية زائدة وهو أن كل مجموعة جزئية غير خالية تقبل عنصرا أصغريا.

في الحقيقة هذه الخاصية تستلزم الترتب الكلي فإذا أخذنا عنصرين فلابد أن المجموعة المشكلة منهما لها عنصر أصغري أي يمكن ترتيبهما إذن الترتيب كلي .

من أمثلة الترتيب الجيد ترتيب مجموعة الأعداد الطبيعية فهي مرتبة ترتيبا جيدا أما Z فهي ليست مرتبة جيدا لأنها لا تقبل عنصر أصغري.

الترتيب المعتاد على R فهو ليس بترتيب جيد فالمجال]0,1]

لا يقبل عنصرا أصغريا وكذلك R نفسها.

لكن يمكن ترتيب R بترتيب جيد غير الترتيب المألوف وهنا نجد الكثير يسأل ممكن مثال على هذا الترتيب ؟

الجواب لا، فالوجود لا يستلزم إمكانية البناء في المنطق الشكلي لذلك ليس كل موجود رياضيا يمكن التمثيل له.

نعم فهذا هو أكبر خلاف بين أصحاب المنطق الشكلي وأصحاب المنطق الحدسي فأصحاب المنطق الحدسي يرون أنه ما لا يمكن بناؤه لا يمكن الجزم بوجوده لذلك هم لا يقبلون مسلمة الاختيار لأنها لا تعطي بناء إنما تجزم بالوجود ولا يقبلون كذلك البرهان بالخلف لنفس السبب ذلك أنه يعتمد على مبدأ الثالث المرفوع وهذا لا يسلمون به.

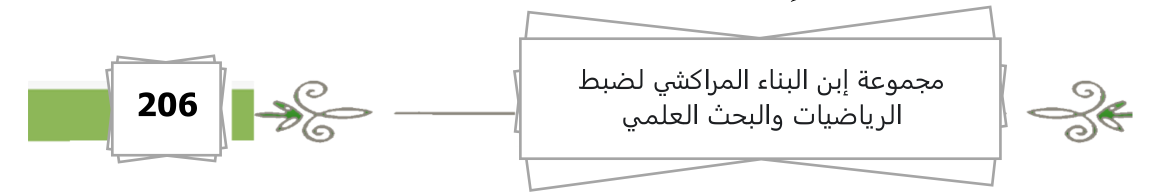
الغريب أن رفض أصحاب المنطق الحدسي للبرهان بالخلف يحدث كذلك غرائب فإذا برهنا أن مجموعة ليست خالية فهل هذا يعني أن فيها عناصر ؟ الجواب لا على المنطق الحدسي إلا أن نسلم بمبدأ الثالث المرفوع أي أن القضية صحيحة أو خاطئة ولا يوجد خيار ثالث!!!

فأصحاب المنطق الحدسي يفرقون بين المجموعة غير الخالية والمجموعة المأهولة فالأخيرة تحوي عناصر أما الأولى فهي مجرد نفي لعدم خلوها....

مبرهنة زارملو مكافئة لمسلمة الاختيار ومسلمة الاختيار نلجأ إليها عند عدم قدرتنا على بناء الكائنات بخوارزمية التكرار لأن التكرار لا يمكنه أن ينتج إلا مجموعات قابلة للعد.

مشكلة المجموعات غير القابلة للعد أنه لا يمكن استغراقها بتكرار الاختيار البسيط أي عنصر فعنصر وهذا ما يجعلنا نلجأ لمسلمة الاختيار أو ما يكافئها كمبرهنة زارميلو والتي فيها تسليم بالإستغراق عن طريق الترتيب الجيد وكذلك توطئة زورن فهي مكافئة لهما.

ومن هذا يظهر أن البناء غير متاح دائما وإلا لما لجأنا لمسلمة الاختيار.



مجموعة الأعداد الحقيقية مبنية على مسلمة الاختيار عن طريق أصناف تكافؤ المتتاليات الكوشية وهذا ما يعطيها خاصية التراص المحلي والترابط على عكس Q .

وعلى الترابط تبنى مبرهنة القيم المتوسطة.

لذلك R بشكلها المألوف تحوي غرائب من أعدادا غير قابلة للحساب وتحوي مجموعات غير قابلة للقياس فكل هذا نتيجة مسلمة الاختيار وبدون مسلمة الاختيار لا يمكن بناء مجموعات غير قابلة للقياس والبناء المقصود هنا بناء وجودي لا البناء الحسابي.

ولذلك R غير مقبولة بشكلها هذا عند أصحاب المنطق الحدسي ولا يقبلون كذلك مبرهنة القيم المتوسطة ف R بالمفهوم الحدسي تحوي فقط الأعداد القابلة للحساب وهي حقل مغلق قابل للعد.

قد يقول قائل ما فائدة الخوض في هذه المسائل وكأنه نقاش فلسفي أكثر منه رياضياتي والجواب على ذلك أن حضارتنا الحالية مع عصر المعلوماتية مبنية على أعمال المنطق الحدسي فالذي دفع العلماء إلى البحث عن الخوارزميات البنائية هي حركة المنطق الحدسي بزعامة

براور Luitzen Egbertus Jan Brouwer

وتلاميذه V. Glivenko و Arend Heyting و غودل Kurt Gödel وغيرهم

وهذا مقابل أصحاب المنطق الشكلي بزعامة هلبرت David Hilbert

فالمعركة الفلسفية التي قادها علماء الرياضيات في بداية القرن العشرين بعد أزمة الأساسيات حول طرق البناء الرياضياتي تولد منها فروع جديدة منها الرياضيات الحسابية البنائية والتي تولد منها علم الإعلام الآلي.

نحن اليوم يصعب علينا تخمين رياضيات المستقبل لكن عندما ننظر في تاريخ الرياضيات فنحن نعلم أن تطورها لم يكن عبر برهنة المبرهنات إنما كان دائما وليدا من بناء مفاهيمها ولذلك رياضيات الغد لن تكون مجرد حساب تكامل أو حل معادلة تفاضلية بل ستكون ببناء مفاهيم جديدة.

للفائدة:

1-قراءة مقال يا أستاذ ما هي مسلمة الاختيار و

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Axiome_du_choix

2-مبرهنة زارميلو

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Zermelo

3-قراءة مقال يا أستاذ حدثني عن علاقة الترتيب: لماذا في الأعداد الحقيقية لا يمكننا أن نجد العدد الذي هو موجود مباشرة قبل عدد معين أو مباشرة بعده ؟ .

4-الأعداد القابلة للحساب

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Nombre_r%C3%A9el_calculable



5-عدد أوميغا:

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Om%C3%A9ga_de_Chaitin

6-انصح بقراءة هذا المقال:

L'autre axiome de choix

7-نظرة نقدية وتاريخية لمسلمة الإختيار

http://www.numdam.org/article/RHM_2002__8_1_113_0.pdf





يا أستاذ حدثني عن مسلمة الاختيار، مبرهنة زارملو، توطئة زورن : ماذا تخبرنا هذه الثلاث ؟

الرياضيات في الأصل تجريد لطريقة البشر في رؤية الكون لذلك هي تستعمل **أمران:**

المنطق وهو تجريد لعمليات التفكير البشرية.

المجموعات وهي تجريد لتركيبات الكون من الأجزاء المختلفة.

من الأمور التي يستطيع عقلنا فعلها ببساطة هي تمييز عناصر دون أخرى فهذا ما نسميه المجموعة.

والبشر قادر كذلك على الاختيار منها فإذا ميز البشر تفاحة و برتقالة فهو بذلك صنع مجموعة من عنصرين وهو قادر على اختيار التفاحة أو الرمانة.

البشر يمارس هذا الاختيار بشكل عفوي حسب ما يراه يصلح لذلك فهو يختار أن الجبل أطول من التلة وأن الإنسان أثقل من القط وأن اليد جزء من الإنسان وهكذا.

لكن عند الولوج للرياضيات لابد من التجريد فلا نتكلم عن قط وكلب وبقرة بل نتكلم عن مجموعات فيها عناصر ومجموعة محتواة في مجموعة.

من الاختيار البسيط الذي يتقنه العقل البشري في المجموعات العددية هو جعل الواحد أصغر من الإثنين مثلا.

لكن المعضلة تبدأ عندما تكون المجموعة غير منتهية فكيف لبشر أن يختار عنصرا عنصرا منها وهي غير منتهية ؟

كما تأملتم الترتيب مجرد عملية اختيار فعندما نضع $x < y$ فذلك لأننا اخترنا ذلك فلا فرق بين هذه وبين وضع ثنائية (x,y) فكله اختيار.

في المجموعات القابلة للعد حل البشر المشكلة بالتراجع فمثلا لو أردنا أن نختار من بين الأعداد الطبيعية الأعداد الأولية فيكفي ان نستعمل هذه الخوارزمية بالتراجع:

من أجل كل عدد n ننظر هل هو أولي أو لا ثم نمر ل$n+1$ وهكذا...

فمهما كان العدد m فسنصل إليه وسنجربه لكننا سنسلم هنا بإمكانية تكرارنا للخوارزمية بلا انتهاء.

المشكل يزداد تعقيدا إذا مررنا لمجموعات غير قابلة للعد مثل الأعداد الحقيقية، فلا يمكننا تطبيق الطريقة السابقة إذ هي صالحة فقط في المجموعات القابلة للعد.

فماذا لو أردنا أن نختار الأعداد التي في كتابتها العشرية الرقم ثمانية ؟

في الحقيقة هناك طريقة أخرى ما دمنا داخل مجموعة وهي مسلمة الفهم في نظرية المجموعات ZF

تخبرنا مسلمة الفهم أن كل خاصية داخل مجموعو تشكل لنا مجموعة.

فمن السهل أن نقول لنأخذ مجموعة الأعداد السالبة لأنها خاصية داخل مجموعة الأعداد الحقيقية فتشكل مجموعة ولا نحتاج هنا لفرزها عنصرا عنصرا.



إن كنا نقدر على ذلك داخل مجموعة فماذا لو عقدنا المسألة وتصورنا مجموعة مجموعة فيها مجموعات وأردنا أن نختار من كل مجموعة منها عنصرا ؟

فلو سمينا مجموعتنا X وحاولنا تطبيق الطريقة الأولى بالاختيار عنصرا بعنصر فسنقوم بأخذ مجموعة من مجموعتنا ولنسمها A_1 فنختار منها $x_1 \in A_1 \in X$ ثم نأخذ عنصر ثان من مجموعة ثانية

$x_2 \in A_2 \in X$

لو واصلنا هكذا فسنختار عناصر قابلة للعد فستواجهنا نفس المشكلة التي بدأنا بها فلو كان في المجموعة X عدد غير قابل للعد من المجموعات فلن نستطيع استغراقها بهذه الطريقة.

فلنحاول تطبيق الطريقة الثانية عن طريق مسلمة الفهم ؟

لا نستطيع ذلك لأن عناصرنا ليست في المجموعة الأم بل هي في المجموعات داخل المجموعة الأم!!!

فكيف نصنع إذن ؟

ليس لنا طريقة إلا التسليم بإمكانية ذلك وهذا ما نسميه مسلمة الاختيار.

فمسلمة الاختيار تخبرنا أن هناك دالة اختيار من مجموعتنا تنقل كل عنصر منها وهو مجموعة نحو عنصر منه أي نختار من كل عنصر كمجموعة عنصرا منه وتصاغ الدالة هكذا:

$$c : X \to \cup A \, , A \in X$$

$$A \in X \to a \in A$$

لكن كيف هي هذه الدالة ؟ بما أننا سلمنا بهذه كمسلمة فلا ندري كيف نصنعها ولو كنا ندري كيف نصنعها لما سلمنا بوجودها.

لذلك أصحاب المنطق الحدسي لا يقبلون هذه المسلمة لأنها ليست بنائية.

بإضافة هذه المسلمة لنظرية المجموعات ZF نصنع نظرية المجموعات ZFC

لكن ماذا عن مبرهنة زارملو ؟

تنص مبرهنة زارملو على أن أي مجموعة يمكن ترتيبها ترتيبا جيدا والترتيب الجيد هو الذي يحقق أن كل مجموعة جزئية غير خالية تقبل عنصرا أصغريا.

لو تأملنا جيدا وحاولنا صناعة هذا الترتيب بأنفسنا على مجموعة فيمكننا اختيار عنصر x_1

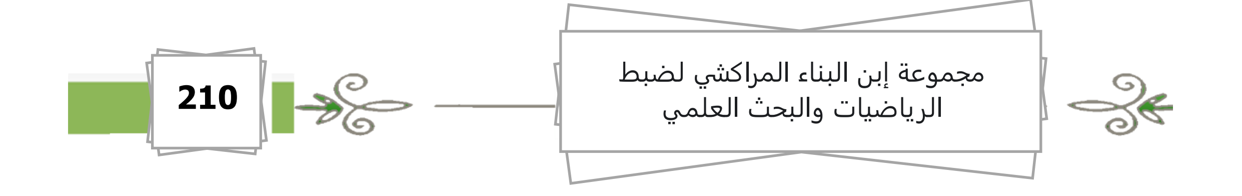
ثم اختيار ثان ووضع $x_1 < x_2$ فالترتيب هو مجرد اختيار ثم ثالث $x_1 < x_2 < x_3$

ونواصل هكذا ، فنلاحظ أنها نفس المعضلة السابقة مع مسلمة الاختيار إذ سنصنع سلسلة مرتبة جيدا قابلة للعد فقط.

لكن كيف نصنع إن أردنا ترتيب كل المجموعة وكانت غير قابلة للعد ؟

فهنا نحن نمتلك آلتين قويتين:

الأولى مسلمة الاختيار فنحن نعلم أنه مهما كانت المجموعة المرتبة جيدا التي تمكنا من صنعها داخل



مجموعتنا فإنه إن بقيت عناصر لم ترتب بعد يمكننا اختيار عنصر منها فنضيفه مرتبا من الأعلى لسلسلتنا وهكذا نصنع سلسلة أطول إلى أن نستوفي كل العناصر.

لكن ما الذي يضمن لنا أننا نستطيع استيفاء جميع العناصر ؟

تضمن لنا ذلك مسلمة الفهم فقد صنعنا خاصية بإمكانية الاختيار فإذا زدنا عنصرا عنصرا في سلسلتنا فسنصنع متتالية سلاسل Si محتواة في بعضها لكن قد تكون غير قابلة للعد فيكفي استعمال مسلمة الفهم بتوحيدها أي الخاصية هي أن يكون عنصر داخل أحد من هذه المجموعات لنصنع سلسلة أعظمية مرتبة جيدا تساوي مجموعتنا فنكون قد رتبنا مجموعتنا الأم جيدا.

العملية التي قمنا بها الآن هي بالذات توطئة زورن فتوطئة زورن تخبرنا أن كل مجموعة استقرائية تقبل عنصرا أعظميا واستقرائية تعني أنها مزودة بعلاقة ترتيب وأن كل سلسلة مرتبة كليا بداخلها تقبل حدا أعلى.

فلو أخذنا سلسلة ثم تبعنا عناصرها عنصرا عنصرا ثم أكملناها من المجموعة باختيار حد أعلى ثم ما أعلى منه وهكذا فسنصل في النهاية لحد هو أعظمي لا حد بعده.

فمسلمة الاختيار تضمن لنا إمكانية هذا الاختيار ومسلمة الفهم تضمن لنا أن هذه الخاصية تصنع لنا عنصرا أعظميا.

فمسلمة الاختيار موجودة في مبرهنة زارملو وتوطئة زورن عن طريق الترتيب.

بل مبرهنة زارملو وتوطئة زورن تكافئان مسلمة الاختيار.

أما مبرهنة زارملو فكون أننا نستطيع ترتيب أي مجموعة جيدا فلو أخذنا مجموعة مجموعات وأرفقنا كل مجموعة منها بعنصرها الأصغري لأنها مرتبة جيدا حسب مبرهنة زارملو فنكون صنعنا دالة الاختيار المطلوبة.

يمكننا كذلك رؤية المسألة عن طريقة توطئة زورن فبكوننا يمكننا توسيع الاختيار مجموعة بمجموعة من مجموعتنا الأن فيمكننا ذلك من صناعة دوال اختيار تمدد كل واحدة الأخرى بإضافة مجموعات جديدة نختار من كل منها عنصرا فبهذا نصنع مجموعة استقرائية تقبل عنصرا أعظميا وهو أكبر دالة اختيار ممكنة والتي ستشمل جميل مجموعات مجموعتنا الأم.

فكل هذه المبرهنات تدور حول الاختيار والترتيب والتوسعة التراجعية فهي نفس المسألة لكن ينظر إليها من زوايا مختلفة.

فكأننا نبرهن بالتراجع نبدأ بمجموعة تحقق خاصية ثم نضيف إليها عنصرا فنوسعها ثم نوسعها ثم نوسعها .... إلى أن نصل لمجموعة أعظمية تحقق خاصيتنا.

فسواء سمينا هذه الخاصية اختيار أو ترتيب فالمسألة نفسها.

لذلك توطئة زورن تشكل أفضل تمثيل عملي لمسلمة الاختيار فيكثر استعمالها في البراهين ومسلمة الاختيار تمثل أفضل تجريد للمسألة لذلك تضاف كمسلمة أما مبرهنة زارملو فهي بين بين.



وفي هذا يقول الرياضياتي جيري بون:

مسلمة الاختيار بديهيا صحيحة، أما مبدأ الترتيب الجيد فبديهيا خاطئ، وأما مسلمة الاختيار فلا أحد يعرف.

لقد برهن غودل وكوهين أن مسلمة الاختيار منفصلة عن النظام المسلماتي لزارملو فرانكل فهي شيء يسلم به البشر بسبب المجموعات غير القابلة للعد.

وإن كانت تبدو لأول وهلة بديهية لكنها تنتج متناقضات لا يقبلها العقل كمتناقضة باناخ تارسكي والتي تنص على أنه يمكن تقسيم كرة لأجزاء معدودة منتهية ثم إعادة تركيبها لصناعة كرتين!!

بالطبع التقسيم يمر عبر مجموعات غير قابلة للقياس والتي لا يمكننا صناعتها إلا بمسلمة الاختيار.

تطبيقات مسلمة الاختيار كثيرة أغلبها يمر عبر توطئة زورن كوجود قاعدة لأي فضاء شعاعي ووجود تقسيمات أصناف تكافؤ في مجموعة ومبرهنة هان باناخ.

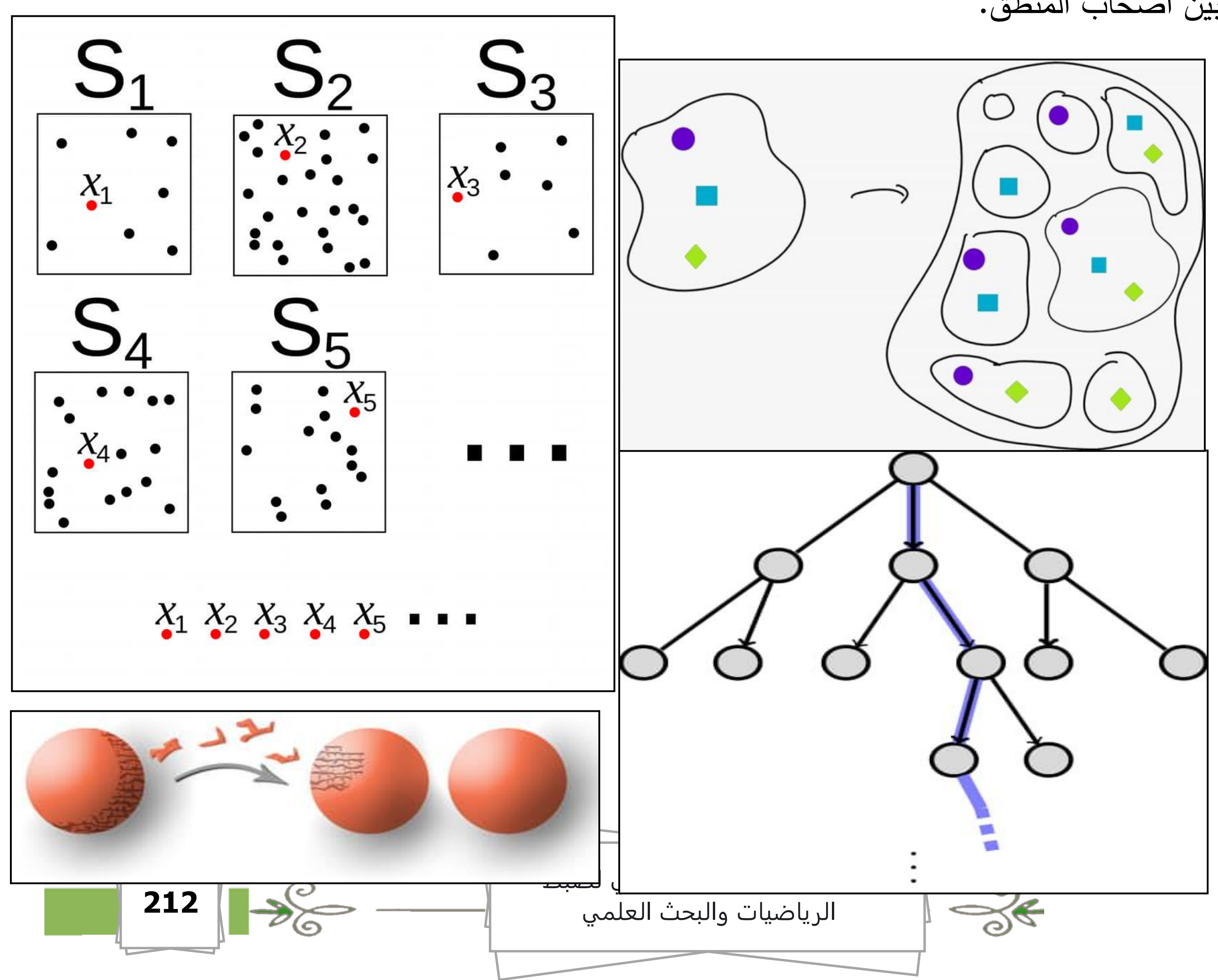
بل حتى في إمكانية مقارنة مجموعتين من حيث القدرة نحتاج لتوطئة زورن.

إحصاء استعمالاتها يحتاج لموسوعة.

لمسلمة الاختيار تكافؤات كثيرة منها مبرهنة الحد الأقصى لهوسدورف والذي ينص على أن كل مجموعة مرتبة جزئيا فيها كل مجموعة مرتبة كليا محتوية في مجموعة مرتبة كليا أعظمية.

وكما نرى هي من نفس صياغة توطئة زورن.

تشكل مسلمة الاختيار وتدا أساسيا في الرياضيات المعاصرة لكثرة استعمالاتها وإن كانت ليست محل أتفاق بين أصحاب المنطق.



السلام عليكم ورحمة الله وبركاته

هذه النسخة الأولى في شرح و برهنة تكافؤ مسلمة الاختيار مع مبرهنة زارملو و توطئة زورن، هو مكسب لمجموعتنا، أضعه بين أيديكم للاستفادة و المراجعة، فمن عنده ملاحظات لتحسين الملف، ليتكرم بوضعها في التعليقات.

وبارك الله فيكم.

رابط الملف

https://ia601409.us.archive.org/.../axiom_choix_v1.01.pdf

الملف:

مسلمة الاختيار، مبرهنة زارميلو، توطئة زورن

برهان ومفاهيم

نسخة للمراجعة رقم 1.01

الأستاذ عبد الحكيم بن الأمين بن شعبانة

هدية لرواد مجموعة ابن البناء المراكشي

الأحد 11 ربيع الأول 1443 ه

الموافق ل 17 أكتوبر من سنة 2021 ميلادية

بسم الله الرحمن الرحيم



فهرس

			صفحة
(1)	مقدمة		3
(2)	مسلمة الاختيار		4
(1.2)		نص مسلمة الاختيار	4
(2.2)		صياغة ثانية	4
(3.2)		شرح	5
(3)	مبرهنة زارملو		6
(1.3)		نص مبرهنة زارملو	6
(2.3)		استلزام مبرهنة زارملو لمسلمة الاختيار	6
(3.3)		شرح	6
(4)	توطئة زورن		8
(1.4)		نص توطئة زورن	8
(2.4)		توطئة زورن تستلزم مبرهنة زارملو	8
(3.4)		شرح	10
(4.4)		برهان توطئة زورن	11
(1.4.4)		مسلمة الاختيار تستلزم توطئة زورن	11
		محاولة ساذجة عن طريق صناعة سلسلة أعظمية عنصرا عنصرا	11
		البرهان عن طريق مسلمة الفهم	13
		تعريف الجزء الأولي	13
		تعريف المجموعة الجيدة	13
		المجموعات الجيدة محتواة في بعضها البعض	15
		المجموعات الجيدة من اتحاد المجموعات الجيدة هي أجزاء أولية	18
		اتحاد المجموعات الجيدة مجموعة جيدة	18
(2.4.4)		توطئة زورن تستلزم مسلمة الاختيار	20
(5)	مبرهنات نستعمل فيها مسلمة الاختيار أو ما يكافئها		21
(6)	مبرهنات أخرى مكافئة لمسلمة الاختيار		22
(7)	انفصال مسلمة الاختيار عن النظام المسلماتي زارملو فرانكل		22
(8)	إبسيلون هلبرت		22
(9)	قائمة المراجع		23





(1)
مقدمة

الحمد لله رب العالمين و الصلاة والسلام على أشرف المرسلين وعلى آله وصحبه ومن تبعهم بإحسان إلى يوم الدين، أما بعد

مسلمة الاختيار من أهل إحدى ركائز نظرية المجموعات، وهي مكافئة لمبرهنة زارميلو، و توطئة زورن

خاصة هذه الأخيرة فاستعمالاتها كثيرة، لذلك أحببت أن أضع برهانها باللغة العربية بين أيدي المتابعين لمنشورات مجموعة ابن البناء المراكشي وذلك ضمن البرنامج الذي بدأناه في ضبط وتبسيط و شرح الرياضيات وبنائها على أسس سليمة، مع نشرها باللغة العربية

رغم أهمية مسلمة الاختيار و مكافئاتها لم أعثر على برهان التكافؤ باللغة العربية على الشبكة، لذلك راجعت العديد من المراجع الأجنبية بمختلف البراهين خاصة توطئة زورن فاخترت أبسطها فترجمته و بسطته مع زيادة الشرح والضبط ليستفيد منه الإخوة إن شاء الله

فهذه صدقة جارية أرجو أن أنال ثوابها من الله عز وجل وكذلك ينال منه كل من ساهم في تكويني العلمي وأخص بالذكر والشكر الوالدة حفظها الله و الوالد رحمه الله وأستاذي في الثانوي الأستاذ محمد الطاهر ميهاني، وأستاذي الفاضل في الطوبولوجيا الدكتور الحسن واعزار، وأستاذي الفاضل الذي استفدت منه كثيرا في الطوبولوجيا الدكتور محمد حازي وأستاذي الفاضل في نظرية القياس و المكاملة الدكتور يوسف يوسف عتيق، و أستاذي الفاضل في نظرية المجموعات والمنطق الدكتور ناجي هرماس

(2)

(1.2)

مسلمة الاختيار

مسلمة الاختيار هي إحدى ركائز نظرية المجموعات

ZFC

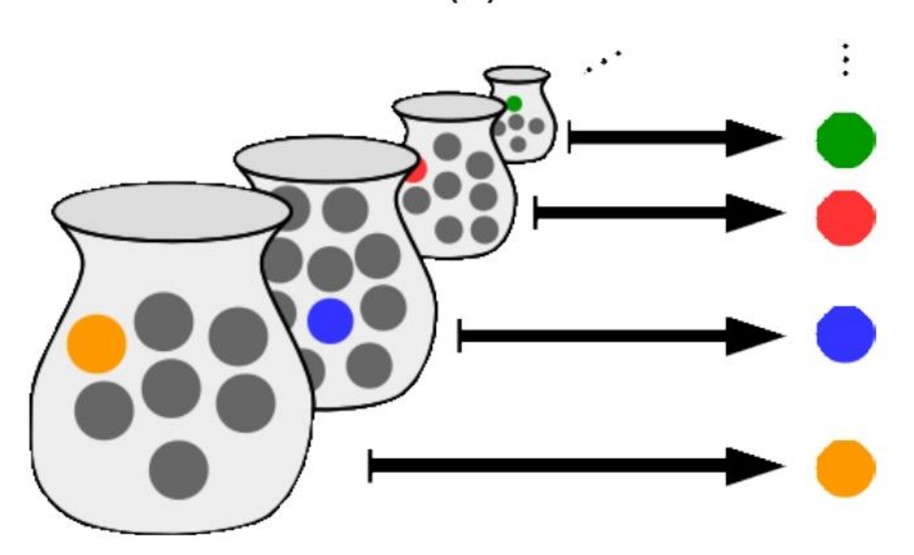
والتي تنص على أنه إذا كانت لدينا مجموعة غير خالية من المجموعات غير الخالية

$$(X \neq \emptyset) \quad \wedge \quad (\forall A \in X : A \neq \emptyset)$$

فإنه يوجد تطبيق من هذه المجموعة نحو اتحاد مجموعاتها يرفق لكل عنصر والذي هو مجموعة نحو عنصر منه

نسمي هذا التطبيق بدالة الاختيار لأنه يختار من كل مجموعة عنصرا منها، سنرمز له كالتالي

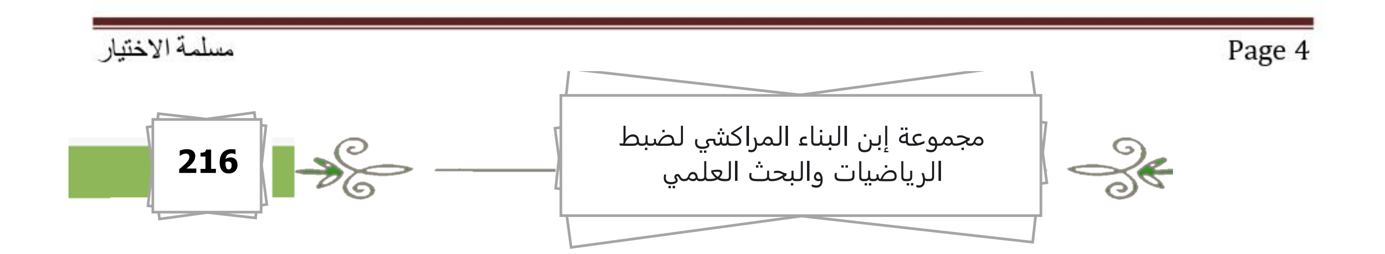
$$c : X \rightarrow \cup A : A \in X$$
$$A \rightarrow c(A) \in A$$



(2.2)

صياغة ثانية

صياغة ثانية لهذه المبرهنة تنص على أن الجداء الديكارتي لهذه المجموعات غير خالي و هذا يعني وجود عنصر منه فكل احداثية منه هي صورة دالة الاختيار لمجموعتها



(3.2)
شرح

قد تبدو المسلمة بديهية لكن لا بديهية في الرياضيات فالرياضيات كلها مبنية على مسلمات وبراهين

حتي ندرك حجم المشكلة، لنختر مجموعة مجموعات غير خالة فننظر لها عنصرا عنصرا ، فلنختر عنصرا من المجموعة الأولى بما أنها غير خالية

$$x(1) \in S(1)$$

ثم أخرى وأخرى و هكذا

$$x(2) \in S(2)$$

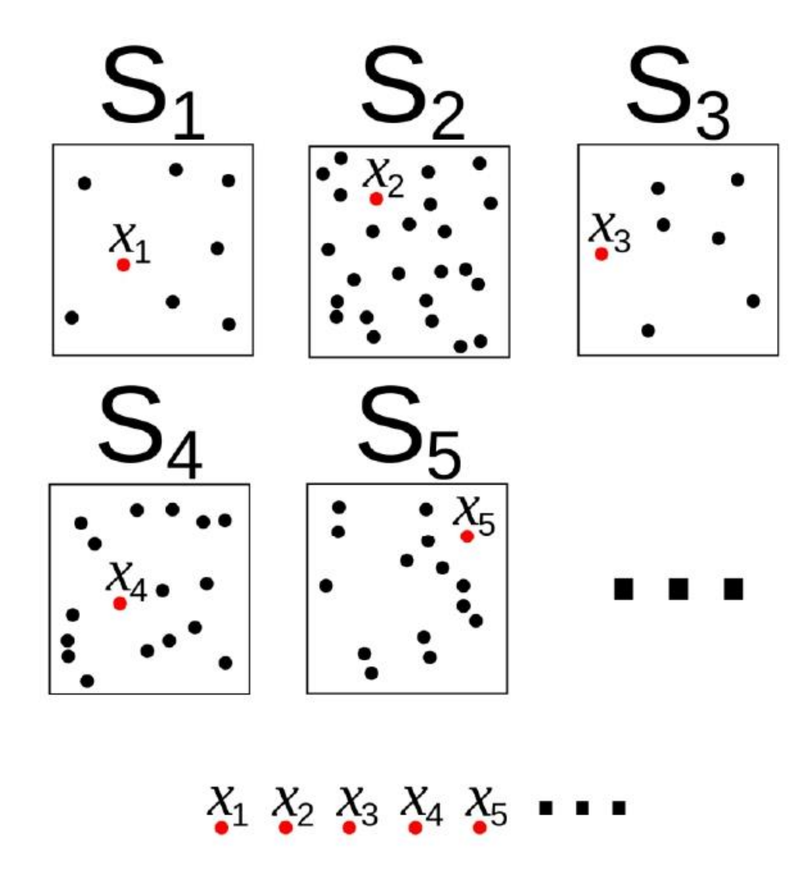
....

$$x(n) \in S(n)$$

......

من الواضح أنه إذا كانت مجموعتنا الأم غير منتهية لابد لنا من التسليم بمواصلة الاختيار غير انتهاء، وحتى لو سلمنا بذلك فنختار مجموعة من الشكل

$$\{x(n) : n \in N\}$$



فهي مجموعة قابلة للعد، فإذا كانت مجموعتنا الأم غير قابلة للعد فإننا لن نستغرق جميع عناصرها بهذه الطريقة

بمسلمة الاختيار نسلم بإمكانية ذلك لكن مع دفع ثمن أننا لا ندري كيف نصنع دالة الاختيار ولذلك هذه المسلمة محل خلاف بين المنطقيين فالمنطق الحدسي لا يقبلها لأنها لا تعطي طريقة بنائية لصناعة هذه الاختيارات

(3)

(1.3)
مبرهنة زارملو

تنص مبرهنة زارملو على أن كل مجموعة غير خالية يمكن تزويدها بترتيب جيد، و الترتيب الجيد هو الذي يحقق أن كل جزء غير خال من المجموعة يقبل عنصر أصغري.

الترتيب الجيد يستلزم الترتيب الكلي إذ يكفي وضع عنصرين في مجموعة لكي تقبل هذه الأخيرة عنصرا أصغريا فيتحقق الترتيب بينهما.

$$\{x,y\}$$

(2.3)
استلزام مبرهنة زارملو لمسلمة الاختيار

إذا تمعنا مبرهنة زارملو أدركنا أن مسلمة الاختيار حالة خاصة منها، ففي مسلمة الاختيار نعرف تطبيقا عل مجموعة مجموعات غير خالية نختار به من كل مجموعة عنصرا منها،

فيكفي تزويد اتحادها بعلاقة ترتيب جيد حسب مبرهنة زارملو لكي يكون تطبيقنا هو الذي يختار من كل مجموعة العنصر الأصغري منها و هو مضمون الوجود بالمبرهنة.

(3.3)
شرح

لو قمنا بمثل صنيع المثال السابق فنختار من مجموعة غير خالية العناصر عنصرا عنصرا لترتيبها سنجد

$$x(1) \in X$$

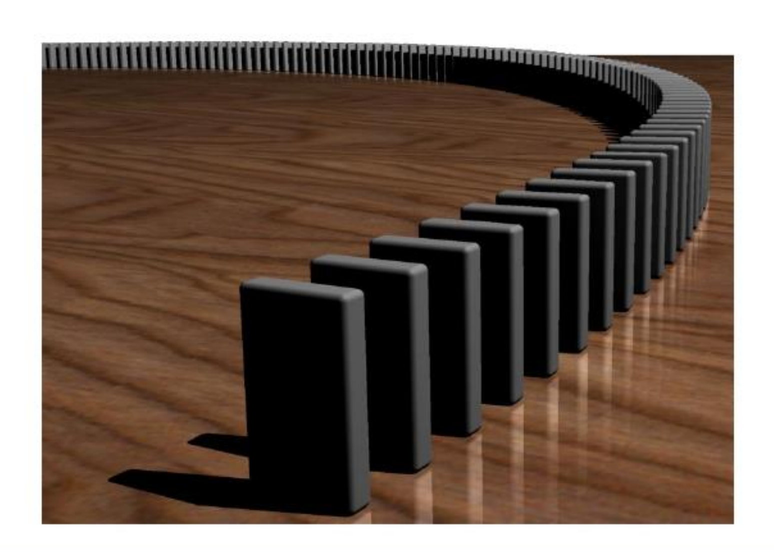
ثم عنصر آخر ثم آخر و هكذا

$$x(2) \in X, \qquad x(1) < x(2)$$

....

$$x(n) \in X, \qquad x(1) < x(2) < \ldots < x(n)$$

......

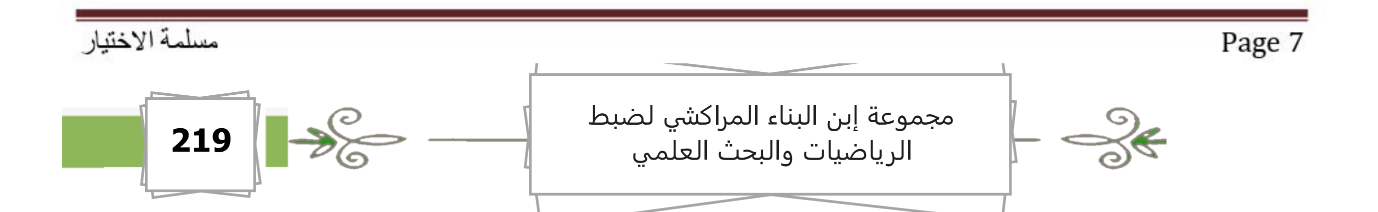


من الواضح انه إذا كانت مجموعتنا غير منتهية لابد لنا من التسليم بمواصلة الترتيب من غير انتهاء، وحتى لو سلمنا بذلك فسنصنع مجموعة مرتبة جيدا من الشكل

$$\{x(n) : n \in N\}$$

وهي قابلة للعد، فإذا كنا في مجموعات غير قابلة للعد ليس لنا إلا التسليم بإمكانية ذلك، لكن كما يظهر من المثال نحن في معضلة مشابهة لمسلمة الاختيار وقد بينا أن مبرهنة زارملو تستلزم مسلمة الاختيار، بل ذكرنا في المقدمة أنها تكافؤها و تكافؤ توطئة زورن

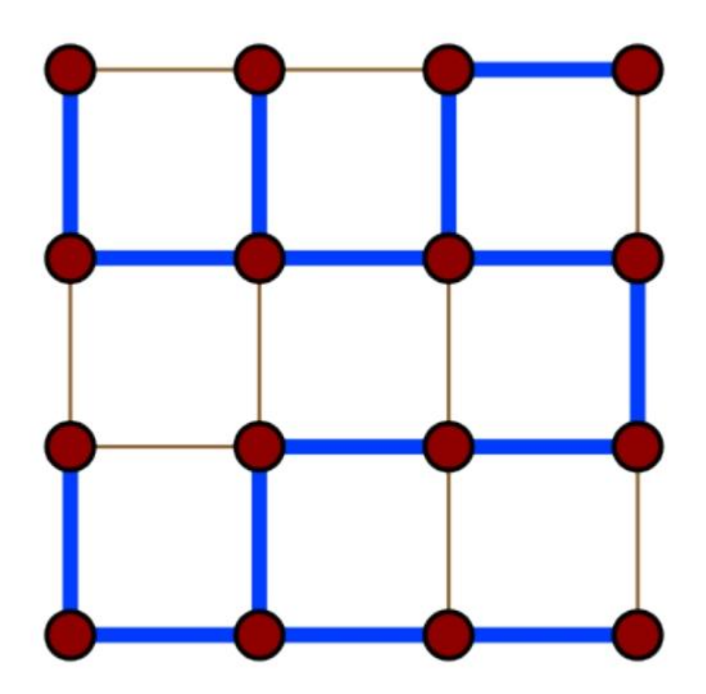
سنبرهن في الفصول القادمة التكافؤ بين مسلمة الاختيار وتوطئة زورن ، و كذلك استلزام توطئة زورن لمبرهنة زارملو، وبما أننا رأينا هنا استلزام مبرهنة زارملو لمسلمة الاختيار سنكون بذلك قد برهنا على تكافؤ هذه الثلاث



(4)

(1.4)
توطئة زورن

تنص توطئة زورن على أن أي مجموعة استقرائية غير خالية تقبل عنصرا أعظميا، و المجموعة الاستقرائية هي مجموعة مزودة بعملية ترتيب جزئي بحيث كل سلسلة من العناصر مرتبة كليا منها تقبل حدا أعلى



(2.4)
توطئة زورن تستلزم مبرهنة زارملو

سنأخذ كمثال تطبيقي لتوطئة زورن برهنة مبرهنة زارملو، فقد لاحظنا في محاولتنا لبناء ترتيب جيد على مجموعة X في مبرهنة زارملو عنصرا بعنصر أنه تمكنا من صناعة ترتيب لعناصر من الشكل

$$x(i) \in X, 1 \leq i \leq n \in N : x(1) < x(2) < \dots < x(n)$$

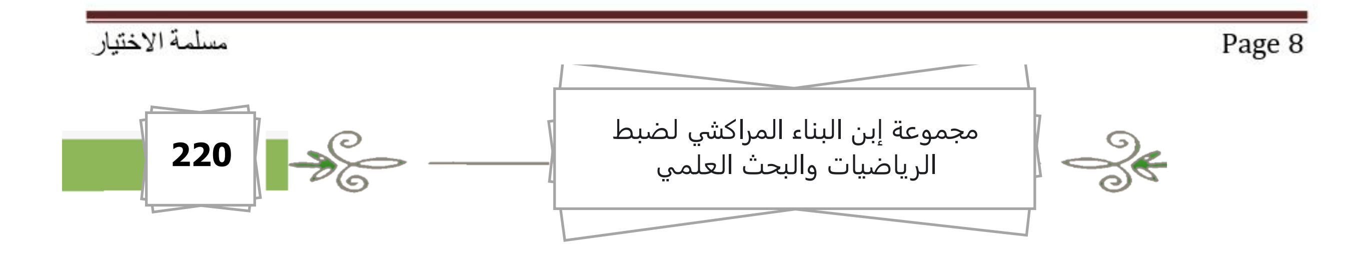
لكن المشكلة نحتاج أن نعمم هذا الترتيب و التعميم يحتاج أكثر من صناعة هذا الترتيب عنصرا عنصرا لأننا لن نستطيع استغراق جميع عناصر المجموعة في جميع الحالات خاصة إذا كانت غير قابلة للعد،

للتمكن من ذلك بدل التفكري عنصرا عنصرا سننظر للمسألة بشكل أعم فللنظر لهذه المجموعة التي تشمل جميع الترتيبات الجيدة الممكنة على أجزاء من X وهي مجموعة مكونة من ثنائيات، مجموعة جزئية من X و علاقة ترتيب جيد $\leq$ معرفة عليها

$$O = \{(A, \leq|A) : A \subset X , \leq|A\}$$

حيث رمزنا هنا لعلاقة الترتيب الجيد ب

$$\leq|A$$



نحن نعلم أنه هذه المجموعة غير خالية لأنه تمكنا من صناعة ترتيب جيد على مجموعات جزئية منتهية

يمكننا جعل هذه المجموعة استغراقية عن طريق تزويدها بعلاقة الترتيب التالية

$$(A1, \leq|A1)\ ,\ (A2, \leq|A2) \in O : (A1, \leq|A1) \ \leq\ (A2, \leq|A2)$$

إذا وفقط إذا كان

$$A1 \subset A2$$

وعلاقة الترتيب الجيد على المجموعة الكبرى تمديد لعلاقة الترتيب الجيد على المجموعة الصغرى

إذن بدل تمديد الترتيب عنصرا عنصرا تصورنا جميع الترتيبات الجيدة بتمديداتها، فائدة ذلك أننا صنعنا مجموعة استقرائية فنحن نلاحظ أنه إذا أخذنا سلسلة مرتبة كليا فهي تقبل حدا أعلى و الذي يمكننا صناعته باتحاد المجموعات المرتبة كونها متداخلة واحدة داخل واحدة وتوحيد ترتيباتها بالتمديد :



فإذا كانت لدينا سلسلة مرتبة كليا

$$E = \{(A, \leq|A) \in O\}$$

فسنعرف الحد الأعلى

$$(H, \leq|H)$$

باتحاد المجموعات

$$H = \cup A\,,\ \ (A, \leq|A) \in E$$

وعلاقة الترتيب $\leq|H$ بين عنصرين x و y من H هي نفسها علاقة الترتيب المعرفة على مجموعة A تشملهما ذلك أنها مجموعات محتواه في بعضها فلابد أن هناك مجموعة أكبر تشمل العنصرين بين هذه المجموعات في الاتحاد

فهذا حد أعلى للسلسة و منه مجموعتنا استقرائية فيمكننا تطبيق توطئة زورن بوجود عنصر أعظمي

$$(S\,, \leq|S)$$

المجموعة S لابد أن تساوي مجموعتنا الأم X لأنه لو كان هناك عنصر z في المجموعة الأم X ليس في المجموعة S فيمكننا إضافته بسهولة للمجموعة S و ترتيبه كعنصر أكبر من جميع عناصرها لنمددها لمجموعة مرتبة جيدا أكبر و هذا تناقض لأنها عنصر أعظمي

$$S \cup \{z\}$$

ومنه

$$S = X$$

والترتيب $\leq|S$ هو ترتيب جيد عليها

فنكون بذلك قد برهنا مبرهنة زارملو

(3.4)
شرح

كما لاحظنا من برهان مبرهنة زارملو توطئة زورن تسمح لنا بتمديد الخاصية من مجموعة بسيطة إلى مجموعات أعم بالاحتواء فكأننا نسلم باستغراق الخاصية على هذه المجموعات المرتبة لنصل لمجموعة أعظمية، فهذه نفسها معضلة الاختيار و معضلة الترتيب، فنحن نستطيع القيام ببناء ذلك في الحالات المنتهية لكن متى كنا في مجموعات غير منتهية وغير قابلة للعد استحال ذلك إلا عن طريق التسليم.

في هذه المبرهنات شبيه بالبرهان بالتراجع إذ هناك خاصة محققة في الحالة الأولى و يمكننا تمديدها من حالة للتي تليها لكن البرهان بالتراجع يستعمل قابلة العد ففي هذه الحالة يمكننا الوصول إلى أي عنصر للتحقق من تحققيه للخاصية عن طريق التقدم عنصرا عنصرا و هذا ما نسميه الاستغراق.

لكن إذا كان عدد العناصر غير قابل للعد استحال ذلك بهذه الطريقة، لذلك نسلم بذلك عبر مسلمة الاختيار أو الترتيب لزارملو أو توطئة زورن

(4.4)
برهان توطئة زورن

(1.4.4)
مسلمة الاختيار تستلزم توطئة زورن

لتكن مجموعة غير خالية استقرائية مزودة بعلاقة ترتيب

$$(X,\leq)$$

للحصول على عنصر أعظمي سنحاول صناعة أكبر سلسلة ممكنة من العناصر المرتبة كليا وفي آخرها سنجد عنصرنا الأعظمي.

محاولة ساذجة عن طريق صناعة سلسلة أعظمية عنصرا عنصرا

سنسمي مجموعة المجموعات الجزئية من **X** التي تقبل حدا أعلى تماما ب **ξ** أي

$$\xi = \{A \subset X : \exists s : (s \in X) \wedge (s \notin A) \wedge (\forall a \in A : a < s)\}$$

نلاحظ أن المجموعة الخالية هي عنصر من **ξ** لأن كل العناصر هي حد أعلى لها

الآن سننطلق من مسلمة الاختيار التي تخبرنا أن مجموعة المجموعات الجزئية ل **X** إذا استثنينا منها المجموعة الخالية تقبل دالة اختيار تمكننا من اختيار من كل مجموعة عنصرا منها ولنسمي الدالة c فيكون لدينا :

$$\begin{aligned} c : P(X) \setminus \emptyset &\to X \\ A &\to c(A) \in A \end{aligned}$$

الآن سنختار بهذه الدالة لكل عنصر من **ξ** حدا أعلى له من حدوده العليا تماما فنعرف الدالة m بواسطة دالة الاختيار المطبقة على مجموعة الحدود العليا تماما بأنها ترفق لكل عنصر بحد من حدوده العليا تماما

$$\forall A \in \xi : m(A) = c(\{s \in X : (\forall a \in A : a < s\})$$

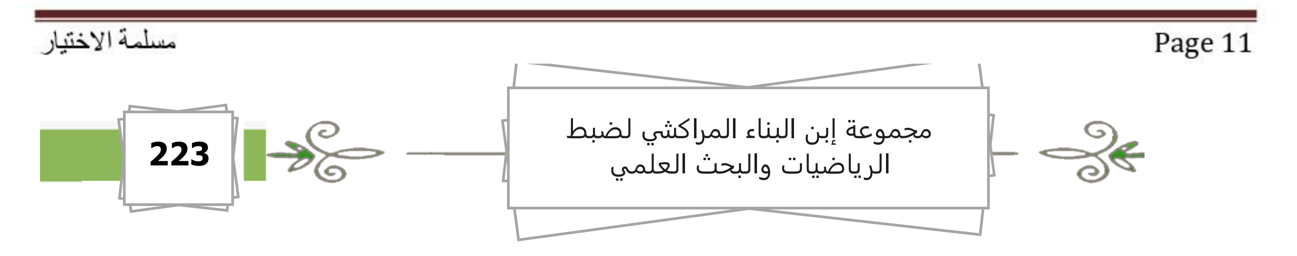
الحد الأعلى تماما لمجموعة هو حد أعلى لها لا ينتمي إليها

فكرة البرهان أن ننطلق من المجموعة الخالية فنختار لها حدا فنضع

$$s(0) = m(\emptyset)$$

ثم نختار حدا أعلى ل s(0) باعتبار أن المجموعة {s(0)} مرتبة كليا فحسب شروط توطئة زورن كل مجموعة مرتبة كليا تقبل حدا أعلى فنضع

$$s(1) = m(\{s(0)\})$$



فنحصل على سلسلة جديدة مرتبة كليا $\{s(0),s(1)\}$ ونواصل هكذا ما دام كل مجموعة نحصل عليها هي تنتمي ل ع أي تقبل حدا أعلى تماما فيمكننا أن نكتب

$$s(n+1) = m(\{s(0),\dots,s(n)\})$$

فنحن نرتب الحدود واحدا واحدا

$$s(0) < s(1) < \dots < s(n) < s(n+1)$$

سنتوقف إذا وصلنا إلى $s(k)$ أعظمي لكن إذا لم نصل لذلك سنواصل إلى المالانهاية فنشكل المجموعة

$$E = \{s(n) : n \in \mathbb{N}\}$$

وهي سلسلة مرتبة كليا فحسب شروط توطئة زورن تقبل حدا أعلى وليكن M وهو لا ينتمي إليها وإلا لكانت E منتهية وتوقفنا عنده في عملية بناء الحدود.

إذن المجموعة E هي عنصر من مجموعتنا ع فهي تقبل حدا أعلى تماما.

سنضع على نفس الطريقة :

$$s(\infty) = m(E)$$

يمكننا أن نضيف هذا الحد الجديد ل E ونواصل المسيرة كما فعلنا سابقا حتى نصل لعنصر أعظمي.

لكن المشكلة التي تواجهنا هنا أن هذه الطريقة قابلة للعد وقد لا تتوقف كما لاحظنا مع E

وهذا ما لمسناه فيما سبق مع المبرهنات الأخرى

فنحتاج تسريعها بطريقة مختلفة لذلك سننظر للطريقة السابقة بشكل عام لا خاص كما فعلنا بصناعتها عنصرا بعنصرا.

البرهان عن طريق مسلمة الفهم

لو تأملنا البرهان السابق فنحن بدأنا من المجموعة الخالية ثم صنعنا سلسلة بحد ثم الذي يليه ثم الذي يليه وهكذا فنحن نحتاج لهذه السلسة التي تنطلق من أول حد ثم تواصل المسيرة بالترتيب أو ما نسميها بالجزء الأولي وخاصية كل منها أنها ليس هناك حد قبلها أو أصغر من عناصرها.

لصناعة هذه المجموعات بدل استعمال البناء عنصرا عنصرا سنستعمل مسلمة الفهم في نظرية المجموعات لتشكيل مجموعات لها نفس خواص مجموعتنا السابقة

سنعرف الجزء الأولي كالتالي : إذا كان لدينا مجموعتين S و A من X فنقول عن S أنها جزء أولي من A إذا وفقط إذا حققت :

$$S \subset A$$

$$\forall x \in A, \forall y \in S : x \leq y \Rightarrow x \in S$$

إذن الجزء الأولي هو محاولة لتعميم المجموعة E فاشترطنا فيه أنه لا توجد حدود قبل عناصره أي كل عنصر أصغر من عنصر منه هو فيه لكن كما تلاحظون لم نشترط الترتيب الكلي وسنعوض هذا الشرط بتعريف قادم.

نلاحظ كذلك أن المجموعة الخالية هي جزء أولي لأنه لا توجد عناصر أصغر من عناصره.

سنحتاج الأن لإدخال الترتيب الكلي لتكوين سلسلتنا فسنعرف مفهوم المجموعة الجيدة والتي ستمكننا من بناء أكبر سلسلة مرتبة كليا.

فنقول عن المجموعة B وهي جزء من X أنها مجموعة جيدة إذا وفقط إذا حققت :

المجموعة B مرتبة كليا.

من أجل كل جزء أولي S من B يختلف عنها، المجموعة S عندها حدود عليا تماما في B بحيث

$$m(S)$$

هو أصغرها في B.

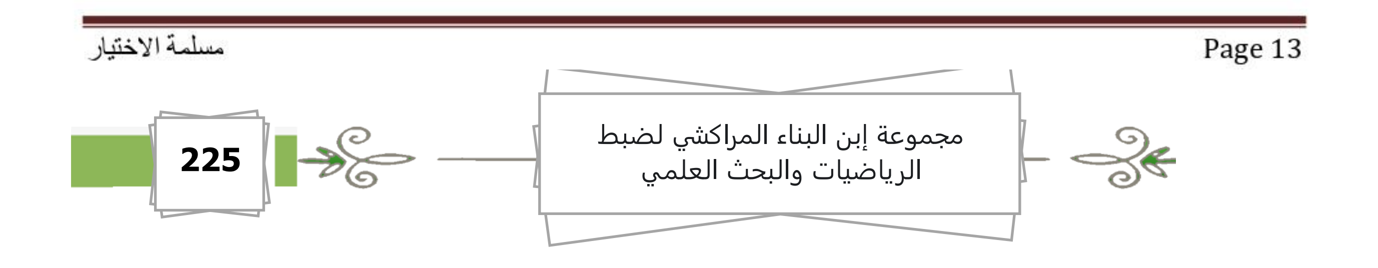
فكما تلاحظون بدل اضافة الحدود العليا حدا حدا سننظر لجميع المجموعات التي تحقق هذا الشرط

كمثال عن مجموعة جيدة المجموعة التي كوناها سابقا :

$$\{s(0),s(1),...,s(n)\}$$

والمجموعة E كذلك مجموعة جيدة فكما تلاحظون نحن لا ننطلق من فراغ بل نريد إكمال هذه المجموعات بشرط الترتيب الكلي محاولة منا لإكمال الجزء الأولي فنحن بهذا التعريف نحتاج صناعة أكبر سلسلة ممكنة والتي في نهايتها سنجد عنصرنا الأعظمي.

نلاحظ كذلك أن المجموعة الخالية جزء أولي من B فأحد حدودها العليا موجود في B.



الأن نحتاج أكبر مجموعة جيدة وهذه نكونها بسهولة عن طريق توحيد كل هذه المجموعات الجيدة في X في مجموعة نسميها U

هذا التوحيد مضمون بمسلمة الفهم لأنها مجموعات جزئية من X.

لكن نحتاج أن نبرهن أن U مجموعة جيدة بدورها وهذا يعني أن المجموعات الجيدة محتواه في بعضها البعض.

الذي نستفيده من كون U مجموعة جيدة هو أنها مرتبة كليا ومنه حسب شروط توطئة زورن تقبل حدا أعلى على الأقل.

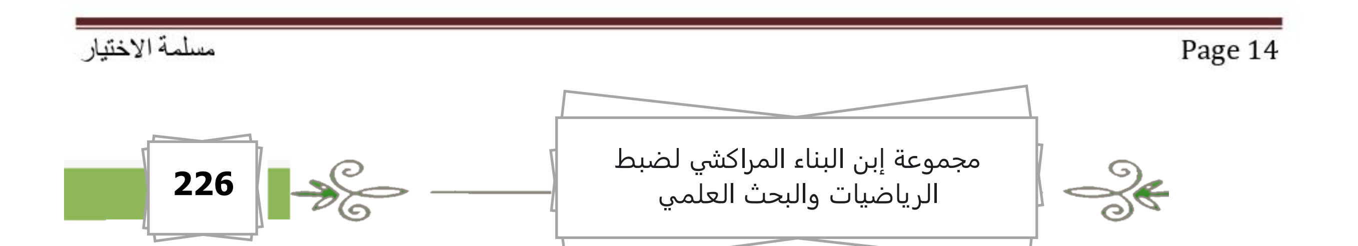
هذه الحدود العليا لابد أن تنتمي ل U ولولا ذلك لأمكننا صناعة مجموعة جديدة أكبر من U عن طريق ضم حد أعلى M لا ينتمي إليها إليها أي

$$U \cup \{M\}$$

وهذا غير ممكن لأن U تشمل جميع المجموعات الجيدة فهي اتحادها وهي أكبرها.

إذن بما أن M الحد الأعلى ل U ينتمي ل U وهي مرتبة كليا فهو وحيد فهو عنصر أعظمي لأنه الحد الأعلى الوحيد ل U التي هي أكبر ترتيب كلي وجدناه.

ومنه نكون وجدنا عنصرنا الأعظمي وبرهنا توطئة زورن.



المجموعات الجيدة محتواة في بعضها البعض



إذا أخذنا A و B مجموعتان جيدتان غير خاليتين فسنبرهن أنه إما A جزء أولي من B أو العكس أي إحداهما تشمل الأخرى.

بما أن الحد الأعلى للمجموعة الخالية موجود في كليهما فلدينا

$$m(\emptyset) \in A \cap B$$

فتقاطعهما غير خال.

ليكن a من هذا التقاطع ونضع

$$I(a,A) = \{x \in A : x < a\}$$

من التعريف هذا جزء أولي في A

وبنفس الطريقة

$$I(a,B) = \{x \in B : x < a\}$$

من التعريف هذا جزء أولي في B

سنحاول بناء أكبر جزء أولي مشترك بين A و B عن طريق :

$$C = \{a \in A \cap B : I(a,A) = I(a,B)\}$$

لنبرهن أن C جزء أولي من A فلنضع :

$$x \in C, y \in A : y \leqslant x$$

سنبين أن y ينتمي ل C

الحالة الأولى و هي $x = y$ واضحة

بقيت حالة $y < x$

لدينا

$$y \in I\,(a,A) = I\,(a,B)$$

لأنها أجزاء أولية ومنه y ينتمي ل B لأن $I\,(a,B)$ محتواه في B

ومنه

$$y \in A \cap B$$

فإذا أخذنا

$$I\,(y,A) = \{z \in A : z < y\}$$

فلدينا

$$z < y < x$$

إذن

$$y \in I\,(x,A) = I\,(x,B)$$

ومنه

$$z < y \text{ و } z \in B$$

إذن

$$z \in I\,(y,B)$$

فنستنتج أن

$$I\,(y,A) \subset I\,(y,B)$$

وبنفس الطريقة نحصل على

$$I\,(y,B) \subset I\,(y,A)$$

أي

$$y \in A \cap B \wedge I\,(y,A) = I\,(y,B)$$

ومنه

$$y \in C$$

إذن C هو جزء أولي من A و هو جزء أولي كذلك من B.

الآن سنبين أن C تساوي A أو تساوي B.

لنفرض أن C تختلف عن كليهما فحسب تعريف المجموعة الجيدة، الحد الأصغر للمجموعة C موجود في A و B أي

$$m(C) \in A \cap B$$

ومنه

$$I\,(m(c),A) = I\,(m(c),B)$$

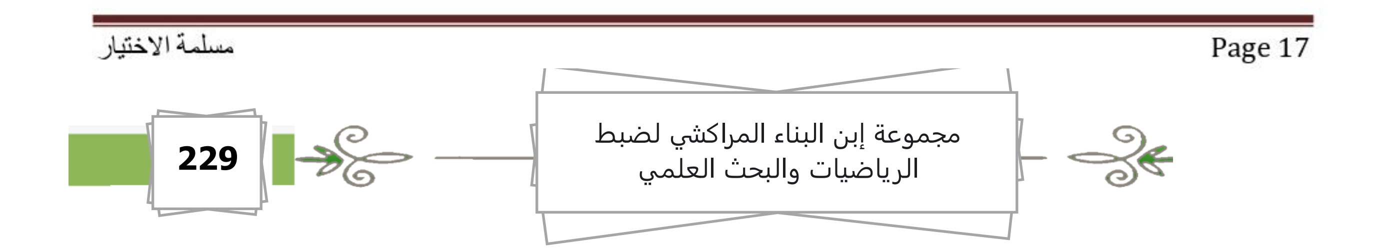
إذن

$$m(C) \in C$$

وهذا تناقض لأنه حد أعلى تماما فلا يمكنه أن ينتمي ل C.

ومنه إما C تساوي A أو C تساوي B وبما أنها محتواه في تقاطعهما ف A جزء أولي محتواه في B أو العكس وهو المطلوب.

ومنه نستنتج أن المجموعة U الناتجة من اتحاد المجموعات الجيدة مرتبة كليا ذلك أنه إذا أخذنا عنصرين ، x من مجموعة جيدة A من الاتحادات و y من B من الاتحادات فنحن نعلم أنه إما A في B أو B في A ، كيفما كان الأمر x و y موجودان في أكبرهما فهما مرتبتان لأن أكبر المجموعتين مرتبة كليا.



كل المجموعات الجيدة من U هي أجزاء أولية منها :

إذا أخذنا مجموعة حيدة A من U وأخذنا منها عنصر x وأخذنا عنصرا y من U بحيث

$$y \leqslant x$$

لدينا y ينتمي لمجموعة جيدة B محتواه في U.

فنحن نعلم حسب ما برهناه سابقا أنه إما A جزء أولي من B فعلى هذا كون

$$y \leqslant x$$

يعنى أن y من A.

وإما B جزء أولي من A وبما أن y من B فهو من A.

إذن في الحالتين y من A ومنه المطلوب.

المجموعة U مجموعة جيدة :

نعلم أن U مرتبة كليا.

لنأخذ S جزء أولي من U ومختلف عنه.

لنأخذ الآن

$$z \in U \setminus S$$

ولتكن A مجموعة جيدة ينتمي إليها z.

إذن المجموعة S تقبل على الأقل حدا أعلى تماما وهو z.

بقي أن نبين أن الحد الأعلى $m(S)$ هو أصغر هذه الحدود العليا تماما ل S داخل U.

سنبين أن S جزء أولي من A.

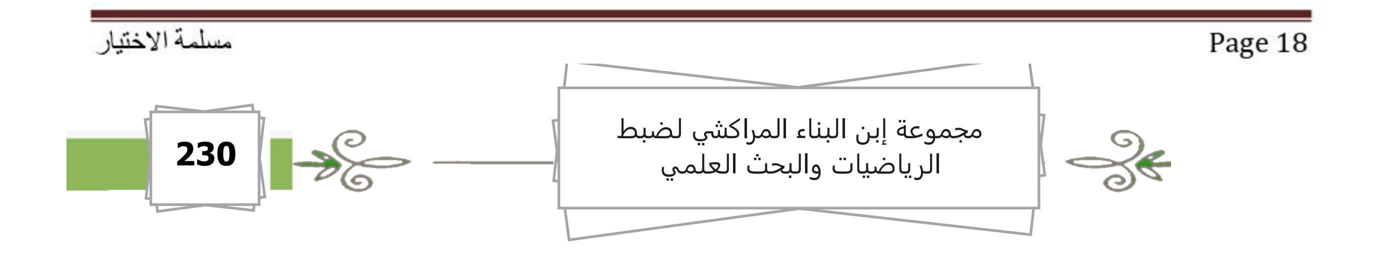
ليكن x من S و y من A بحيث $y \leqslant x$

بما أن y من U و S جزء أولي من U فنستنتج أن y ينتمي ل S.

وبما أن $x \leqslant z \in A$ و A جزء أولي من U حسب البرهان السابق فنستنتج أن

$$x \in A$$

إذن S جزء أولي من A وهو مختلف عنها بسبب وجود z في A.



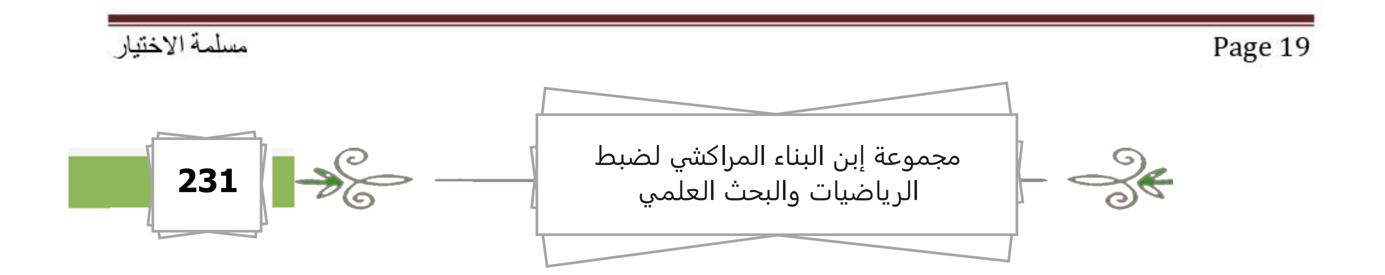
إذن حسب تعريف المجموعة الجيدة يكون $m(S)$ هو أصغر حدود S داخل A ومنه هو أصغرها في U لأنه لو كان هناك أصغر منه y يكون لدينا

$$m(S) \in A > y$$

ومنه y من A بسبب أنها قطعة أولية وهذا تناقض لأن $m(S)$ هو أصغر الحدود العليا تماما ل S في A.

ومنه U مجموعة جيدة.

إذن نكون هنا قد برهنا على أن مسلمة الاختيار تستلزم توطئة زورن.



(2.4.4)
توطئة زورن تستلزم مسلمة الاختيار

سنفرض أن كل مجموعة استقرائية تملك عنصرا أعظميا.

لنأخذ الآن مجموعة C عناصرها مجموعات غير خالية.

فكرة البرهان أنه يمكننا أن ننطلق من مجموعة A تشمل عددا منتهيا من العناصر من C فنصنع لها تطبيقا ينقل كل مجموعة a فيها نحو عنصر منها أي من a فهذا لا يحتاج لمسلمة الاختيار لأن عدد المجموعات منته.

ثم نمدد هذه الدالة بعلاقة ترتيب حتى نصل لعنصر أعظمي عبر توطئة زورن فيكون هذا هو دالة الاختيار الذي نبحث عنها.

لنضع B هو اتحاد عناصر C ونضع المجموعات الممكنة التي نستطيع تعريف عليها دالة الاختيار.

$$X = \{(A,c) \subset C : c \to B \text{ , } c(a) \in a\}$$

كما تقدم من مقدمة الفقرة هذه مجموعة غير خالية.

سنبين أن X مجموعة استقرائية بالترتيب المكون من تمديد دوال الاختيار أي :

$$[(A1,c1) \leqslant (A2,c2)] \Leftrightarrow [A1 \subset A2 \wedge c2|A1 = c1]$$

أي أن c2 هو تمديد ل c1.

نلاحظ أن أي جزء H مرتب كليا من X يملك حدا أعلى المشكل من الاتحادات أي $(U\ A \in H,\ d)$

حيث d هي دالة اختيار تأخذ لكل عنصر a من A محتوي في C نحو صورته بواسطة دالة الاختيار ل A.

نلاحظ هنا أنه لا يهم كون a من A أو B داخل H لأن ترتيب H يجعل أنه إما

$A \subset B$ أو $B \subset A$

إذن دالة الاختيار على B تمديد لدالة الاختيار على A أو العكس وفي كلتا الحالتين صورة a تبقى وحيدة.

يمكننا أن نرى d كنهاية توسعة التمديدات المرتبة لدوال الاختيار.

إذن X مجموعة استقرائية فحسب توطئة زورن هي تقبر عنصرا أعظميا (M,c)

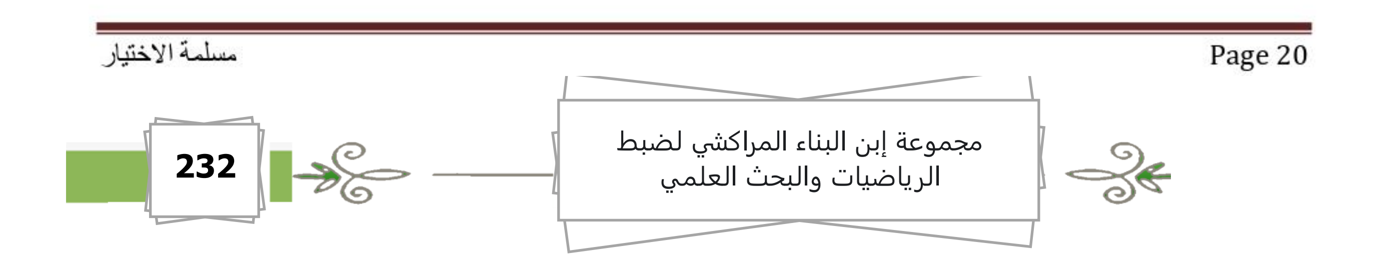
ومنه يجب أن يكون $M = C$

لأنه لو كان هناك عنصر z من C ليس في M فيمكننا تمديد M كالتالي

$$M' = M\ U\ \{z\}$$

وتمديد c عند z بوضع صورة ل z بعنصر من z

وهذا تناقض لأن (M,c) أعظمي إذن عنصرنا هو (C,c) فوجدنا دالة الاختيار c على C.



(5)

مبرهنات نستعمل فيها مسلمة الاختيار أو ما يكافئها

- كل فضاء شعاعي يحتوي على قاعدة له :

يمكن برهنة ذلك بتوطئة زورن بنفس الطريقة التي استعملناها في هذا المقال، والتي يمكن أن نجردها كالتالي :

- نعرف خاصية على مجموعة : خاصيتنا هنا هي مجموعة أشعة مستقلة
- نبين أن مجموعة المجموعات التي تحقق هذه الخاصية غير خالية و هذا واضح باختيار شعاع غير معدوم ووضعه في مجموعة أحادية.
- نعرف علاقة ترتيب وعادة تكون الاحتواء بين هذه المجموعات
- نبين أن مجموعتنا استقرائية و ذلك لوجود الحد الأعظمي عن طريق اتحاد المجموعات المرتبة
- نستنتج أن هناك عنصر أعظمي و هو مجموعة تحقق خاصية الاستقلال الخطي فيما بين أشعتها
- وأخيرا نبين أنها قاعدة بالخلف بفرض وجود شعاع لا يكتب بها فهو مستقل خطي عنها فيمكن تمديدها لمجموعة أكبر تحقق الخاصية و منه التناقض لأنها أعظمية.

- مبرهنة تيشونوف

Théorème de Tychonoff

كل جداء ديكارتي لفاضاءات شبه متراصة هو فضاء شبه متراص

- مبرهنة كرول

Théorème de Krull

- متناقضة ستارسكي باناخ

Paradoxe de Banach-Tarski

التي تنص على أنه من الممكن قطع كرة من الفضاء إلى عدد محدود من القطع وإعادة تجميع هذه القطع لتشكيل كرتين متطابقتين مع الأولى ، باستثناء إزاحة واحدة



- بناء مجموعات غير قابلة للقياس في مجموعة الأعداد الحقيقية يحتاج لمسلمة الاختيار

(6)
مبرهنات أخرى مكافئة لمسلمة الاختيار

مسلمة الاختيار تكافؤ مبرهنات أخرى نذكر منها

مبرهنة الحد الأقصى لهوسدورف
Théorème de maximalité de Hausdorff

والتي تنص على أن أي مجموعة مرتبة تحتوي على جزء مرتب كليا أعظمي

Hartogs théorème

Idempotence des cardinaux infinis

الجداء الديكارتي لمجموعات غير خالية هو مجموعة غير خالية

(7)

انفصال مسلمة الاختيار عن النظام المسلماتي ZFC

سنة 1938 برهن كورت غودل Kurt Gödel أن النظام المسلماتي ZF (Zermelo-Fraenkel) إذا كان متناسق فهو لا يناقض مسلمة الاختيار

سنة 1963 برهن بول كوهين Paul Cohen أن النظام المسلماتي ZF إذا كان متناسقا فهو لا يبرهن مسلمة الاختيار

كنتيجة للمبرهنتين مسلمة الاختيار منفصله عن النظام المسلماتي ZF

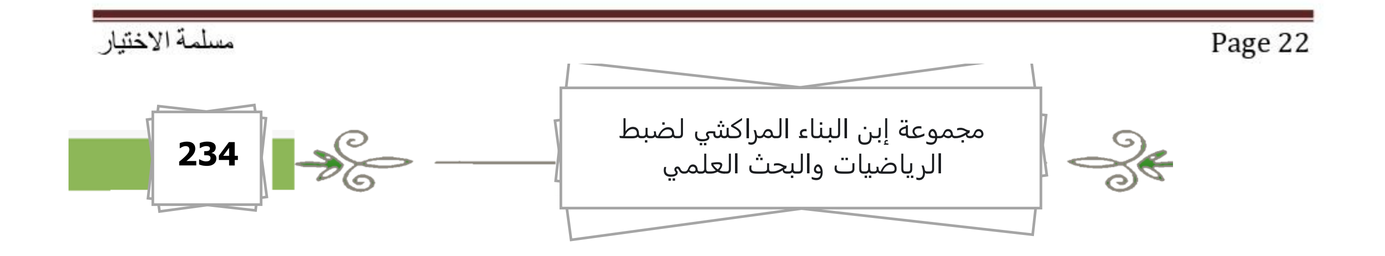
(8)

إبسيلون هلبرت

إبسيلون هلبرت، هو تمديد للغة الشكلية المنطقية بالمؤثر إبسيلون الذي أدخله هلبرت، و الذي استعملته مجموعة بورباكي بكثرة في منشوراتها.

مع المؤثر إبسيلون، كل خاصية P مرتبطة بالكائن $\varepsilon x.P(x)$ بحيث P محققة على الأقل من أجل عنصر إذن P محققة ب $\varepsilon x.P(x)$

مع إبسيلون هلبرت تصبح مسلمة الاختيار مبرهنة.



(9)
قائمة المراجع

Cours 2011/2012 d'Arnaud DEBUSSCHE - ENS Cachan Antenne de Bretagne

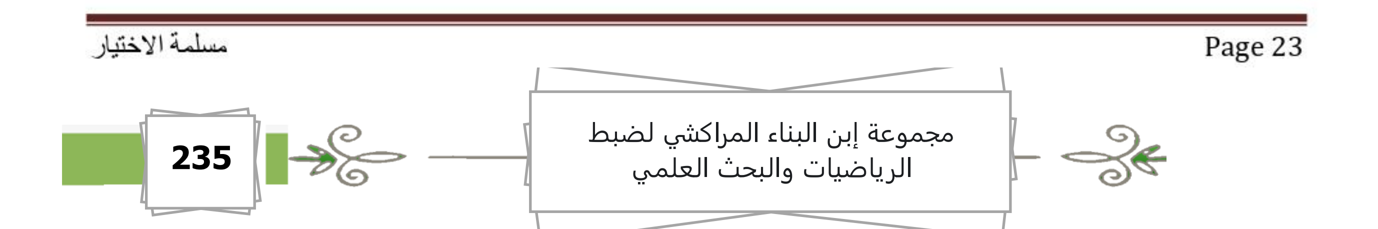
Axiome du choix. . .ou pas. Cyrille Hériveaux - ENS Cachan

Démonstration du lemme de Zorn. Paris 7, L3 –théorie des ensembles

Quelques théorèmes classiques qui sont des conséquences de l'axiome du choix Alain Prouté

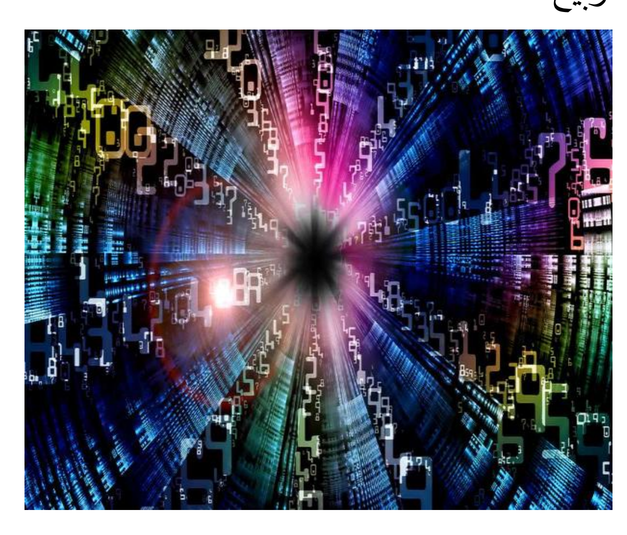
Axiome du choix Patrick Dehornoy

Autour de l'axiome du choix Jean-Marie Aubry



هل يجب القضاء على مسلمة الإختيار ؟

بمسلمة الإختيار نصنع بدائع البراهين فكيف نبرهن بدونها وجود غلق جبري لكل حقل تبديلي وقاعدة لكل فضاء شعاعي، لكنها تصنع وحوشا كمتناقضة باناخ – تارسكي ، و المجموعات غير قابلة للقياس بمفهوم لوبيغ...





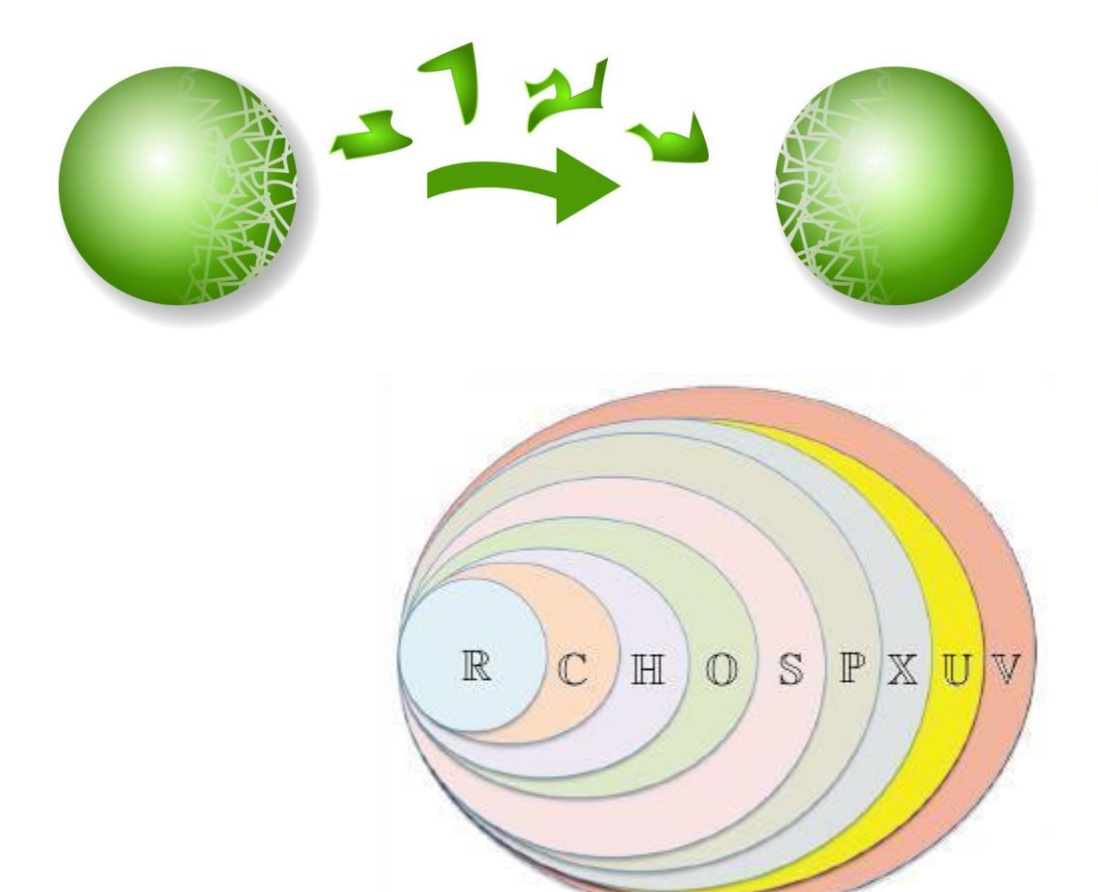


Figure 1: Enclosing sub-sets of the first nine Cayley-Dickson Hypercomplex Algebras. Reals (1D), Complex (2D), Quaternion (4D), Octonion (8D), Sedenion (16D), Pathion (32D), Chingon (64D), Routon (128D), and Voudon (256D).

لنضبط الرياضيات معا : كيف تعطي الرياضيات وجودا للخصائص ؟

علاقة التكافؤ في نظرية المجموعات ZFC .

مفهوم تجريد الخصائص:

الرياضيات علم يهتم بالخصائص لذلك الذي يصنعه هو بناء كائنات من المجموعات عن طريق وصفها بخصائص والخاصية قضية متعلقة بكائن.

فالكائن الرياضي مجموعة وأوصافه خصائصه.

مثال ذلك العدد 1 فنحن نرى على الواقع : برتقالة، بقرة، خروف ... فنعد كل منها واحد لأنه وحده ليس له ما يشابهه بجانبه.

فالعقل البشري يجرد هذا التكرار ويسميه واحد وهو وصف يشترك فيه كل شيء ليس معه مثله.

لذلك الأعداد موجودة في الذهن لكن هذا لا يكفي في الرياضيات فالرياضيات لابد أن تعطي لكائناتها وجودا عن طريق آلياتها.

وآليات الرياضيات هي مسلمات نظرية المجموعات ZFC والمنطق بقضاياه.

فمسألة الواحد وأي عدد طبيعي عموما يمكن التعبير عنها بسهولة في نظرية المجموعات عن طريق تمثيل كل عدد بممثل له.

وهذا نصنعه يوميا فإذا أردنا أن نعلم الطفل ما هو الخروف أريناه صورة خروف فهذا الخروف ممثل عن جنسه.

وإن أردنا أن نعلمه الأعداد علمناه بالقريصات والخشيبات ثم رويدا رويدا يتخلص منها ويعوضها بالكتابة ثم يتخلص من ذلك ويعطي وجودا للأعداد في ذهنه فيتعلم الحساب الذهني.

الرياضيات هنا تقوم بنفس الشيء فهي تقابل كل عدد بمجموعة تمثل عناصرها هذا العدد بالطريقة التالية:

$0 = \varnothing$

$1 = \{\varnothing\}$

$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

....

$n+1 = n \cup \{n\}$

...

فبهذا التعريف التراجعي نصنع مجموعة الأعداد الطبيعية N ثم تعرف العمليات عليها بالتراجع.

المشكل المطروح الآن هو ملاحظتنا في الواقع وجود أعداد سالبة والتي نفسر إشارتها بالاتجاه فمثلا 8 - 3 وإن كانت عملية مستحيلة في مجموعة الأعداد الطبيعية فهي موجودة في الواقع فنحن نعلم أنه إذا صعدنا 3 أمتار ثم نزلنا بـ 8 أمتار نكون قد نزلنا بـ 5 أمتار.

يمكننا أن نرمز لهذا بالترتيب التالي (3,8)



أي نزيد ثلاثة ثم ننزل بثمان ولو قمنا بالعكس لوجدنا صفر أي

$(3,8) + (8,3) = (8,8) = 0$

لكن أيضا لو صعدنا بخمس أمتار سنصل للصفر كذلك أي $(3,8) + (5,0) = (8,8) = 0$

أي $(3,8) = (0,5) = (10,15) .....$ وهذا مشكل فلو أردنا أن نختار ممثلا عن كل عدد سالب

أي $(3,8) = -5$ فسنصطدم بوجود أكثر من ممثل.

فكيف نصنع لبناء هذه النظائر وصناعة ما نسميه بحلقة الأعداد الصحيحة Z ؟

الرياضيات تحل المشكلة بما يسمى علاقة تكافؤ أي كل العناصر المتكافئة من حيث الخصائص التي نريدها نضعها في مجموعة نسميها بصنف تكافئها ومجموعة كل صنف تصبح ممثلة عن خاصية عناصرها.

مثال ذلك في الواقع أن يكون لديك كيس ملابس كل بلون فتفرقها في مجموعات حسب لونها فكل مجموعة تمثل لون عناصرها.

بالنسبة لمثالنا نكون أعطينا لخاصية العدد السالب 5- وجودا بكتابة

$-5 = \{(0,5), (10,15), (3,8) ... (n, n+5) ..\}$

لكن الرياضيات تطلب برهانا على إمكانية صناعة مجموعة كهذه وسنقدمه هنا.

التعريف:

العلاقة الثنائية بين مجموعتين نعرفها حدسا برابط بين عنصرين عنصر من الأولى وعنصر من الثانية.

أما رياضيا فلها عدة طرق للتعريف:

الطريقة الأولى أن نقول عن علاقة ثنائية بين مجموعتين A و B أنها مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي

أي $R \subset A \times B$ ونكتب $x \in A , y \in B : xRy \Leftrightarrow (x,y) \in R$

والطريقة الثانية أن نعرفها بثلاثية $R = (A,B,G)$ حيث G مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي فنكتب

$G \subset A \times B$

$x \in A , y \in B : xRy \Leftrightarrow (x,y) \in G$

التعريفات متكافئان.

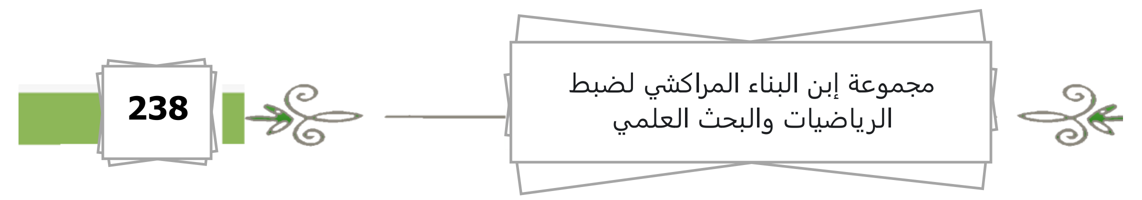
الآن لكي نجرد خصائص معينة في المجموعة عن طريق تقسيم عناصرها حسب هذه الخصائص يكفي أن نجد طريقة نقول بها هذا العنصر وهذا العنصر يشتركان في نفي الخاصية أي متكافئان.

فبالتجريد نسمي ذلك علاقة تكافؤ.

ولذلك نشترط على العلاقة أن تكون من المجموعة نحو نفسها فنحن ننظر للعناصر داخل مجموعة ولتكن A .

ونشترط عليها أن تحقق ثلاث شروط لتصبح علاقة تكافؤ:

أولها انعكاسية:



أي كل عنصر له علاقة بنفسه وهذا واضح لأننا نريد تجريد وصف معين فكل عنصر يشترك مع نفسه في وصفه فنكتب $\forall x \in A : x R x$

الشرط الثاني : تناظرية لأنه إذا كان x يشترك مع الوصف مع y فإن العكس صحيح أي

$\forall x, y \in A : x R y \Rightarrow y R x$

والشرط الثالث متعدية لأنه إذا كان x يشبه y و y يشبه z ف x يشبه z أي

$\forall x, y ,z \in A : x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$

مع هذه الشروط تصبح العلاقة علاقة تكافؤ ونرمز لها عادة بـ $\sim$

نتائج علاقة تكافؤ على مجموعة:

علاقة تكافؤ تجزء المجموعة لأصناف كل صنف يجمع العناصر المتكافئة فيما بينها أي تشترك في نفس نوع الخاصية.

يمكننا أن نبرهن على وجود هذه التجزئة من مسلمات نظرية المجموعات كالتالي:

نبدأ بصناعة مجموعة أجزاء مجموعات A بمسلمة مجموعة الأجزاء ونرمز لها بـ P(A)

ثم بمسلمة الفهم سنختار من هذه المجموعات المجموعات التي تحقق:

تشمل فقط عناصر متكافئة فيما بينها

وهي أعظمية أي ليست محتواة في مجموعة أكبر منها لعناصر متكافئة فيما بينها.

فنسمي هذه المجموعة بمجموعة أصناف التكافؤ ونرمز لها بـ $A/\sim$

بقي أن نبرهن أن كل عنصر من مجموعتنا الأصلية A هو داخل صنف من مجموعة أصناف التكافؤ هذه وهذا يتم كالتالي.

ليكن x من مجموعتنا A ونعرف الخاصية التالية على مجموعة الأجزاء :

كل المجموعات التي تشمل x وعناصرها متكافئة فيما بينها

فهذه تشكل مجموعة وهي غير خالية لأنها على الأقل تشمل {x}

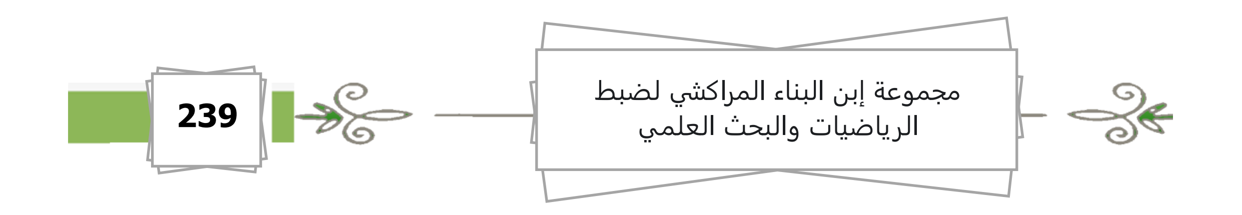
ثم نوحد جميع هذه المجموعات عن طريق مسلمة الاتحاد فنحصل على مجموعة أعظمية لعناصر متكافئة فيما بينها تشمل صنف x .

يجب الانتباه هنا إلى أن مسلمة الاتحاد تسمح بتوحيد عدد منته من المجموعات.

فإذا أردنا توحيد عدد غير منته وغير قابل للعد لابد أن نستدعي مسلمة الاختيار أو بالضبط هنا توطئة زورن ذلك أن هذه المجموعات أعظمية.

هذه المجموعة تنتمي لمجموعة أصناف التكافؤ لأنها غير محتواة في أي مجموعة أعظم منها.

ومنه المطلوب.



هذه المجموعات تجزئة ل A لأنه لا يمكن أن يتقاطع صنفان بسبب كون علاقة التكافؤ متعدية فإذا تقاطع صنفان فهما متساويان كونهما أعظميان.

نرمز لصنف تكافؤ x بـ $[x]$

الآن يصبح مثالنا السابق صنف تكافؤ: $-5 = \{(0,5), (10,15), (3,8) \dots (n, n+5) ..\}$

أو بأكثر دقة علاقة التكافؤ هي

$$(n, m), (a,b) \in N\times N :$$
$$(n,m) \sim (a,b) \Leftrightarrow n+b = m+a$$

ضمنيا نحن نقول $n - m = a - b$

لكن ليس لدينا الحق في استعمال عملية الطرح هذه في N فعملية مثل $3 - 8$ مستحيلة.

ولا نقول نحسبها في Z لأننا صدد بناء الأعداد السالبة أي صناعة Z نفسها.

فيكون مثالنا السابق -5 هو صنف تكافؤ $-5 = [(3,8)] = \{(n, n+5) : n \in N\}$

الآن وقد وجدنا عناصرنا سنقوم بتشكيل عمليات عليها مثل

$$[(n,m)] + [(a,b)] = [(n+a, m+b)]$$

البعض يظن أن هذا الأمر سهل لكن الرياضيات لا تقبل أن تعرف هكذا عملية إلا بعد أن تسلم بإمكانية اختيار عنصر من كل صنف تكافؤ ، ربما تستغرب هذا ؟

لكن اختيار عنصر من مجموعات مجموعة غير ممكن إلا إذا كانت قابلة للعد لأنه بالتكرار ستستغرقها جميعا أما إذا كانت غير قابلة للعد فلا يمكنك استغراقها ولذلك نستدعي ما يسمى بمسلمة الاختيار.

فمسلمة الاختيار تسمح لنا بصناعة مجموعة جديدة إنطلاقا من كل صنف تكافؤ باختيار عنصر منه يمثل غيره.

في صناعة Z التي قمنا بها من $N\times N$ لا نحتاج لمسلمة الاختيار فالتراجع كاف لكن لو ذهبنا نصنع مجموعة الأعداد الحقيقية من المتتاليات الكوشية فالمسألة تختلف.

إذن Z ما هي إلا أصناف تكافؤ من $N\times N$ ويمكن أن نمثل لأعدادها الموجبة بـ $(n,0)$ والسالبة بـ $(0,n)$

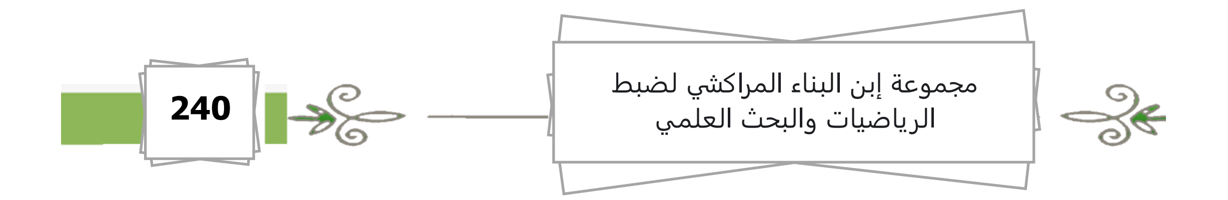
فالإشارة وجهة نظر بالنسبة للصفر فعلى هذا نكتب $-5 = [(0,5)] , 5 = [(5,0)]$

ولدينا $-5 + 5 = [(0,5)] + [(5,0)] = [(5,5)] = [(0,0)] = 0$

علاقة التكافؤ وسيلة لتجريد خصائص معينة لعناصر وإعطائها وجودا كمجموعات.

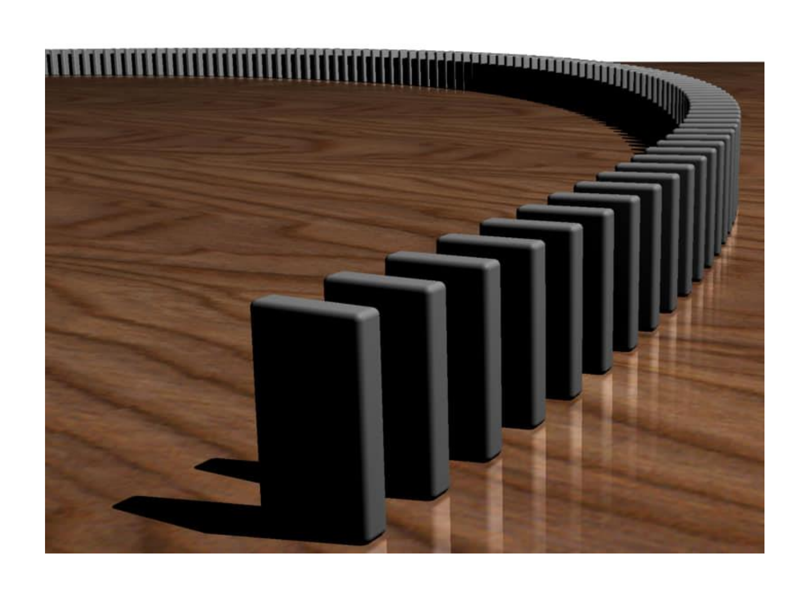
في نهاية هذا المقال أتقدم بالشكر لأستاذي الفاضل في الرياضيات "ميهاني" الذي درسني في الثانوي من سنة 1991 إلى1994 وكان مما درسنيه علاقة التكافؤ في فصل 1992/1991

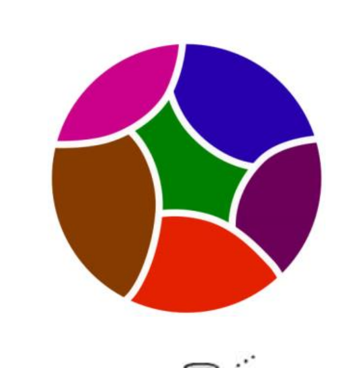
كثير مما كتبته في هذا المقال من الذاكرة من هذا الدرس والذي درسته من ثلاثين سنة.

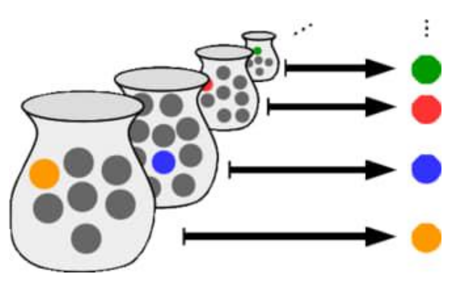


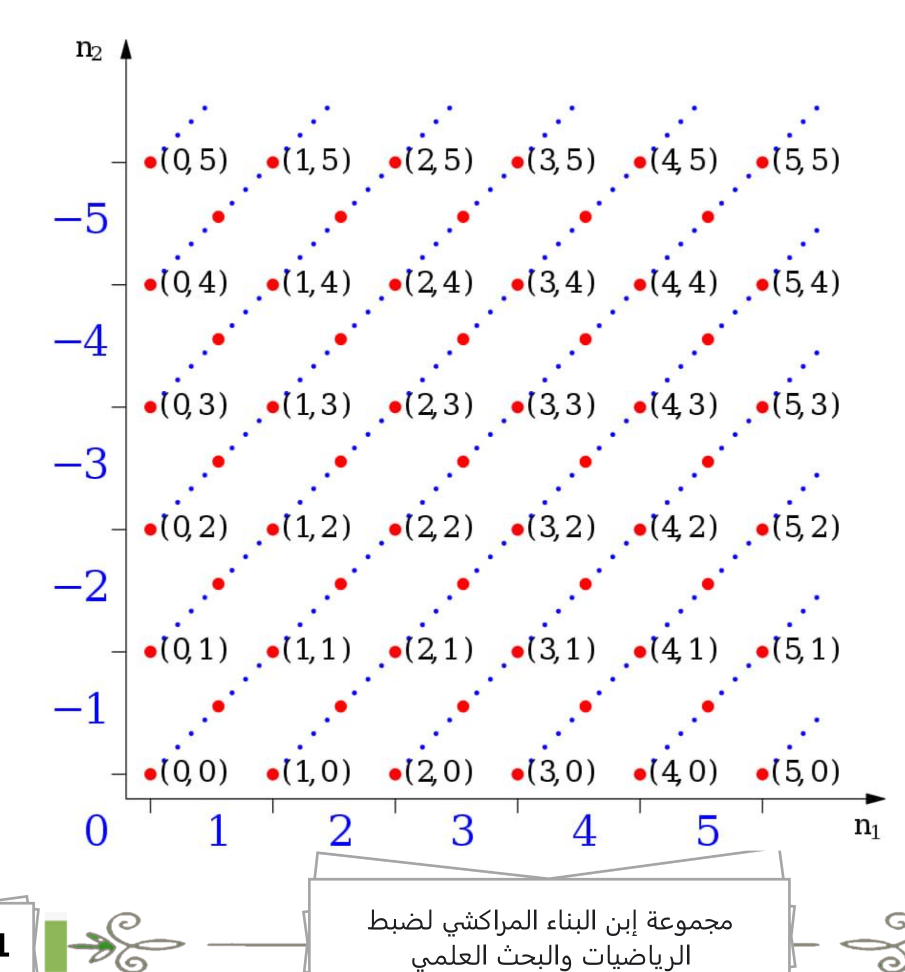











n2
n1
(0,5) (1,5) (2,5) (3,5) (4,5) (5,5)
(0,4) (1,4) (2,4) (3,4) (4,4) (5,4)
(0,3) (1,3) (2,3) (3,3) (4,3) (5,3)
(0,2) (1,2) (2,2) (3,2) (4,2) (5,2)
(0,1) (1,1) (2,1) (3,1) (4,1) (5,1)
(0,0) (1,0) (2,0) (3,0) (4,0) (5,0)
−5
−4
−3
−2
−1
0 1 2 3 4 5

نضبط الرياضيات معا

أين تختبئ مسلمة الاختيار ؟

دالة أصناف التكافؤ

طرح أحد الإخوة سؤالا في المجموعة وهو إذا كانت لدينا علاقة تكافؤ R معرفة على مجموعة E وعرفنا التطبيق f الذي يرفق كل عنصر من E بصنف تكافئه كالتالي:

$$f : E \to E/R$$
$$x \to [x]$$

السؤال : برهن أن f غامر.

المجموعة E/R هي مجموعة أصناف تكافؤR

والرمز $[x]$ يرمز لصنف تكافؤ x .

لابد لنا من وقفة هنا للتدقيق في هذه المعطيات.

حسب السؤال حتى يكون f معرفا جيدا لابد من تعريف E/R لأنها مجموعة وصوله.

يمكننا تعريف E/R بطريقتين:

الأولى

$$E/R = \{[x] : x \in E\}$$

أي لكل x نضع صنف تكافئه.

لكن لو تأملنا جيدا هذا التعريف ففيه تسليم لإرفاق بكل x صنف تكافئه $[x]$ أي نحن نستعمل الدالة f هنا لتعريف E/R أي ما كتبنا إلا $E/R = f(E)$

لكن كيف نستعمل f لتعريف E/R ونحن نحتاج E/R لتعريف f فهذا خطأ وأصل الخطأ من تعريف f نفسه

إنما كان علينا أن نضع

$$f : E \to P(E)$$
$$x \to [x]$$

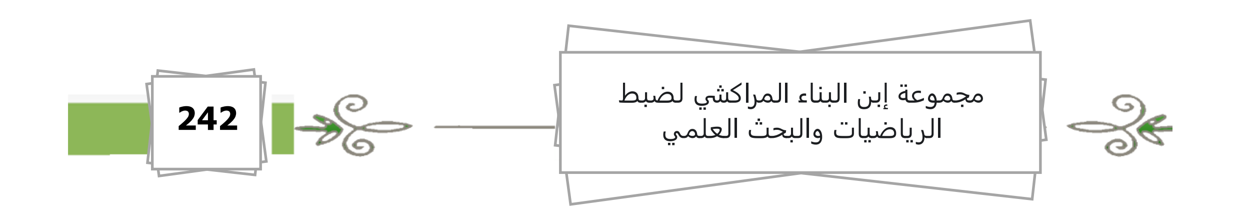
أي مجموعة وصول f هي مجموعة مجموعات أجزاء E وعلى هذا لا نحتاج في تعريف f ل E/R فيمكننا عندها كتابة $E/R = f(E)$ ومنه السؤال عن برهنة غمر f على $f(E) = E/R$

لا معنى له لأنه موضوع بالتعريف.

الطريقة الثانية لتعريف E/R عن طريق المكممات

$$E/R = \{ A \in P(E)\backslash\{\varnothing\} \mid \forall (x , y) \in A\times E : xRy \Leftrightarrow y \in A\}$$

أي هي مجموعة المجموعات غير الخالية التي تحقق كل منها إذا كان x منها فكل ما هو علاقة مع x يبقى فيها وكل ما هو فيها هو مع علاقة مع x .



هنا يمكننا أن نعرف

$f : E \to E/R$

$x \to [x]$

لأنه من الواضح أنه إذا كان لدينا x فمجموعة صنفه $[x]$ تنتمي ل E/R ومنه $f(E) \subset E/R$

هنا السؤال عن الغمر عنده معنى فلابد من برهنة $E/R \subset f(E)$ للوصول ل $f(E) = E/R$

وعندها نختار عنصر A من E/R

ونبحث عن سابقة له a من E تحقق $f(a) = A$

هنا نحتاج أن نختار عنصرا a من A أي $a \in A$ وهذا غير ممكن إلا بالمرور بمسلمة الاختيار فحسب مسلمة الاختيار يوجد تطبيق c يحقق :

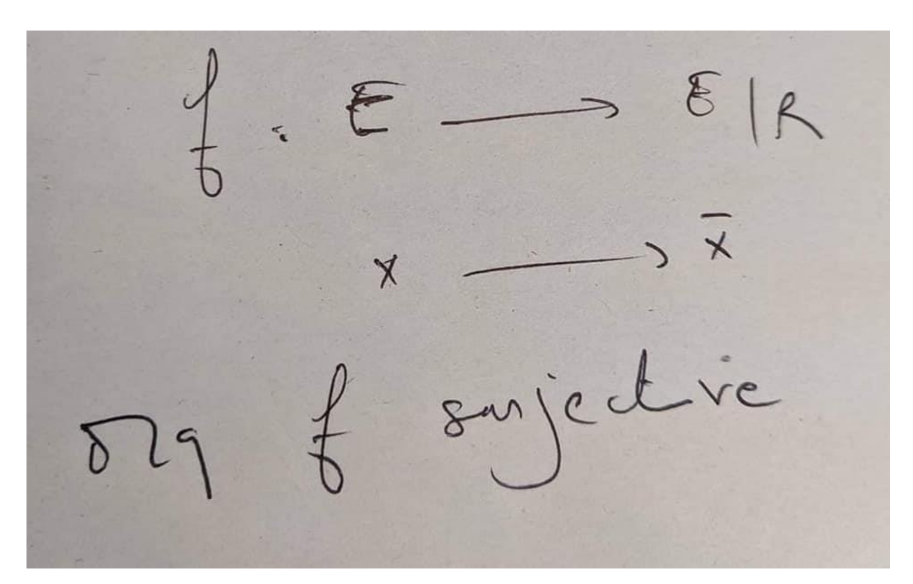
$c : E/R \to E$

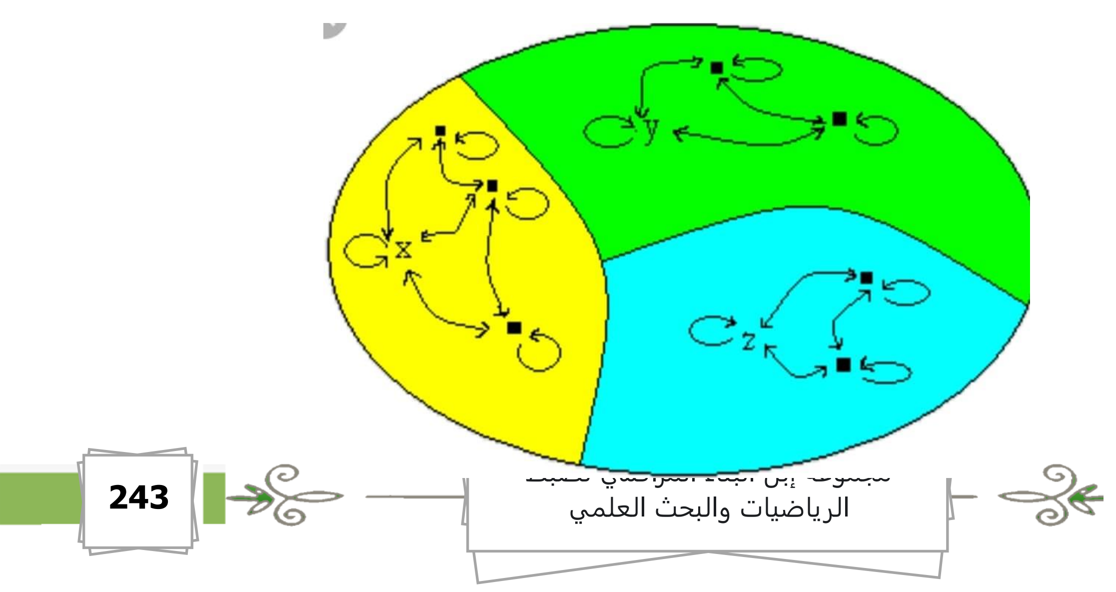
$X \to c(X) \in X$

وعندها يكون لدينا $f(c(X)) = [c(X)]$ وبما أن $c(X) \in X$ فلدينا $[c(X)] = X$

ومنه الغمر.

من الواضح أن التعريف الأول ل E/R عن طريق f أفضل لأنه لا يلجأ لمسلمة الاختيار ولذلك هو المستعمل لكن على التعريف الأول السؤال عن غمر f على E/R لا معنى له لأنه بالتعريف.





نظرات في استحالة وجود مجموعة جميع المجموعات

المجموعة هي تمييز عناصر عن غيرها فإذا علمنا ذلك علمنا أنها مفهوم عقلي وليس وجودي إذ الذي يجعلنا نميز نقاطا سوداء على ورقة من غيرها هو رؤيتنا لها بلون مختلف وتشبيهنا لها ببعض فجعلناها مجموعة.

وإن كان هذا المفهوم يوافق ما نشاهده في الواقع كمجموعة جزيئات تفاحة وحبات رمل في وعاء لكن حتى هذا هو تمييز بشري إذ من حيث الوجود لا فرق بين جزيء تفاحة وجزيء الهواء الذي حوله إنما نحن بوصفنا له بانتمائه لتفاحة فصلناه عن الهواء لكن أحيانا لا نفصله ونتعامل معه ومع الهواء ومع جميع ما في الأرض كمجموعة واحدة وهكذا حسب الحاجة نجمع أو نفرق الأشياء.

فالعقل هو من يميز العناصر ويعطيها مسمى المجموعة.

لكن العقل البشري لا يميز العناصر إلا بضمها لبعضها البعض واحدة تلو الأخرى فهو يستعمل التتابع أي تمييزه يبقي في حدود المنتهي.

فإذا أراد المرور لغير المنتهي استعمل مسلمات عقلية بطرق بنائية فسلم ببناء غير منته عن طريق التتابع وهذا ما ينتج N وسلم بوجود مجموعة الأجزاء وهذا ما يعطي R .

إذا تأملنا فكرة مجموعة جميع المجموعات فتحت هذا اللفظ اللغوي عند التدقيق لا يوجد تمييز عقلي فالعقل لا يميز جميع المجموعات حتى يجعلها مجموعة وحتى لو قام بذلك سيقع في تناقض إذ حتى يبني مجموعة جميع المجموعات لابد أن يميز جميع المجموعات إذن لابد أن يميز هذه المجموعة كذلك ليدخلها في بناء نفسها لكن كيف يميزها وهو لم يبنيها بعد ؟

فهذا ما نترجم له بأن المجموعة لا يمكنها أن تنتمي لنفسها لأننا سنقع في دور بنائي ولا يمكن للشيء أن يوجد بسبب وجود نفسه.

هذه المسلمة ضمت لنظرية المجموعات حتى لا نقع في تناقض راسل الذي يمنع من وجود مجموعة جميع المجموعات.



لندقق معا في مفهوم الدالة:

البعض يستشكل كون الدالة مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي فيحاول تعريفها بإظهار علاقة منطقية بين السابقة والصورة ...

لكن لو تأملنا جيدا مجرد تعريفك لثنائية (x,y)

فهو وضع منك لعلاقة بين y و x وإلا لم يكن لهذه الثنائية معنى ولا فرق بينها وبين $\{x,y\}$

إنما المشكلة أن العقل البشري لا يتصور علاقة مجردة لذلك يحاول إعطاءها وجودا ولو بالتسمية.

هذا ما يفسر الطرق المختلفة المستعملة في تعريف الدوال والتي بعضها يحاول تعويض الثنائية بقضية منطقية $y = f(x) \Leftrightarrow P(x,y)$

السؤال الذي بقي بلا جواب هنا ماذا يفعل القط في الصورة😁

فإذا ابتسمت هنا فهذا شيء جيد لأنك تكون قد قرأت المنشور كله😉

لنضبط الرياضيات معا : هل للدالة تعريفات متعددة ؟ ما سبب ذلك وما ينبني على تعريفاتها المختلفة ؟

سأتطرق في هذا المنشور بمشيئة الله لتعريفات الدالة المختلفة مع ذكر المراجع حتى يفهم القارئ جيدا ما هي الدالة.

سأتبع الخطة التالية في العرض:

1-الطرق المختلفة لتعريف الدالة :

المدرسة الفرنسة بطريقة بورباكي : تعريف بالبيان

المدرسة الأنجلوساكسونية : تعريف بالمجموعات

طريقة تيرانس تاو : تعريف بالقضايا

2-أسباب اختلاف هذه التعريفات

3-ما أتبناه كشخص من تعريف

مقدمة:

على المشتغل بالرياضيات أن يعلم أن الرياضيات المعاصرة تبنى على نظرية المجموعات والمنطق.

فكل تعريف فيها لابد أن يرجع لنظرية المجموعات ZFC والمنطق الشكلي فهذا المشهور ويمكن كذلك تعميم التعريفات على نظرية الفئات وهي تعميم ل ZFC .

لكن غير المشهور هو أن هناك مدرسة تتبع المنطق الحدسي وهو لا يعترف ببعض مسلمات المنطق الشكلي كمسلمة الاختيار ومبدأ الثالث المرفوع.

لذلك لابد من التنبيه عند وضع التعريفات إن كانت تخرج عن المشهور.

في جميع ما يلي سنرمز للدالة بـ f ومجموعة بدئها بـ A ووصولها بـ B .

بالنسبة للدالة فقد اعتاد البعض إبهام التعريف بكتابة $f : A \to B$ ثم يكتفون بلفظ ترفق لكل x من A صورة y من B بحيث $y = f(x)$

إلا أن كلمة ترفق أو تربط هي كلمات لغوية حدسية لا تصلح في التعريفات إلا أن تعطى لها معنى رياضي وهذا الذي سنشاهده في التعريفات المختلفة للدالة أو التطبيق أو العلاقة.

1-الطرق المختلفة لتعريف الدالة:

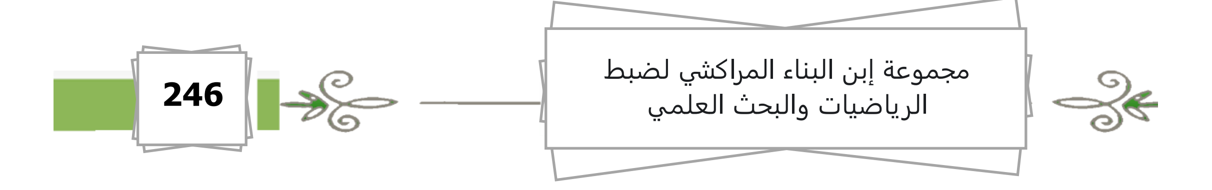
المدرسة الفرنسة بطريقة بورباكي : تعريف بالبيان.

قامت مجموعة بورباكي في كتابها الأساسيات كما هو في المرفقات بتعريف الثنائيات عن طريق المجموعات:

$$(x,y) = \{x,\{x,y\}\}$$

ثم الجداء الديكارتي لمجموعتين المكون منها ثم يعمم هذا على الجداء الديكارتي الكيفي.

ثم عرفت البيان بمجموعة جزئية من الجداء الديكارتي لمجموعتين.



ثم عرفت ما سمته بالمرافقة أو correspondence وهي ثلاثية (G,A,B) حيث G هو بيان من الجداء الديكارتي ل $A\times B$

ثم عرفت البيان الدالي وهو الذي يحقق شرط الدالة بأن لكل سابقة صورة على الأكثر وسمته F .

ثم عرفت الدالة بأنها الثلاثية $f = (F,A,B)$

فعلى هذا عند مجموعة بورباكي الدوال هي ثلاثية مكونة من مجموعة البدء، مجموعة الوصول والبيان على أنها وضعت البيان في أول الثلاثية.

على تعريف مجموعة بورباكي تتساوى دالتان إذا تساوت مجموعتي بدئهما ومجموعتي وصولهما وبيانهما.

فعلى تعريف مجموعة بورباكي دالة الجذر التربيعي المعرفة على R^+ نحو R ليست نفسها دالة الجذر التربيعي المعرفة على R^+ نحو R^+ إنما هي تمديد لها أي $(R^+,R,\surd) \neq (R^+,R^+,\surd)$

لابد من التنبيه إلى أن الثلاثية عند بورباكي هي مجموعة كذلك فالدالة تبقى مجموعة على هذا المفهوم.

أمر ثان : مجموعة بورباكي تستعمل نظرية المجموعات ZF ومعها مسلمة إبسيلون هلبرت وهي أقوي قليلا من مسلمة الاختيار.

لكن تعريف الدالة لا يحتاج لمسلمة الاختيار.

المدرسة الأنجلوساكسونية : تعريف بالمجموعات

هذا التعريف نجده عادة في المراجع الأنجليزية لكنه موجود كذلك في بعض المراجع الفرنسية.

في المرفقات مثالين :

الأول من Denis Bouyssou باحث جامعي من جامعة باريس CNRS –LAMSADE

و Philippe Bouyssou et Vincke باحث من بروكسل

http://www.lamsade.dauphine.fr/~bouyssou/hermes.pdf

والثاني من جامعة هارفارد ل Yimei Xiang :

https://scholar.harvard.edu/.../files/ho4-set-function-2.pdf

وهو يعتبر الدالة علاقة ثنائية من A نحو B بشرط أن لكل سابقة صورة على الأكثر.

ويعرف العلاقة بأنها مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي.

فعلى هذا التعريف الدالة وبيانها شيء واحد فهي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي.

ونكتب $y = f(x) \Leftrightarrow (x , y) \in f$

ينبني على هذا التعريف أن دالة الجذر التربيعي المعرفة على R^+ نحو R هي نفسها دالة الجذر التربيعي المعرفة على R^+ نحو R^+ إذ يكفي تساوي مجموعة تعريف الدالتين و تساوي صورهما عند كل سابقة لتتساوى الدالتين.

$(R^+,R,\surd) = (R^+,R^+,\surd)$



طريقة تيرانس تاو : تعريف بالقضايا

قام تيرانس تاو بتعريف الدالة عن طريق قضية أو خاصية دالية ترفق لكل عنصر من A عنصر وحيد من B بالصحة أي عند تيرانس تاو

$y = f(x) \Leftrightarrow P(x , y)$ صحيحة

ولا فرق عنده بين التطبيق والدالة.

يصرح تيرانس تاو أن الدالة ليست بمجموعة كما هو في الصورة.

و يعرف الجداء الديكارتي لاحقا.

هذا التعريف مكافئ لتعريف الدالة بأنها مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي إذ الكتابتين نفسهما:

$y = f(x) \Leftrightarrow P(x , y)$ صحيحة

$y = f(x) \Leftrightarrow (x , y) \in f$

فالخاصية هنا هي $P(x,y) : (x , y) \in f$ إنما أبهمت فقط.

وينبني على هذا التعريف نفس نتائج التعريف السابق للتكافؤ.

2-أسباب اختلاف هذه التعريفات

مجموعة بورباكي مهووسة بالتجريد والتقنين وهذه من طبائع الثقافة الفرنسية لذلك دفعت مجموعة بورباكي الشكليات لأوجها فأرادت التفريق باستعمال جميع ما نبني به دالة من مجموعة بدأ ووصول وبيان.

أما المدرسة الأنجلوساكسونية فمعروفة بعدم الوقوف عند الشكليات لذلك وضعت مباشرة أن الدالة هي بيانها لأن غير ذلك لا يخدم مفهوم الدالة.

أما تعريف تيرانس تاو فيعكس الطريقة البنائية للمدرسة الحدسية والتي تفضل الطرق البنائية لا الوجودية لذلك بنى الدالة بطريقة صناعتنا لها على أنها طريقة لإرفاق السوابق بالصور وهذا ما سماه الخاصية.

وإن كان تعريف الدالة كمجموعة جزئية من الجداء الديكارتي وتعريفها عن طريق القضايا متكافئ هنا إلا أنه من حيث المفهوم هما تعريفان مختلفان ولفهم ذلك سأضرب مثالا:

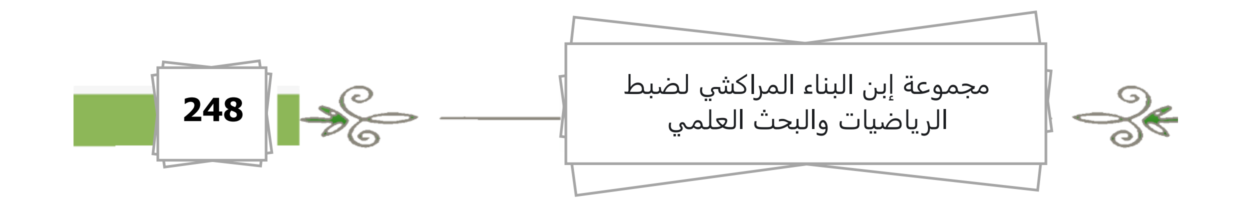
إذا أعتبرنا أرضا بها ذهب وأردنا تعريف الدالة التي تعطينا لكل موقع من الأرض كثافة الذهب فيها:

فعلى تعريف الدالة بالمجموعة الديكارتية وجود كمية من الذهب في كل موقع من الأرض هو عين الدالة أي أنه فلسفيا نعتبر الرياضيات موجودة أصالة ونحن عندما نقيس ذلك لنحسب الدالة نكتشفها.

لكن على تعريف الدالة بالقضية فنحن تقول أن قياساتنا لكمية الذهب عند كل نقطة هي الدالة وهذا يوافق مذهب من يذهب إلى أن الرياضيات صناعة بشرية.

أي النظرة الأولى مجردة لا تدخل النظرة البشرية في المسألة أما الثانية فترى أنا البشر من يعطي مفهوم الدالة.

3-ما أتبناه من تعريف



مشكلة تعريف مجموعة بورباكي للدالة أنه يقودنا للتفريق بين الدوال بمجرد اختلاف مجموعات الوصول فنكتب

$(R,R,\sqrt{}) \neq (R^+,R,\sqrt{}) \neq (R^+,R^+,\sqrt{})$

وهذا لا يقبله العقل إذ الدالة لا تتجاوز صورها فالنظر لخارج ذلك يعود للخروج من مفهومها ووظيفتها بل يقودنا ذلك للتفريق بين هذه الدوال

$f : R \to [0,2]$

$f(x) = 1$

$f : R \to R^+$

$f(x) =$

$f : R \to R$

$f(x) = 1$

لا لسبب إلا لاختلاف مجموعات الوصول!!!

أما تعريف تيرانس تاو ففيه مشكلة وضع معنى للخاصية.

المشكلة في القضايا الرياضية هو تعريفها فعند تعريف القضية نستعمل جملة:

القضية هي كل جملة أو صيغة يمكن أن نحكم عليها بالصحة أو الخطأ.

وهناك من يقول يمكنها أن تكون صحيحة أو خاطئة.

وهناك من يقول تحتمل الصحة والخطأ.

وهناك من يقول يمكنها أن تقبل برهانا على الصحة أو الخطأ.....

وكل هذه التعاريف مشكلة رياضيا إذ هي تعني أنه لا يمكننا أن نعتبر قضية قضية إلا بأحد **أمرين:**

الأول أنه يمكننا نحن البشر أن نحكم عليها بالصحة أو الخطأ (وهذا لا يعطيها قطعا صفة الصحة أو الخطأ ما لم تبرهن) لكن البشر يختلفون والرياضيات لا تقبل الذوق البشري فأي من البشر سيحكم ؟

الثاني : يمكنها أن تقبل برهانا بالصحة أو الخطأ ... وهذا مشكل كذلك من عدة نواحي فهذا يعني أننا لا نعرف أن القضية قضية إلا بعد ان تبرهن على صحتها أو خطئها.

وكتنبيه أن هناك مبرهنة تسمى بمبرهنة لوب تفيد أن إمكانية برهنة قضية تعود لبرهنتها وهي صياغة مختلفة لمبرهنة غودل.

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8me_de_L%C3...

المشكل الثاني أن هناك قضايا غير قابلة للتقرير فهل نعتبرها قضايا مع استحالة برهنة صحتها من خطئها ؟ الرياضيات تنهي هذه المشاكل بقبول القضايا المبرهنة أما غير ذلك فلا تعطيه حكم الصحة أو الخطأ.

وهذا ميدان طويل له مختصوه لكن أحببت هنا أن ألفت نظر القارئ إلى مشكلة القضايا وأنه متى عرفنا الدالة بقضية فكيف سنبرهن وجود مجموعة دوال على مجموعة نحو نفسها دون أن نبرهن على وجود القضايا التي نعرفها ؟



ذلك غير ممكن إلا باللجوء إلى مجموعة مجموعات أجزاء مجموعة الجداء الديكارتي فكل واحدة منها نعرف منها قضية بوجود x مع y في ثنائية و منها نستخلص وجود مجموعة الدوال.

إن تتبعتم جيدا فهمتم أنه لا مفر من المرور بالجداء الديكارتي.

ولذلك الذي أتبناه هو تعريف الدالة كمجموعة جزئية من الجداء الديكارتي وهذا الذي كررته في كثير من منشوراتي لأسباب عديدة منها:

التجريد الرياضي فالمجموعات كائنات لا تقبل الذوق البشري.

سهولة فهم النظريات والمبرهنات الرياضية:

منها تكامل لوبيغ فمن السهل فهمه بأنه تكميم دالة عن طريق قياس لمجموعة كونها مجموعة.

استعمال توطئة زورن فمن السهل تطبيقها على تمديدات الدوال كونها مجموعات مرتبة بالاحتواء...

فمن حيث المفاهيم الرياضية يوجد توافق تام.

وتبقى هذه اختيارات فمن أراد اختيار تعريف الدالة بالثلاثية فله ذلك ومن أراد أن يتبنى تعريف تيرانس تاو فله ذلك ومن أراد تبني تعريف الدالة كمجموعة جزئية من الجداء الديكارتي فله ذلك.

لكن فقط لابد من التنبه لما ينبني على ذلك وعدم رفض التعريفات الأخرى.

1 Relations

https://scholar.harvard.edu 1

1.1 Ordered pairs and Cartesian products

- The elements of a set are not ordered. To describe functions and relations we will need the notion of an *ordered pair*, written as $\langle a, b\rangle$, where a is the first element of the pair and b is the second.

  Compare: If $a \neq b$, then ...

  $\{a, b\} = \{b, a\}$, but $\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$

  $\{a, a\} = \{a, a, a\}$, but $\langle a, a\rangle \neq \langle a, a, a\rangle$

- The *Cartesian product* of two sets A and B (written as $A \times B$) is the set of ordered pairs which take an element of A as the first member and an element of B as the second member.

  (1) $A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \text{ and } y \in B\}$
  E.g. Let $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, then $A \times B = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle\}$,
  $B \times A = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$

1.2 Relations, domain, and range

- A *relation* is a set of ordered pairs. For example:
  - Relations in math: $=, >, \neq$, ...
  - Relations in natural languages: the instructor of, the capital city of, ...

  (2) a. $[\![$the capital city of$]\!] = \{\langle$USA, Washington$\rangle, \langle$China, Beijing$\rangle, \langle$France, Paris$\rangle, ...\}$
  $= \{\langle x, y\rangle : y$ is the capital city of $x\}$

  b. $[\![$invited$]\!] = \{\langle$Andy, Billy$\rangle, \langle$Cindy, Danny$\rangle, \langle$Emily, Flori$\rangle, ...\}$
  $= \{\langle x, y\rangle : x$ invited $y\}$

1

scholar.harvard.edu 2

2 Functions

- A relation is a function iff each element in the domain is paired with **just one** element in the range.

(8) $f(x) = x^2$ for $x \in \mathbb{N}$

In particular,

- a function f is a *from A (in)to B* (written as 'f: $A \to B$') iff Dom(f) = A and Range(f) $\subseteq B$.
- a function f is a *from A onto B* iff Dom(f) = A and Range(f) = B.

تيرانس تاو 1

3.3 Functions

In order to do analysis, it is not particularly useful to just have the notion of a set; we also need the notion of a *function* from one set to another. Informally, a function $f : X \to Y$ from one set X to another set Y is an operation which assigns to each element (or "input") x in X, a single element (or "output") $f(x)$ in Y; we have already used this informal concept in the previous chapter when we discussed the natural numbers. The formal definition is as follows.

Definition 3.3.1 (Functions). Let X, Y be sets, and let $P(x, y)$ be a property pertaining to an object $x \in X$ and an object $y \in Y$, such that for every $x \in X$, there is exactly one $y \in Y$ for which $P(x, y)$ is true (this is sometimes known as the *vertical line test*). Then we define the *function $f : X \to Y$ defined by P on the domain X and range Y* to be the object which, given any input $x \in X$, assigns an output $f(x) \in Y$, defined to be the unique object $f(x)$ for which $P(x, f(x))$ is true. Thus, for any $x \in X$ and $y \in Y$,

$$y = f(x) \iff P(x, y) \text{ is true.}$$

Functions are also referred to as *maps* or *transformations*, depending on the context. They are also sometimes called *morphisms*, although to be more precise, a morphism refers to a more general class of object, which may or may not correspond to actual functions, depending on the context.



Remark 3.3.6. Strictly speaking, functions are not sets, and sets are not functions; it does not make sense to ask whether an object x is an element of a function f, and it does not make sense to apply a set A to an input x to create an output $A(x)$. On the other hand, it is possible to start with a function $f : X \to Y$ and construct its *graph* $\{(x, f(x)) : x \in X\}$, which describes the function completely: see Section 3.5.

We now define some basic concepts and notions for functions. The first notion is that of equality.

تيراس تاو 2

§ 2. COUPLES

بورباكي 1

1. Définition des couples

Proposition 1. — *La relation* $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$ *est équivalente à* «$x = x'$ et $y = y'$».

Il suffit de prouver que la première de ces relations entraîne la seconde. Or, si l'on avait $x \neq x'$, on en déduirait que $\{x\} \neq \{x'\}$ (II, p. 4), donc (*loc. cit.*) $\{x\} = \{x', y'\}$, donc $x' = x$, contrairement à l'hypothèse. On a donc nécessairement $x = x'$ et $\{x, y\} = \{x, y'\}$; mais cela entraîne $y = x$ ou $y = y'$; dans le premier cas, on a $\{x, y'\} = \{x\}$, donc $y' = x$; comme $x = y$, on a $y' = y$ dans tous les cas. CQFD.



60

§ 3. CORRESPONDANCES

1. Graphes et correspondances

Définition 1. — *On dit que* G *est un graphe si tout élément de* G *est un couple, autrement dit si la relation*

$$(\forall z)(z \in G \Rightarrow (z \text{ est un couple}))$$

est vraie.

Si G est un graphe, la relation $(x, y) \in G$ s'exprime encore en disant que «y correspond à x par G».

Soit $\mathbf{R}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ une relation, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ étant des lettres distinctes. Soit $\mathbf{G}$ une lettre distincte de $\mathbf{x}$ et de $\mathbf{y}$ et ne figurant pas dans $\mathbf{R}$. Si la relation

$$(\exists \mathbf{G})(\mathbf{G} \text{ est un graphe et } (\forall \mathbf{x})(\forall \mathbf{y})(\mathbf{R} \Leftrightarrow ((\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{G})))$$

est vraie, on dit que $\mathbf{R}$ *admet un graphe* (par rapport aux lettres $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$). Le graphe $\mathbf{G}$ est alors unique en vertu de l'axiome d'extensionalité, et s'appelle le *graphe* de $\mathbf{R}$ (ou l'*ensemble représentatif* de $\mathbf{R}$) par rapport à $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$.

Soit $\mathbf{Z}$ une lettre distincte de $\mathbf{x}$ et de $\mathbf{y}$ et ne figurant pas dans $\mathbf{R}$. Si la relation

$$(\exists \mathbf{Z})(\forall \mathbf{x})(\forall \mathbf{y})(\mathbf{R} \Rightarrow ((\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{Z}))$$

est vraie, $\mathbf{R}$ admet un graphe: il suffit en effet de prendre pour ce graphe l'ensemble des couples $\mathbf{z}$ tels que $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}$ et $\mathbf{R}\{\mathrm{pr}_1\, \mathbf{z}, \mathrm{pr}_2\, \mathbf{z}\}$ ($\mathbf{z}$ étant une lettre distincte de $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{Z}$ et ne figurant pas dans $\mathbf{R}$). Cette condition est remplie si on connaît un terme $\mathbf{T}$, où ne figurent ni $\mathbf{x}$ ni $\mathbf{y}$, tel que $\mathbf{R} \Rightarrow ((\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{T})$ soit vrai.

4. Fonctions

DÉFINITION 9. — *On dit qu'un graphe* F *est un graphe fonctionnel si, pour tout* x, *il existe au plus un objet correspondant à* x *par* F (I, p. 40). *On dit qu'une correspondance* $f = (F, A, B)$ *est une fonction si son graphe* F *est un graphe fonctionnel, et si son ensemble de départ* A *est égal à son ensemble de définition* pr_1 F. *Autrement dit, une correspondance* $f = (F, A, B)$ *est une fonction si, pour tout* x *appartenant à l'ensemble de départ* A *de* f, *la relation* $(x, y) \in F$ *est fonctionnelle en* y (I, p. 41); *l'objet unique correspondant à* x *par* f *s'appelle la valeur de* f *pour l'élément* x *de* A, *et se désigne par* $f(x)$ *ou* f_x (ou $F(x)$, ou F_x).

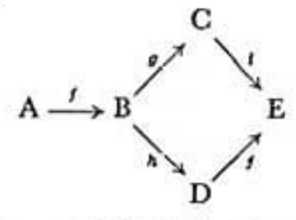
Si f est une fonction, F son graphe et x un élément de l'ensemble de définition de f, la relation $y = f(x)$ est donc équivalente à $(x, y) \in F$ (I, p. 41, critère C46).



emarque. — Il faut prendre garde aux confusions que risque d'entraîner l'emploi multané de la notation $f(x)$ et de la notation $f(X)$ (synonyme de $f\langle X\rangle$) introduite ans la déf. 3 (cf. II, p. 50, exerc. 11).

nt A et B deux ensembles; on appelle *application de* A *dans* B une fonction f nsemble de départ (égal à l'ensemble de définition) est égal à A et dont ble d'arrivée est égal à B; on dit aussi qu'une telle fonction est *définie dans* *nd ses valeurs dans* B.

Au lieu de dire « soit f une application de A dans B », on emploiera souvent les hrases suivantes: « soit une application $f: A \to B$ » ou même « soit $f: A \to B$ ». Pour aciliter la lecture d'un raisonnement où interviennent plusieurs applications, on fera sage de *diagrammes* tels que



ù un groupe de signes tel que $A \xrightarrow{f} B$ doit s'interpréter comme signifiant que f est ne application de A dans B.

dit encore qu'une fonction f définie dans A *transforme* x *en* $f(x)$ (pour tout ou que $f(x)$ est le *transformé de* x *par* f, ou (par abus de langage) l'*image* de

بورباكي 4

5. Restrictions et prolongements de fonctions

On dit que deux fonctions f et g *coïncident dans un ensemble* E si E est contenu dans les ensembles de définition de f et de g, et si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$. Deux fonctions ayant même graphe coïncident dans leur ensemble de définition. Dire que $f = g$ revient à dire que f et g ont même ensemble de définition A, même ensemble d'arrivée B, et coïncident dans A.

Soient $f = (F, A, B)$ et $g = (G, C, D)$ deux fonctions. Dire que $F \subset G$ revient à dire que l'ensemble de définition A de f est contenu dans l'ensemble de définition C de g, et que g coïncide avec f dans A. Si en outre $B \subset D$, on dit que g est un *prolongement* de f (ou, de façon plus précise, un prolongement de f à C), ou que g prolonge f (à C). Lorsque g est appelée une famille d'éléments de D, on dit aussi que f est une *sous-famille* de g.

Soient f une fonction, X une partie de l'ensemble de définition A de f. Il est immédiat que la relation « $x \in X$ et $y = f(x)$ » admet un graphe G par rapport à x et y, que ce graphe est fonctionnel et que X est son ensemble de définition; on dit que la fonction de graphe G, qui a le même ensemble d'arrivée que f, est la *restriction de f à* X, et on la note parfois $f \mid X$. Une fonction est un prolongement d'une quelconque de ses restrictions. Si deux fonctions f, g ont même ensemble d'arrivée et coïncident dans un ensemble E, leurs restrictions à E sont égales.

*Avec les notations précédentes, si $f = (F, A, B)$, $f \mid X$ est égal à $(F \cap (X \times B), X, B)$, (II, p. 26); on dit encore que $f \mid X$ est *déduite de f par passage au sous-ensemble* X *de* A. Soit Y une partie de B contenant $f(X)$; on dit que la fonction

$$(F \cap (X \times B), X, Y)$$

est *déduite de f par passage aux sous-ensembles* X *de* A *et* Y *de* B.*

2 Relations binaires

Bouyssou et Vincke

2.1 Définitions

3

Une relation binaire T dans un ensemble A est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times A$, c'est-à-dire un ensemble de couples (a, b) d'éléments de

2

A. Si le couple (a, b) appartient à l'ensemble T, nous noterons fréquemment $a\ T\ b$ au lieu de $(a, b) \in T$. Dans le cas contraire, nous écrirons $(a, b) \notin T$ ou $a \neg T\ b$. Dans tout ce qui suit, on supposera, sauf mention contraire, que A est *fini*.

Remarque 1
Puisque les relations binaires sont des ensembles, on peut leur appliquer les opérations habituelles de la théorie des ensembles. Ainsi, étant donné deux relations T_1 et T_2 dans A, on notera:

$$T_1 \subset T_2 \text{ ssi } a\ T_1\ b \Rightarrow a\ T_2\ b, \forall a, b \in A,$$
$$a(T_1 \cup T_2)b \text{ ssi } a\ T_1\ b \text{ et/ou } a\ T_2\ b,$$
$$a(T_1 \cap T_2)b \text{ ssi } a\ T_1\ b \text{ et } a\ T_2\ b.$$

Enfin, le *produit* $T_1 \cdot T_2$ sera défini par :

$$a\ T_1 \cdot T_2\ b \text{ ssi } \exists c \in A : a\ T_1\ c \text{ et } c\ T_2\ b.$$

On notera T^2 la relation $T \cdot T$, c'est-à-dire le produit de la relation T avec elle même. •

Étant donné une relation binaire T dans A on définit :

– sa relation inverse T^- telle que :

$$a\ T^-\ b \text{ ssi } b\ T\ a,$$

– sa relation complémentaire T^c telle que :

$$a\ T^c\ b \text{ ssi } a \neg T\ b,$$



كيف نعرف تطبيقا أو دالة في نظرية المجموعات ZFC ؟

التطبيق والدالة في نظرية المجموعات يعرفان بطرق مختلفة متكافئة نذكر منها :

سنسمي مجموعة البدء E ومجموعة الوصول F

طريقة المجموعات:

يعرف تطبيق f الذي ينطلق من المجموعة E نحو المجموعة F بأنه مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي ل $E \times F$:

$f \subset E \times F$

تحقق خاصيتين: $\forall x \in E, \exists y \in F : (x , y) \in f$

والتي تعني أن التطبيق معرف عند كل عنصر من E

$\forall (x,y) , (a,b) \in f : x = a \Rightarrow y = b$

وهذا يعني أن لكل سابقة صورة واحدة.

إذا اقتصرنا على الشرط الثاني فقط تحصلنا على تعريف الدالة.

على هذا التعريف لدينا $y = f(x) \Leftrightarrow (x,y) \in f$

للمزيد يمكن النظر في هذا الرابط.

http://www.math.univ-toulouse.fr/~yak/Ens-Applications.pdf

طريقة ثانية عن طريق العلاقات المعرفة لقضايا:

يمكننا تعريف التطبيق f عن طريق القضايا فإذا كانت لدينا قضية معرفة على $E\times F$

(أي تعطي عند كل ثنائية من الجداء الديكارتي صحيح أو خطأ) بحيث تحقق الخاصية التالية :

$\forall x \in E, \forall y, z \in F : P(x , y) \wedge P(x,z) \Rightarrow y = z$

فهذه القضية تعرف لنا تطبيقا وعندها نكتب: $P(x,y) \Leftrightarrow y = f(x)$

هذه الطريقة استعملها تيرانس تاو في كتابه التحليل.

كلا الطريقتين متكافئتين وترجعان للنظر للتطبيق كعلاقة.

فإذا انطلقنا من الطريقة الأولى يمكننا تعريف الخاصية أو القضية في الطريقة 2 عن طريق

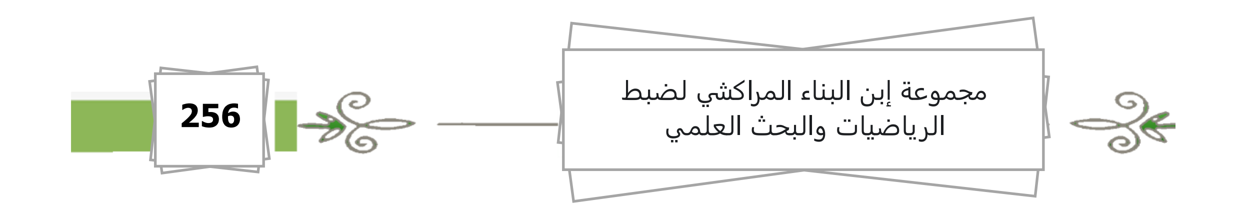
$P(x,y) \Leftrightarrow (x,y) \in f$

وإذا انطلقنا من الطريقة 2 يمكننا تعريف الطريقة الأولى بالاستلزام العكسي في التكافؤ.

تبقى اللبنة الأساسية لصناعة الكائنات في الرياضيات هي المجموعات.

رابط كتاب تيرانس تاو:

https://lms.umb.sk/.../TerenceTao_Analysis.I.Third...



Definition 3.3.1 (Functions). Let X, Y be sets, and let $P(x, y)$ be a property pertaining to an object $x \in X$ and an object $y \in Y$, such that for every $x \in X$, there is exactly one $y \in Y$ for which $P(x, y)$ is true (this is sometimes known as the *vertical line test*). Then we define the *function* $f : X \to Y$ *defined by* P *on the domain* X *and range* Y to be the object which, given any input $x \in X$, assigns an output $f(x) \in Y$, defined to be the unique object $f(x)$ for which $P(x, f(x))$ is true. Thus, for any $x \in X$ and $y \in Y$,

$$y = f(x) \iff P(x, y) \text{ is true.}$$

Functions are also referred to as *maps* or *transformations*, depending on the context. They are also sometimes called *morphisms*, although to be more precise, a morphism refers to a more general class of object, which may or may not correspond to actual functions, depending on the context.

2. Applications.

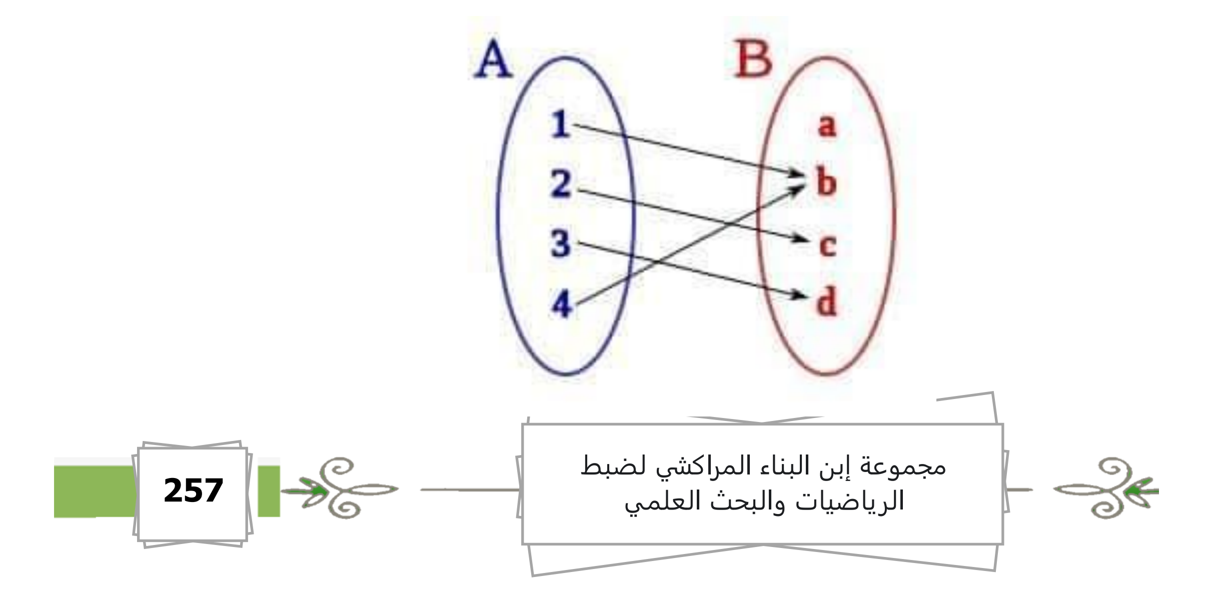
Soient E et F deux ensembles. On appelle **application** de E dans F un triplet (E, F, f) où f est une partie de $E \times F$ et qui vérifie les deux propriétés suivantes :

(1) $(\forall x \in E)(\exists y \in F)\ (x, y) \in f$,

(2) $(\forall x \in E)(\forall y \in F)(\forall z \in F)((x, y) \in f \text{ et } (x, z) \in f) \Rightarrow y = z$,

autrement dit, pour tout $x \in E$ il existe un et un seul $y \in F$ tel que $(x, y) \in f$. On note de façon plus habituelle $y = f(x)$ au lieu de $(x, y) \in f$. Voici un peu de terminologie : E est l'ensemble de départ ou de définition de f, F est l'espace d'arrivée, $y = f(x)$ est l'image de x par f. Le terme de fonction est plutôt réservé aux applications à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une autre notation souvent utilisée est

$$f : E \to F.$$



لنضبط الرياضيات معا : ما هو تعريف التطبيق والدالة في نظرية المجموعات ZFC ؟

التطبيق وكذلك الدالة على مجموعة تعريفها هو مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي لمجموعة البدء في مجموعة الوصول تحقق الخاصية:

لكل صورة سابقة وحيدة ويكتب تعريفه رياضيا كما في الصورة.

$$f \subset E\times F :$$
$$\forall\ x \in E,\ \exists\ y \in F : (x , y) \in E\times F$$
$$\forall\ (x,y) , (a,b) \in f , x = a \Rightarrow y = b$$

الشرط الأول يعني أن لكل سابقة صورة.

والشرط الثاني يعني أن الصورة وحيدة.

فإذا نزعنا الشرط الأول وأبقينا الثاني حصلنا على تعريف الدالة أي ليس شرطا لكل سابقة صورة بعكس التطبيق لكن متى قصرنا الدالة على مجموعة تعريفها ستصبح تطبيقا.

من التعريف يتضح أن المجموعة الخالية تطبيق.

تسمى هذه المجموعة في نظرية المخططات أو البيان بمخطط التطبيق ويرمز للدالة بالثلاثية:

$$f = (E, F, G)$$

حيث G هي هذه المجموعة من الجداء الديكارتي.

الخلاف بين التعريف الأول والثاني شكلي فالكائن الرياضي يبقى المجموعة في نظرية المجموعات ZFC .

أما عن السؤال : هل الدالة هي السابقات وصورها أم الرابط بين الصور وسوابقها ؟ فهو سؤال متوهم من محاولة تصور رابط بين x و y ككائن أحادي بدل الثنائية (x,y) التي هي نفسها تعبر عن الربط بينهما فالثنائية هذه مفهوم ثالث فهي ليست x وليست y .

ومن قبيله التساؤل عن الكتاب هل هو الكتابة الموجودة فيه أو الورق المطبوع عليه .

https://fr.m.wikipedia.org/.../Application_(math%C3...

^ **Définition**

La définition usuelle en mathématiques d'une fonction est donc ensembliste et présuppose essentiellement celle de couple et de produit cartésien. Une application ou fonction est un triplet $f = (E, F, G)$ avec une relation binaire $G \subset E \times F$, et qui vérifie que pour tout x de E il existe un unique y de F tel que le couple (x, y) appartienne à G. Exactement dans ce cas, une application f_G donnée comme relation binaire $G \subset E \times F$ est dite **bien définie**. L'ordre des ensembles du triplet est arbitraire et on trouve d'ailleurs des variations suivant les ouvrages. La propriété caractéristique peut se décomposer en deux clauses[16] :

Existence. $\forall\ x \in E\ \exists\ y \in F\quad (x, y) \in G$;
Unicité. $\forall\ x \in E\ \forall\ y \in F\ \forall\ y' \in F\ ([(x, y) \in G$ et $(x, y') \in G] \Rightarrow y = y')$.




يا أستاذ، هل فعلا الدالة آلة لتصنيع الصور ؟

لو سألت عن مفهوم الدالة لأجابك الكثيرون بما معناه أن الدالة آلة لتصنيع الصور إذا أعطيتها قيمة x فإنها تنتج قيمة y .

في الحقيقة هذا مفهوم غير كامل بل هو أقرب لمفهوم الصيغ الجبرية منه للدوال أما الدالة نفسها فهي علاقة ثنائية مع خواص معية.

فلو سألت تلميذا عن سنه لأجابك سني كذا ثم لو سألته هل لكل إنسان سن معينة لأجابك نعم.

فالعلاقة بين كل إنسان وسنه تمثل دالة معرفة على مجموعة البشر ترفق كل بشر بسنه فهذه الدالة ما صنعت أعدادا حقيقية انطلاقا من البشر فالبشر موجودون والأعداد موجودة قبل أن نعرف هذه الدالة إنما كل ما فعلناه هو إظهار هذه العلاقة بين البشر وأعمارهم وإن شئت قلت بين رقم بطاقة تعريف كل منا وسنه حتى تكون دالة من R نحو R .

فهذه العلاقة هي التي تمثل الدالة وهكذا تعرف رياضيا فالدالة تطبيق والتطبيق علاقة مع شرط وحدانية الصورة إذا وجدت.

ومن أجل هذا في نظرية المجموعات تعتبر الدالة خصوصا والعلاقة عموما كمجموعة جزئية من الجداء الديكارتي لمجموعتين.

لكن من أين جاءت صورة أن الدالة آلة لتصنيع الصور ؟

هذه الفكرة جاءت من كون أننا نحاول دراسة الدوال بواسطة تقريبها من خوارزميات حسابية انطلاقا من المتغير سواء عن طريق كثيرات الحدود أو الاشتقاق أو النشر وإلى غير ذلك.

لكننا نعلم أن مجموعة الدوال أعم من هذا وأن الدوال القابلة للاشتقاق بل حتى المستمرة مهملة أمام بقية الدوال فمن أجل هذا أدخلنا مفهوم التوزيعات لدراسة الدوال عن طريق الكمية لا الخوارزمية المفردة المتعلقة بقيمة المتغير.

بل كل الدراسات الاحصائية والأنتروبولوجية لا تنظر للدالة كآلة تصنيع قيم بل تراها كمجموعة ثنائيات تحقق خاصية شمولية معينة.

بل حتى في تكامل لوبيغ وهو كثير التطبيق في الفيزياء لا ننظر للدالة كخوارزمية حسابية إنما ننظر لها كتوزيع صور على مجموعة السوابق أي ننظر لها نظرة كثافة ولذلك نكاملها بالقياس الكلي لا بالحساب المحلي.

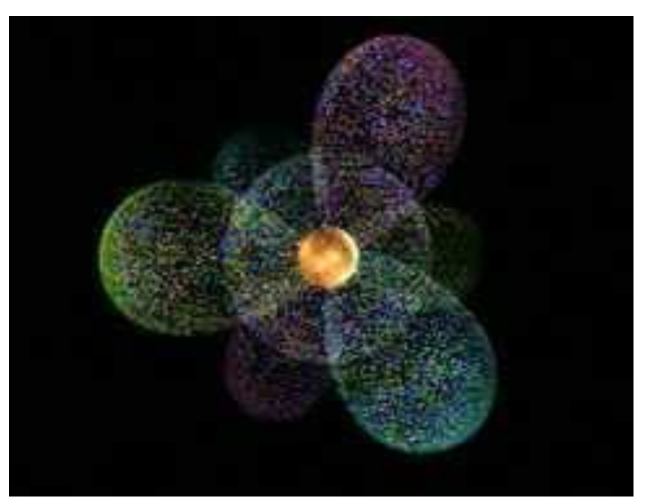
نحن هنا أمام تشويه لمفهوم الدالة سببه تكوين المفهوم لدى الكثيرين عن طريق التجربة لا التعريف فمن كثرة استعمالنا لدوال مألوفة سواء كانت كثيرات حدود أو دوال قابلة للنشر كالدوال المثلثية والأسية واللوغارتمية فقد عوضنا مفهوم الدالة بمفهوم الخوارزميات الحسابية فصرنا نعتقد أن الدالة آلة حسابية.



لكن المسألة على غير ذلك فالدالة المميزة للأعداد الناطقة ليست حسابية البتة وقس على ذلك جميع الدوال التي تمثل مجرد علاقات بين مجموعة سوابق ومجموعة صور وكثيرة هي في الفيزياء المعاصرة.

فالسحابة الاحتمالية لظهور الإلكترون من معادلة شرودنجر لا تمثل آلة تصنيع صور البتة بل لابد أن لا نراها كذلك حتى لا نقع في خطأ جعل الإلكترون موجودا في موضع معين.





الفرق بين الدالة و التطبيق

الدالة هي علاقة ثنائية والعلاقة الثنائية هي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي.

فنقول عن دالتين أنهما متساويتان إذا كانت مجموعتيهما الجزئيتين من الجداء الديكارتي متساويتين.

ذلك يعني تساوي مجموعتي التعريف وتساوي صور كل سابقة من مجموعة التعريف

وهذا يفسر لماذا في التركيب لا ننظر لمجموعة تعريف تركيب الصيغ لان الصيغة لا تعني الدالة انما هي هنا للربط فقط بين سابقة وصورة اما الدالة فهي المجموعة الجزئية من الجداء الديكارتي.

الفرق بين الدالة و التطبيق:

في الرياضيات : التطبيق هو علاقة بين مجموعتين ترفق لكل عنصر من المجموعة الأولى عنصرا وحيدا من المجموعة الثانية.

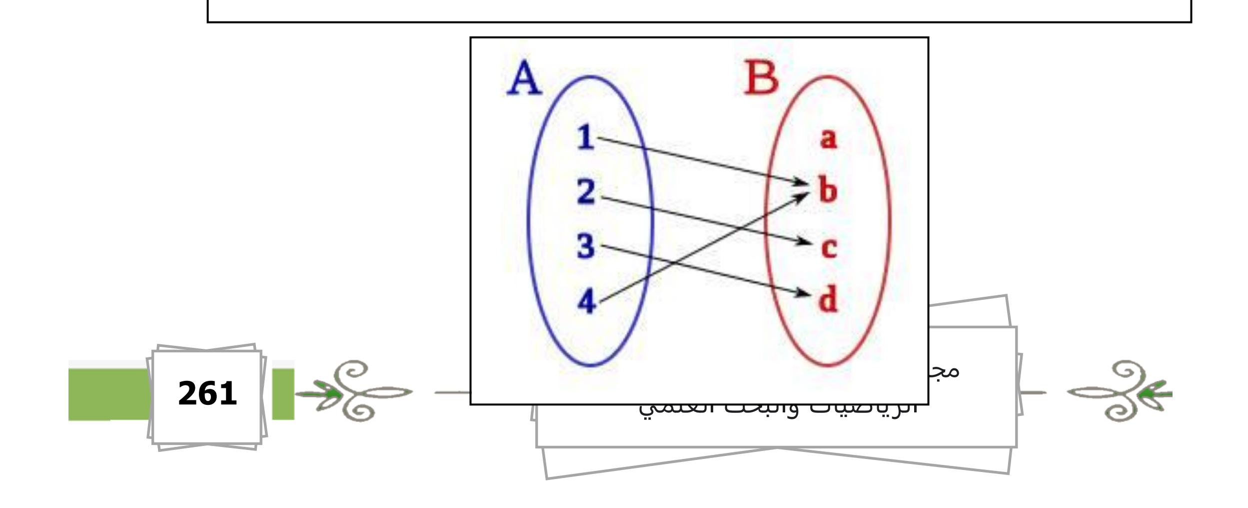
مفهوم الدالة ظهر في القرن السابع عشر على يد ليبينز سنة 1694، حيث كانت ترمز إلى علاقة مرتبط بمنحنى هندسي، ثم تطورت لتعني كل تطبيق عددي على مجموعات عددية ثم عممت في بداية القرن العشرين إلى أي تطبيق على مجموعات كيفية ليصبح مصطلح الدالة و التطبيق يعنيان نفس الشيء طوال القرن العشرين في المجتمع الرياضياتي و إلى يومنا هذا لكن شاع استعمال لفظ الدالة في الدوال التي مجموعة وصولها عددية.

أحيانا هناك من يحاول التفريق بين التطبيق و الدالة بأن الدالة أعم من التطبيق لأنه ليس لكل سابقة صورة حتما لكن يكفي الاقتصار على مجموعة تعريفها لتصبح تطبيقا.

الخلاصة هما سيان من حيث منظور المجموعات.

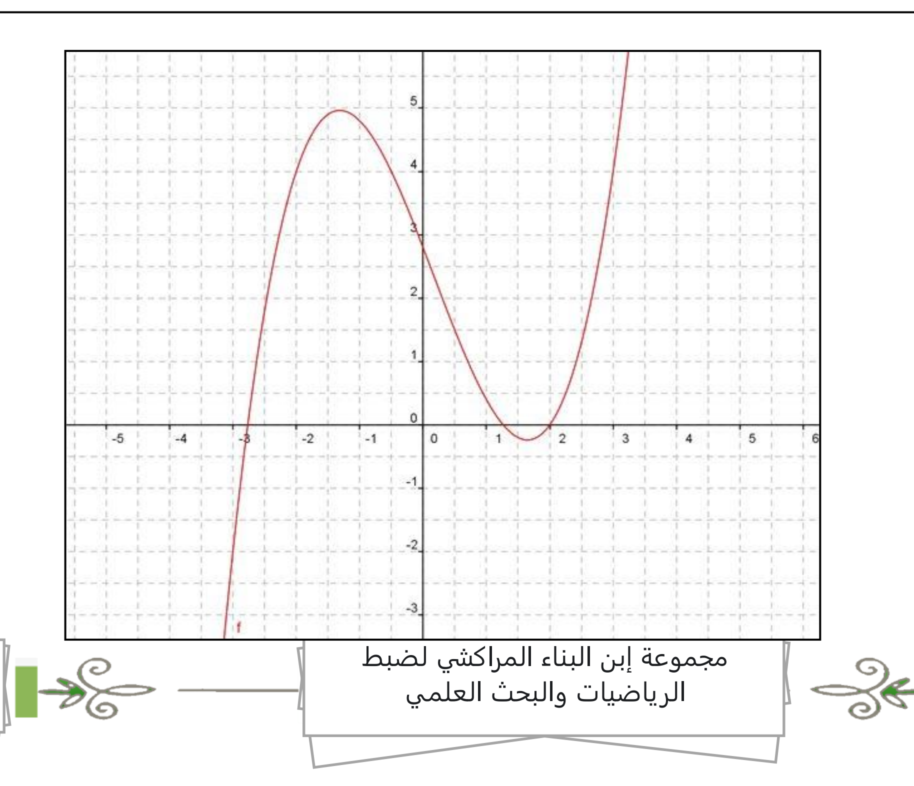
https://fr.wikipedia.org/.../Application_(math%C3...

Cette distinction ne commence à disparaitre des ouvrages scolaires qu'à partir de 1985, à l'adoption de nouveaux programmes mais on trouve encore des ouvrages récents dans lesquels cette distinction est présente[13],[14],[15].



Tout au cours du XXe siècle, dans de nombreux ouvrages universitaires, les termes de fonction et d'application sont synonymes[4],[5],[6]. On introduit parfois certaines nuances : le terme fonction est employé plutôt dans le cas où l'ensemble d'arrivée est numérique, et parfois lorsque l'ensemble de définition n'est pas égal à l'ensemble de départ[1].

Dans les années 1950, l'école Bourbaki tente de définir précisément les deux notions. Ainsi peut-on lire dans un projet de rédaction du Livre I, Chapitre II des *Éléments* de 1954[7], les définitions suivantes :



Même si, dans la rédaction finale des *Éléments* de 1970[11] la fonction est toujours définie *sur* son ensemble de départ, cette distinction est reprise dans l'enseignement français du secondaire, premier et second cycle, quand, à la suite de la Commission Lichnerowicz, se mettent en place les nouveaux programmes, à partir de 1968. Ainsi voit-on dès la 6e, illustrées par des diagrammes sagittaux, les définitions suivantes[12]:

- les relations telles que, de chaque élément de l'ensemble de départ, il part au plus une flèche, s'appellent des fonctions ;
- les relations telles que, de chaque élément de l'ensemble de départ, il part exactement une flèche, s'appellent des applications.

En pratique, le fait qu'il suffise de réduire l'ensemble de départ d'une fonction à son ensemble de définition pour la transformer en application rend peu utile ce distinguo.



Dans les années 1950, l'école Bourbaki tente de définir précisément les deux notions. Ainsi peut-on lire dans un projet de rédaction du Livre I, Chapitre II des *Éléments* de 1954[7], les définitions suivantes :

- La relation *R*(*x*,*y*) est appelée une relation fonctionnelle de type (T × U) si elle satisfait à la condition suivante : quel que soit *x*, il existe au plus un *y* tel *R*(*x*,*y*). À toute relation fonctionnelle, on attache un objet nouveau que l'on appelle une fonction[8];
- On appelle champ de définition de la fonction *f* l'ensemble des éléments *x* de E pour lesquels il existe y tel que R(x,y). C'est une partie *E* de E. On dit que f est définie **sur** E et **dans** E[9].
- Au lieu de parler d'une fonction définie *sur E* et prenant ses valeurs dans *F*, on parle d'une application de *E* dans *F*[10].



هل المجموعة الخالية دالة ؟

في نظرية المجموعات كل الكائنات تصنع من مجموعات ومنها الدالة والتطبيق.

فالتطبيق مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي لمجموعة البدء في مجموعة الوصول والكتابة $y = f(x)$

تعني $(x , y) \in f$

وكذلك الدالة.

فالجواب على السؤال نعم الدالة يمكن أن تكون مجموعة خالية مثال ذلك الدالة الحقيقية المعرفة بالصيغة:

$f(x) = \sqrt{(x - 2)} + \sqrt{(1 - x)}$

من فوائد معرفة هذه النقطة تطبيق توطئة زورن على تمديدات الدوال ذلك أن g تمديد ل f يعني

$f \subset g$

من أمثلة ذلك برهان مبرهنة هان باناخ

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Hahn...

في المرفقات تعريف التطبيق.

https://www.math.univ-toulouse.fr/.../Slide2...

http://www.math.univ-toulouse.fr/~yak/Ens-Applications.pdf

2. Applications.

Soient E et F deux ensembles. On appelle **application** de E dans F un triplet (E, F, f) où f est une partie de $E \times F$ et qui vérifie les deux propriétés suivantes :

(1) $(\forall x \in E)(\exists y \in F)\ (x, y) \in f$,

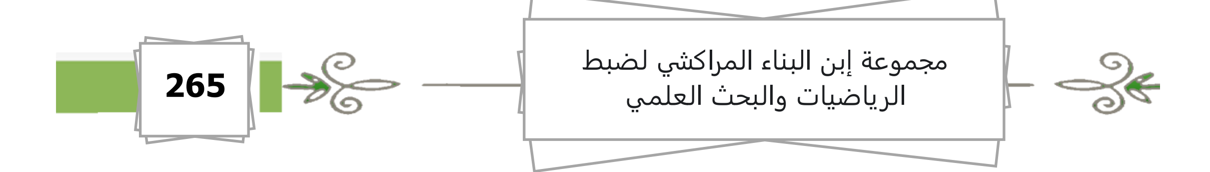
(2) $(\forall x \in E)(\forall y \in F)(\forall z \in F)\ ((x, y) \in f \text{ et } (x, z) \in f) \Rightarrow y = z$,

autrement dit, pour tout $x \in E$ il existe un et un seul $y \in F$ tel que $(x, y) \in f$. On note de façon plus habituelle $y = f(x)$ au lieu de $(x, y) \in f$. Voici un peu de terminologie : E est l'ensemble de départ ou de définition de f, F est l'espace d'arrivée, $y = f(x)$ est l'image de x par f. Le terme de fonction est plutôt réservé aux applications à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une autre notation souvent utilisée est

$$f : E \to F.$$

Fonction

Une **fonction** $f : E \longrightarrow F$ (de E dans F) est définie par un sous-ensemble de $G_f \subseteq E \times F$ tel que pour tout $x \in E$, il existe au plus un $y \in F$ tel que $(x, y) \in G_f$, on note y=f(x).



نظرية المجموعات : تاريخ وميراث

البداية الفعلية لنظرية المجموعات كانت في القسم الثاني من القرن التاسع عشر بعدما تقدمت الرياضيات بشكل مذهل وظهرت الكثير من الكائنات الرياضية التي لا توافق الحدس البشري كدوال وستراس (وهي من السلاسل المثلثية) المستمرة عند كل نقطة مع عدم قابلية الاشتقاق عند أي نقطة تقريبا.

فكان لزاما على الرياضياتيين ضبط الرياضيات على أسس سليمة.

الأعمال الأولى في هذا الميدان كانت

لغوتلوب فريج Gottlob Frege وجورج كنتور Georg Cantor

أما فريج فقد أمضى ثلاثين سنة من العمل في صناعة نظرية مكتملة للمجموعات والتي نسميها اليوم بالنظرية الساذجة فهي تقوم على الفهم الحدسي للرياضيات كتكوين مجموعة من أي خاصية مفهومة.

لكن بعدما قدم كتابه للطباعة تلقى رسالة من راسل حطمت عمل عمره وفتحت باب ما يسمى بأزمة الأساسيات في السنوات الأولى من القرن العشرين: هل الرياضيات مبنية على تناقض ؟

متناقضة راسل المكتشفة سنة 1901 والتي نشرت سنة 1903

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Russell

تنص على أن مجموعة جميع المجموعات غير موجودة لأنها لو كانت كذلك لشملت مجموعة أجزائها وهذا مستحيل لأنه لا يمكن أن نجد تطبيقا غامرا من مجموعة نحو مجموعة مجموعات أجزائها.

هذه المتناقضة تستعمل مسلمة بسيطة وهي أننا يمكننا صناعة مجموعة من أي خاصية مفهومة.

يتم برهان عدم وجود تطبيق غامر من مجموعة نحو مجموعة أجزائها بالخلف:

بفرض أنه موجود فنسميه T والذي ينطلق من A نحو مجموعة مجموعاتها الجزئية $P(A)$

ثم بأخذ المجموعة الجزئية M المعرفة كالتالي:

هي المجموعة التي تشمل كل عنصر x من A لا ينتمي لصورته بالتطبيق T

$$M = \{ x \in A : x \notin T(x)\}$$

بما أن M مجموعة جزئية من A إذن هي تنتمي ل $P(A)$

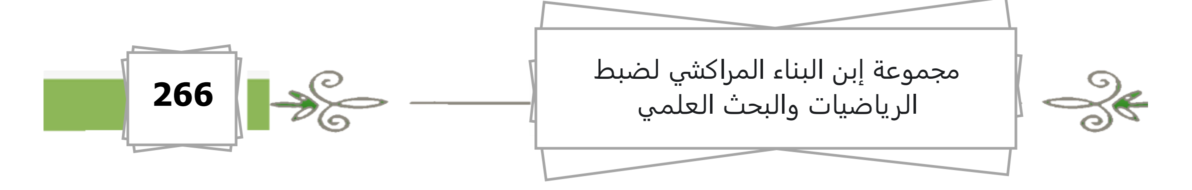
وبما أن T غامر فالمجموعة M لها سابقة y بحيث $T(y) = M$

السؤال هل y تنتمي إلى M أو لا ؟

إن قلنا تنتمي إلى M أي $y \in M$ فحسب تعريف M كل عناصرها لا تنتمي إلى صورها أي $y \notin T(y) = M$ وهذا غير ممكن وإن قلنا لا تنتمي ل M أي $y \notin M$

فحسب تعريف M فإنها تشمل كل العناصر التي لا تنتمي إلى صورها بالتطبيق T لكن y تحقق الشرط إذن تنتمي لM

وهذا غير ممكن كذلك.



ففي كلا الحالتين نصل إلى تناقض.

إذن التطبيق T غير موجود.

استنتج راسل متناقضته من أعمال كنتور مما يسمى بقطر كنتور الذي يبرهن فيه عدم قابلة مجموعة الأعداد الحقيقية للعد.

https://fr.m.wikipedia.org/.../Argument_de_la_diagonale...

يعتبر كنتور الأب الفعلي لنظرية المجموعات وإن كانت أعماله في البداية تهدف إلى دراسة غرائب السلاسل المثلثية حيث حاول حصر النقاط الشاذة لهذه الدوال في مجموعات لكن قاده ذلك لدراسة المجموعات العددية وقوتها حيث استنتج عدم تساوي قدرات هذه المجموعات سنة 1891.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Cantor

المتناقضات التي ظهرت في نهاية القرن التاسع عشر وبداية القرن العشرين دفعت رياضيين مثل Richard Dedekind و David Hilbert و Ernst Zermelo

وغيرهم إلى البحث عن أجوبة لحلها.

في سنة 1908 قام Ernst Zermelo ببناء نظرية مجموعات قائمة على المسلمات لا تقع في المتناقضات السابقة الذكر

ثم أتمها سنة 1920 Abraham Adolf Fraenkel و Thoralf Skolem بمسلمات أخرى.

هذه النظرية تعرف اليوم بنظرية المجموعات ZF وعندما تضاف إليها مسلمة الاختيار تسمىZFC

تمكن الرياضياتيون من بناء جميع المجموعات العددية المعروفة بهذه النظرية وهي النظرية المعروفة والمستعملة إلى اليوم.

عموما نظرية المجموعات مقبولة في المجتمع الرياضي وانتقاداتها قليلة تتمثل خاصة في:

قبول مسلمة الإختيار وهذا بسبب الخلاف المشهور بين المنطق الكلاسيكي والحدسي.

وإتمامها بنظرية الفئات.

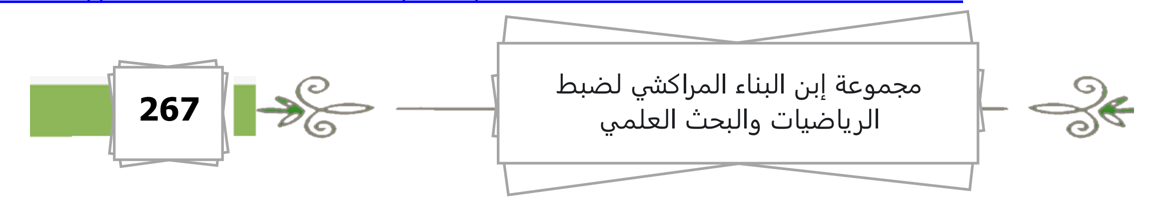
لم يتوقف الرياضياتيون عند نظرية الفئات التي تعمم نظرية المجموعات بل واصلوا دراسة هذه النظرية لمعرفة اكتمال الرياضيات بها أو لا.

لكن مبرهنة عدم الاكتمال لغودل حطمت هذا الحلم كما كان لظهور متناقضات كمتناقضة باناخ تارسكي التعزيز من انتقادات المنطق الحدسي للمنطق الشكلي.

كل هذا مهد لفتح ميدان جديد يسمى ميدان قابلية الحساب.

يمكن القول أن مشكلة قبول أو عدم قبول مسلمة الاختيار سببها ربط الرياضيات بالواقع فهل المجموعات غير قابلة للقياس موجودة فعلا وهل يمكننا أن نقبل متناقضات كمتناقضة باناخ تارسكي ؟

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Banach-Tarski



تفرع عن هذا الانتقاد ما يسمى اليوم بالتحليل الرقمي والذي نبع من مشكلة قابلية الحساب فهل كل عدد معرف رياضيا يمكننا تقريبه رقميا ؟

يمكننا القول اليوم أن نظرية المجموعات أنتجت فرعين في الرياضيات:

الرياضيات النظرية والتي تواصل البحث النظري في كائنات لا يمكن للعقل البشري تقبلها.

الرياضيات التطبيقية والتي تهتم بإمكانية الحساب والتقريب.

ويمكن القول أن مشكلة مسلمة الاختيار غطت عليها اكتشافات غودل لمبرهنة عدم الاكتمال إذ السؤال المطروح اليوم هل هناك رياضيات أخرى غير التي نعرفها تبنى على غير المنطق الخوارزمي ولا تقع تحت طائلة عدم الاكتمال ؟

الجواب صعب إذ واقعنا اليوم خوارزمي...



المجلد الأول لسلسلة بورباكي : نظرية المجموعات

أنصحكم بقراءة مقدمته فهي مفيدة جدا.

أهمية نظريه المجموعات و المنطق أنها المدخل للكتابة الشكلية في الرياضيات، فهذي الكتابة تتميز بخلوها من الذوق البشري و تعلق مفرداتها بمسلمات واضحة المعالم لا تحتمل معنين.

التفكير الرياضي قد يعتريه الخطأ من حيث الاستعمال المجحف للحدس و التشبيه، والأصل أن التفكير الرياضي لابد أن يسير وفق قواعد منطقية ثابتة و على مسلمات محددة مسبقا.

لكن قد يحدث أن تقفز هذه المراحل نتيجة الحدس و التشبيه والقياس الفاسد.

الكتابة الشكلية تنقي هذه الأخطاء إذا احترمت لأنها لا تسمح بكتابة الحدس و لا بناء براهين على الذوق و لذلك الأخطاء في الاستدلال تنتج عادة إما من عدم احترام قواعد هذه الكتابة أو باستعمال ألفاظ لغوية بدل الترميزات.

مشكلتنا اليوم الكبرى أن الكثير لم يدرس نظرية المجموعات و لم يتعود على الكتابة الشكلية إما لضيق الوقت أو لعدم وجودها في البرنامج.

الفوضى العارمة الموجودة اليوم في الاستدلال ليس من السهل اصلاحها لأنها لا تمس فقط التلاميذ بل تعدت للمشتغلين بالرياضيات.

دورنا كرياضياتيين هو القيام بما قامت به المجموعة بورباكي و هو تعليم الناس بناء الرياضيات على أسس متينة و تعويد المشتغلين بها على استعمال هذه الأسس المتعارف عليها مند قرن من الزمن و التخلص من البراهين الحدسية التي تفتقد للدقة و تنتج عنها أخطاء رياضية فادحة.

رابط الملف:

https://drive.google.com/file/d/1AJv8_n3InOo2MW4f_7VgiPac51MOb0X2/view?usp=sharing

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

THÉORIE DES ENSEMBLES

لنضبط الرياضيات معا :

هل π معين أو مجهول ؟

ما الفرق بين الكائن الرياضي والترميز للكائن الرياضي ؟

هل الرياضيات مجرد شكليات أم هي المفاهيم ذاتها ؟

الكلام في هذا الموضوع ليس بالسهل لذلك يحتاج تدرجا وتركيزا من الأبسط نحو الأكثر تعقيدا.

لذلك سأقسم المقال على الفقرات التالية:

بمثال للتفريق بين الكائن والترميز في الرياضيات.

مثال عن الفرق بين المفاهيم مع تكافؤ التعاريف

ما أثر فهم ماهية الكائنات الرياضية على الواقع

ثم أذكر بعض الخلافات في المفاهيم التي أصلها من تصور الرياضيات نفسها وما تؤول إليه.

وأخيرا سأبين بعض الأسباب التي جعلت المشتغلين بالرياضيات لا ينتبهون للكائنات الرياضية ويتمسكون بالكتابة الشكلية.

الفرق بين الترميز والكائن:

ما الفرق بين:

3 ، ثلاثة ، ٣ ، troid، three، .... drei

الجواب هي مسميات لعدد واحد وهو 3 لكن هل العدد يختلف من لغة لأخرى ؟

الجواب لا فالعدد 3 وحيد لكن لابد من التفريق بين العدد والترميز للعدد فالعدد 3 من حيث هو كائن في الرياضيات على طريقة صناعة نيومان للأعداد الطبيعية هو المجموعة

$\{\varnothing , \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

ككائن رياضي هو مجموعة ولو ذهبنا ل R سنجده متتالية كوشية والتي هي مجموعة كذلك.

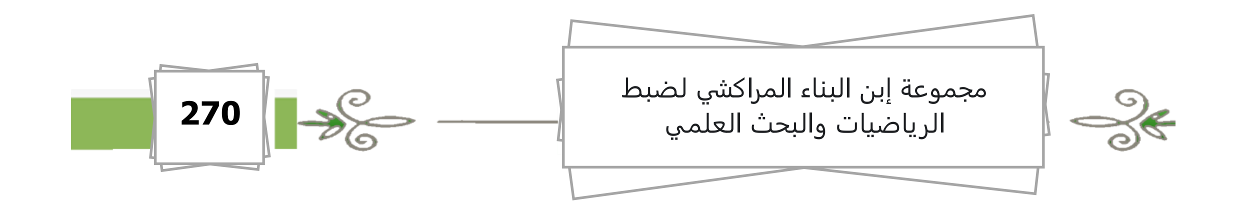
لكن نرمز له بـ 3 في الكتابة العشرية ولو ذهبنا للنظام الثنائي لكتبناه 11 .

هو كائن واحد لكن في الرياضيات هناك فرق بين الترميزات والكائن لذلك فهم طبيعة الكائنات لابد منه لفهم الرياضيات وهذا يتجاوز الكتابة الشكلية الذي اعتادها التلاميذ والطلبة.

لعل البعض يظن أن المسألة بسيطة ولا تستحق كل هذا الشرح، لكن لغياب فهم هذه المسألة هناك من يظن أن العدد π ليس لديه قيمة مضبوطة رغم أنه كائن رياضي معرف جيدا وقيمته لا تتغير لكنهم لا يفرقون بين العدد والكتابة العشرية للعدد.

سأعرض فيما يلي ما يبين أن المسألة لها آثار تتجاوز مثل هذا.

إن كانت التعاريف الرياضية محل اتفاق فإن المفاهيم نفسها قد تتعلق بالأذواق بل حتى البناء الرياضي ذاته.



فليس الجميع يتفق على المنطق الشكلي فهناك المنطق الحدسي مثلا بل هناك خلاف فلسفي حول الرياضيات نفسها هل هي موجودة أصالة ويكتشفها البشر أو أن البشر من يصنعها ؟

لا أريد الخوض في هذا الصراع لكن سأبين ما ينبني عليه.

مثال عن الفرق بين المفاهيم مع تكافؤ التعاريف:

قد تكون التعاريف متكافئة لكن مفاهيمها مختلفة فإن كان نيومان بنى مجموعة الأعداد الطبيعية على المجموعات بطريقة وضع مجموعة تمثل عناصرها العدد المطلوب فبيانو بناها بطريق مختلفة عبر المسلمات.

الفرق البنائي بين مجموعة نيومان ومجموعة بيانو هو فرق بين بناء الكائنات كائنا كائنا وبين التعريف الكلي بالمسلمات عند بيانو ففي مسلمات بيانو نستعمل المسلمات لتعريف كلي للمجموعة N .

ورغم أن كلا من البنائين متكافئ لكن بناء بيانو لا يصح إلا جملة أما بناء نيومان فيصح جزء جزء وهذا أقرب للواقع فمن الذي يجد الأعداد الضخمة في الواقع ؟

أمثلة من الواقع تبين فائدة النظر للكائنات النظرية:

لإدراك تأثير المفاهيم في الواقع لابد أن نضرب مثلا حسيا وسيكون بنظرية النسبية العامة لأينشتاين.

عندما وضع أينشتاين نظريته النسبية العامة والتي فيها الفضاء الزمكاني يتأثر بالكتلة فيتشوه محدثا الجاذبية على عكس نظرية نيوتن والتي تعتمد فضاء غاليليه الذي لا يتغير بالحوادث تساءل:

هل الفضاء في النظرية النسبية هو مجرد إطار حسابي أو هو فعلا كائن موجود في الواقع ؟

فقام بتصور كونه كائنا فاستنتج من حساباته أن الفضاء الزمكاني يمكن لموجات الجاذبية التموج فيه عندما تسير الكتلة فيه على قبيل نظيره الحقل الكهرومغناطيسي عندما يسير خلاله الإلكترون.

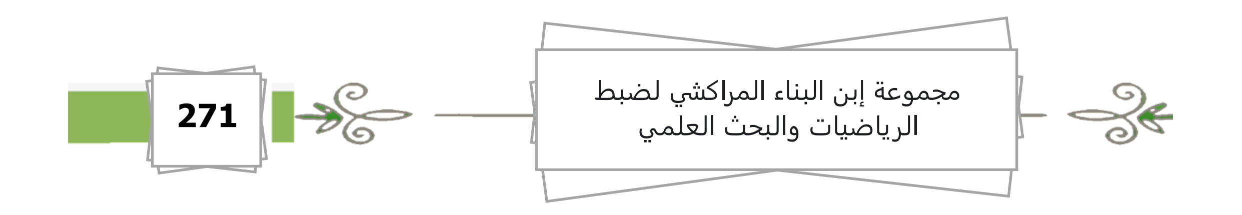
بقيت هذه الحسابات مجرد صرح رياضي إلى سنة 2015 حيث قيست لأول مرة موجات الجاذبية والتي تسبب فيها إلتحام ثقبين أسودين من ثلاث عشر مليار سنة ضوئية.

فثبت علميا أن الفضاء الزمكاني ليس مجرد إطار حسابي للنظرية النسبية لكنه هو ذاته كائن موجود في الواقع.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Onde_gravitationnelle

نفس المشكل طرح عندما وجد أحد الجنود في الحرب العالمية الأولى حلولا لمعادلة النسبية تمثل الثقوب السوداء فتساءل العلماء هل هي مجرد حلول رياضية أو لها وجود فعلي فكان الجواب لها وجود فعلي من مراقبتها في الكون.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Historique_des_trous_noirs



والسؤال يطرح كذلك اليوم بعد إعادة صياغة معادلة النسبية العامة من طرف الفيزيائي Abhay Ashtekar سنة 1988 التي أظهرت مفهوم تكميم الجاذبية فوضع بداية ما يسمى اليوم بنظرية الجاذبية الكمية بالحلقات فهل هذه مجرد نظرية حسابية أو للكون الزمكاني وجود من تركيب ذرات كونية ؟ يجيبنا على هذا المستقبل فالمعادلات رياضيا متكافئة لكن إعادة الصياغة غيرت مفاهيمها.

وكذلك كان الأمر مع بلانك عندما أظهر الكانتا من صياغة معادلاته والتي سميت لاحقا بالفوتون.

فمسألة فهم الكائنات ليست مجرد هواية معرفية بل هي لب موضوع العلوم.

أمثلة من الرياضيات وسبب خلاف المفاهيم فيها:

لكن اين نجد هذا في الرياضيات ؟

سأعطي مثالا على ذلك من تعريف الدالة.

فالدالة لها طرق تعريف مختلفة لكن المشهور أننا نعرفها بعلاقة ثنائية من مجموعة بدأ لمجموعة وصول تحقق خاصية لكل سابقة صورة على الأكثر.

ونكتب $f : A \to B$ والبعض يرمز لها بالثلاثية (A,B,f)

ولو رجعنا لتعريف العلاقة الثنائية سنجدها تعرف بـ:

علاقة الثنائية من A نحو B معرفة بمجموعة جزئية G من الجداء الديكارتي $A\times B$

لكن هنا يظهر المشكل ما معنى معرفة بـ ؟ هذا إن لم يكتب البعض لفظ تربط ؟ لكن ما معنى رابط فكل هذ ألفاظ لغوية لابد أن تترجم رياضيا.

فلكي يكون التعريف مضبوطا لابد أن ينطق من نظرية المجموعات ZFC ويستعمل المنطق أي في الرياضيات نتعامل مع مجموعات وقضايا فلا يمكن لشيء أن يكون موجودا إلا بالتعبير عنه بمجموعة أو قضية أما مجرد ترميز (A,B,f)

فلا يكفي إن لم نعطه المعنى الرياضي المعرف به.

هنا نجد طرقا تختلف لتعريف الدالة أو التطبيق أو العلاقة منها:

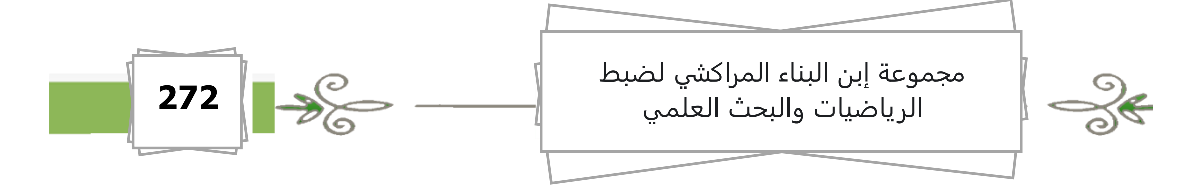
طريقة المجموعات أي العلاقة هي نفسها مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي فعلى هذا التعريف دالة الجذر التربيعي المعرفة من R نحو R هي نفسها دالة الجذر التربيعي المعرفة من R^+ نحو R^+ .

لاحظ أن الذي يتمسك بالترميز ولا ينظر للكائن سيجد صعوبة في تبرير هذه المساواة إذ على الترميز لدينا $(R,R,\sqrt{})$ و $(R^+,R^+,\sqrt{})$

فمن ناحية الترميزات هناك اختلاف لكنهما دالة واحدة وهنا تظهر أهمية التفريق بين الترميزات والكائنات.

الطريقة الثانية استعمال القضايا وهذه هي الطريقة التي استعملها تيرانس تاو في كتابه فعرف العلاقة بقضية بين A و B ترفق بالثنائيات (x,y) صحيح أو خطأ

وعليه الدالة معرفة بالقضية صحيحة من أجل x و y مع الشروط المعروفة من أن y وحيد.



وبالمناسبة في كتابه هذا التعريف يعطيه للدالة فيجعله كتعريف التطبيق أن لكل سابقة صورة وحيدة هذا جواب لمن يقول بالتفريق بين التطبيق والدالة ويخطئ الطرف الآخر.

تعريف الدالة بالجداء الديكارتي وتعريفها بالقضايا متكافئ رياضيا فكل واحد منهما يستلزم الآخر لكن من حيث المفهوم هما مختلفان ولفهم ذلك سأضرب مثالا.

إذا أعتبرنا أرضا بها ذهب وأردنا تعريف الدالة التي تعطينا لكل موقع من الأرض كثافة الذهب فيها:

فعلى تعريف الدالة بالمجموعات وجود كمية من الذهب في كل موقع من الأرض هو عين الدالة أي أنه فلسفيا نعتبر الرياضيات موجودة أصالة ونحن عندما نقيس ذلك لنحسب الدالة نكتشفها.

لكن على تعريف الدالة بالقضية السابقة الوصف فنحن نقول أن قياساتنا لكمية الذهب عند كل نقطة هي الدالة وهذا يوافق مذهب من يذهب إلى أن الرياضيات صناعة بشرية.

أي النظرة الأولى مجردة لا تدخل النظرة البشرية في المسألة أما الثانية فترى أنا البشر من يعطي مفهوم الدالة.

وكمثال آخر كمية الحركة هل هو مفهوم بشري أم شيء موجود في كل متحرك .... لا تتعجل بالتفكير إنما أضف لها علاقتها بالطاقة ثم فكر...

وإن لم يتضح الأمر فكر في هذا : هل الطاقة الحركية مجرد دالة رياضية وضعها البشر أم أنها طاقة موجودة في الواقع ؟ هي موجودة في الواقع بل تتحول لكتلة حسب معادلة أينشتاين $E = m \times c^2$

بل هذا ما يقوم به الفيزيائيون في المسرعات إذ يعطون للجزيئات سرعات كبيرة وعندما تصطدم تتحول الطاقة الحركية لجزيئات جديدة....

لا أريد الخوض في أي التعريفين هو أفضل للدالة فالتعاريف السابقة الذكر متكافئة رياضيا لكن كما ذكرت في أول المنشور سأبين مشاكل ذلك في الرياضيات.

المشكلة في القضايا الرياضية هو تعريفها فعند تعريف القضية نستعمل جملة:

القضية هي كل جملة أو صيغة يمكن أن نحكم عليها بالصحة أو الخطأ.

وهناك من يقول يمكنها أن تكون صحيحة أو خاطئة.

وهناك من يقول تحتمل الصحة والخطأ.

وهناك من يقول يمكنها أن تقبل برهانا على الصحة أو الخطا.....

وكل هذه التعاريف مشكلة رياضيا إذ هي تعني أنه لا يمكننا أن نعتبر قضية قضية إلا بأحد **أمرين:**

الأول أنه يمكننا نحن البشر أن نحكم عليها بالصحة أو الخطأ (وهذا لا يعطيها قطعا صفة الصحة أو الخطأ ما لم تبرهن) لكن البشر يختلفون والرياضيات لا تقبل الذوق البشري فأي من البشر سيحكم ؟

الثاني : يمكنها أن تقبل برهانا بالصحة أو الخطأ ... وهذا مشكل كذلك من عدة نواحي فهذا يعني أننا لا نعرف أن القضية قضية إلا بعد ان تبرهن على صحتها أو خطئها.



وكتنبيه أن هناك مبرهنة تسمى بمبرهنة لوب تفيد أن إمكانية برهنة قضية تعود لبرهنتها وهي صياغة مختلفة لمبرهنة غودل.

https://fr.m.wikipedia.org/…/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_L%C3…

المشكل الثاني أن هناك قضايا غير قابلة للتقرير فهل نعتبرها قضايا مع استحالة برهنة صحتها من خطئها ؟ وهذا ميدان طويل له مختصوه لكن أحببت هنا أن ألفت نظر القارئ إلى مشكلة القضايا وأنه متى عرفنا الدالة بقضية فكيف سنبرهن وجود مجموعة دوال على مجموعة نحو نفسها دون أن نبرهن على وجود القضايا التي تعرفها ؟

ذلك غير ممكن إلا باللجوء إلى مجموعة مجموعات أجزاء مجموعة الجداء الديكارتي فكل واحدة منها نعرف منها قضية بوجود x مع y في ثنائية و منها نستخلص وجود مجموعة الدوال.

إن تتبعتم جيدا فهمتم أنه لا مفر من المرور بالجداء الديكارتي.

لكن لماذا يصر البعض على رفض الدالة كمجموعة ويريدون مفهوما زائدا ؟

سبب ذلك الحدس فهم يرون أن هناك شيء زائد على x و صورته y يربط بينهما يريدون اظهار الرابط لكن لو تأملنا جيدا مجرد كتابة ثنائية من الشكل (x,y) يجعلها تختلف عن {x,y} برابط بينهما فالرابط قد عرفناه بتكوين الثنائية لكنه مجرد جدا.

ما الأسباب التي جعلت المشتغلين بالرياضيات لا ينتبهون للكائنات الرياضية ويتمسكون بالكتابة الشكلية ؟

الأسباب تاريخية ومنهجية أما تاريخيا فيمكن اعتبار لمجموعة بورباكي دورا فيما حدث.

فبعد أزمة الأساسيات في بداية القرن العشرين، في فترة الثلاثينيات كانت الرياضيات التدريسية ضعيفة بعيدة عن الضبط الرياضي الذي أدخله هلبرت ومن سار على نهجه.

كما أن اكتشافات نهاية القرن التاسع عشر لم تكن تدرس.

فقامت مجموعة بورباكي بنشر رياضيات النصف الثاني من القرن التاسع عشر وإعادة بنائها على نظرية المجموعات.

فساهموا في ضبط الرياضيات بل صنعوا رياضيات القرن العشرين بحيث لا يوجد باحث إلا وتأثر بهم.

تأثير بورباكي وصل لأوجه في الستينيات بحيث دفع إلى موجة إصلاح رياضيات في التعليم ما قبل الجامعي تحت مسمى الرياضيات الحديثة .

فأدخل التجريد بشكل مجحف كادت معه تختفي هندسة إقليدس وكانت عبارة ديودني الشهيرة وهو أحد أعمدة مجموعة بورباكي : ليسقط إقليدس.

تلقت مجموعة بورباكي انتقادات عديدة خاصة من رواد المدرسة الحدسية وممن انتقد طريقتهم كارل سيجل بعبارته الشهيرة : ليس بتكرار هوم هوم يمكننا صناعة نظريات جديدة ذات أهمية .مشيرا بذلك لصلاة البوذيين للوصول للمعرفة.



ذلك أنه إن كانت الكتابة الشكلية الحديثة للرياضيات قوية من حيث ضبط الرياضيات وبرهنة المبرهنات فإنها في ذاتها لا تصنع مفاهيم جديدة بل تخفي المفاهيم القديمة.

أما السبب الثاني فهو منهجي :

ففي التعليم الثانوي تعتمد الرياضيات على الحدس وذلك مطلوب حتى يفهم التلاميذ لكن عند مرورهم للجامعة ومع نزع المنطق ونظرية المجموعات من دراستهم يصطدمون بفجوة عميقة إذ لا يعاد صياغة المفاهيم لهم على أصولها فيتمسكون بالشكليات أكثر منها بالمفاهيم بل حتى التعاريف لا يعرجون عليها....

وليسأل كل قارئ نفسه هل درس تعاريف وبراهين كل الكائنات المألوفة التي يستعملها ؟

فمن درس منكم كيفية صناعة المجموعات العددية من N إلى R ؟

ومن منكم درس كيفية بناء الجداء الديكارتي ؟

بل من منكم درس تعريف الدالة ولا يقول هي علاقة ثم يسكت بل من درس ما هو تعريف علاقة ؟ ولا يقول هي رابط فكل هذه ألفاظ لغوية وحتى على الكتابة الشكلية إن لم يبنها انطلاقا من نظرية المجموعات ZFC فهو لم يعرفها.

بل من منكم درس نظرية المجموعات ZFC ؟

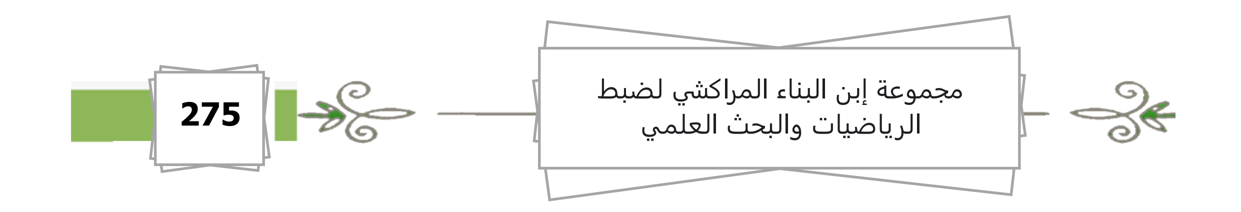
لا يلام أحد في هذه المسألة فالمسألة عامة مع برنامج مملوء بالمفاهيم والتطرق لكل مفهوم بتعريفاته وتاريخ تطوره مسألة تحتاج لسنوات وسنوات الدراسة لا تتسع لذلك لكنه عمل فردي يهمله كل منا لمشاغل الدنيا.

ليس الهدف من هذا المقال الخوض في الصراعات حول المفاهيم لكن الهدف منه لفت الانتباه الى مسألة مهمة أن الرياضيات ليست مجرد شكليات إنما هي المفاهيم ذاتها أما الكتابة فمجرد تدوين وأن التمسك بالشكليات دون العودة للمفاهيم وصناعة الكائنات هو وأد للرياضيات.

جاء في منشورات بورباكي :

فكل رياضي يعلم أن البرهنة ليست في الحقيقة مفهومة ما دمنا نتقيد بمجرد التأكد من صحة مراحل الاستنتاجات التي نراها خطوة خطوة، بدون التصور الواضح للأفكار التي قادتنا لبناء هذه السلسلة من الاستنتاجات دون غيرها. اه

tout mathématicien sait d'ailleurs qu'une démonstration n'est pas véritablement "comprise" tant qu'on s'est borné à vérifier pas à pas la correction des déductions qui y
figurent, sans essayer de concevoir clairement les idées qui ont conduit à bâtir cette chaîne de déductions de préférence à tout autre.
(Bourbaki 1948, p.37 note1)

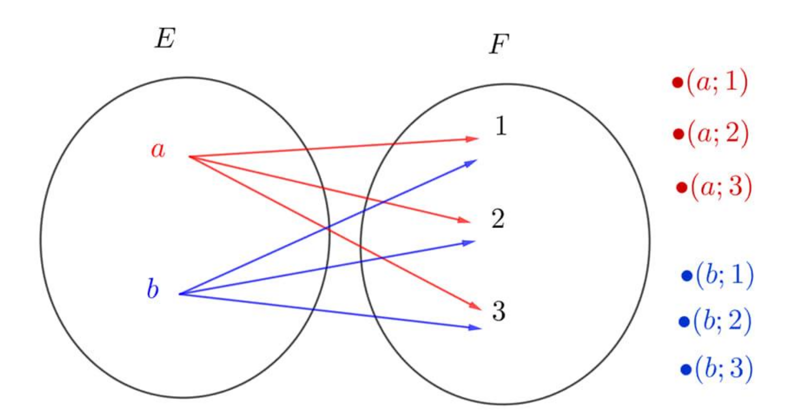


وهذا لا يعني إهمال الشكليات فهي تساعد كذلك على تنقيح الصحيح من الخطأ عند الكتابة لكن المسألة مسألة اتزان ولكل جانب دوره.

لعل هذا الفضاء الأزرق يسمح لنا بتبادل الأفكار حول طرق فهم وبناء الرياضيات وتاريخها ويساهم في صناعة جيل جديد يهتم بالمضمون كما يهتم بالشكل.

للفائدة : الدالة علاقة ثنائية والعلاقة الثنائية مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي.

ينظر مقدمة كتاب:



Denis Bouyssou

باحث جامعي من جامعة باريس

CNRS –LAMSADE

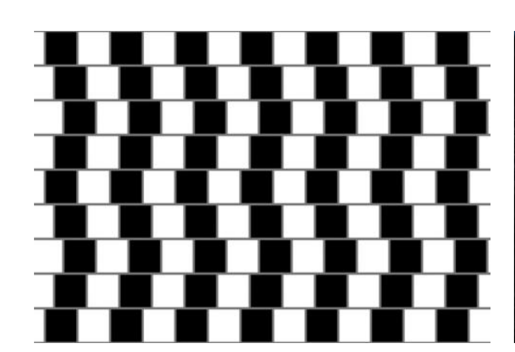
و

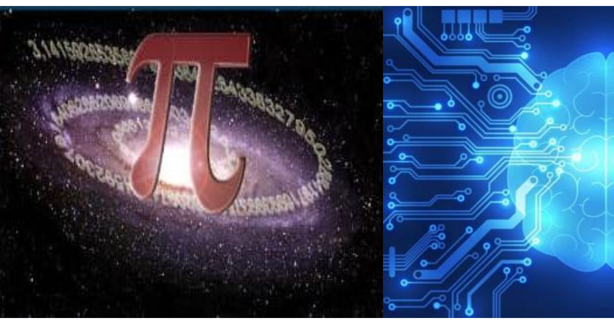
Philippe Vincke

باحث من بروكسل

Université Libre de Bruxelles

http://www.lamsade.dauphine.fr/~bouyssou/hermes.pdf





2. Applications.

Soient E et F deux ensembles. On appelle **application** de E dans F un triplet (E, F, f) où f est une partie de $E \times F$ et qui vérifie les deux propriétés suivantes :

(1) $(\forall x \in E)\,(\exists y \in F)\ (x, y) \in f$,

(2) $(\forall x \in E)\,(\forall y \in F)\,(\forall z \in F)\,((x, y) \in f \; et \; (x, z) \in f) \Rightarrow y = z$,

autrement dit, pour tout $x \in E$ il existe un et un seul $y \in F$ tel que $(x, y) \in f$. On note de façon plus habituelle $y = f(x)$ au lieu de $(x, y) \in f$. Voici un peu de terminologie : E est l'ensemble de départ ou de définition de f, F est l'espace d'arrivée, $y = f(x)$ est l'image de x par f. Le terme de fonction est plutôt réservé aux applications à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une autre notation souvent utilisée est

$$f : E \to F.$$

Fonction

Une **fonction** $f : E \longrightarrow F$ (de E dans F) est définie par un sous-ensemble de $G_f \subseteq E \times F$ tel que pour tout $x \in E$, il existe au plus un $y \in F$ tel que $(x, y) \in G_f$, on note y=f(x).

Une **relation binaire** R d'un ensemble E vers un ensemble F est définie par une partie G de $E \times F$.

Si $(x, y) \in G$, on dit que x est en relation avec y et l'on note « $x\ R\ y$ » (notation infixe), « $R(x, y)$ », « $R\ x\ y$ » (notations préfixes).

On remarquera qu'il est nécessaire, pour une relation binaire, de préciser l'ensemble E (appelé **ensemble de départ**[1]), l'ensemble F (appelé **ensemble d'arrivée**[1]) et la partie G de $E \times F$ appelée le **graphe**[1] de la relation.

Quand une relation binaire est définie d'un ensemble E vers lui-même (autrement dit $E = F$ dans la définition précédente, donc définie par une partie G de E^2), on l'appelle aussi **relation interne** sur E, ou simplement relation sur E.

Definition 3.3.1 (Functions). Let X, Y be sets, and let $P(x, y)$ be a property pertaining to an object $x \in X$ and an object $y \in Y$, such that for every $x \in X$, there is exactly one $y \in Y$ for which $P(x, y)$ is true (this is sometimes known as the *vertical line test*). Then we define the *function* $f : X \to Y$ *defined by* P *on the domain* X *and range* Y to be the object which, given any input $x \in X$, assigns an output $f(x) \in Y$, defined to be the unique object $f(x)$ for which $P(x, f(x))$ is true. Thus, for any $x \in X$ and $y \in Y$,

$$y = f(x) \iff P(x, y) \text{ is true.}$$

Functions are also referred to as *maps* or *transformations*, depending on the context. They are also sometimes called *morphisms*, although to be more precise, a morphism refers to a more general class of object, which may or may not correspond to actual functions, depending on the context.

2 Relations binaires

2.1 Définitions

3

Une relation binaire T dans un ensemble A est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times A$, c'est-à-dire un ensemble de couples (a, b) d'éléments de

2

A. Si le couple (a, b) appartient à l'ensemble T, nous noterons fréquemment $a\ T\ b$ au lieu de $(a, b) \in T$. Dans le cas contraire, nous écrirons $(a, b) \notin T$ ou $a\ \neg T\ b$. Dans tout ce qui suit, on supposera, sauf mention contraire, que A est *fini*.

Remarque 1
Puisque les relations binaires sont des ensembles, on peut leur appliquer les opérations habituelles de la théorie des ensembles. Ainsi, étant donné deux relations T_1 et T_2 dans A, on notera:

$$T_1 \subset T_2 \text{ ssi } a\ T_1\ b \Rightarrow a\ T_2\ b, \forall a, b \in A,$$
$$a(T_1 \cup T_2)b \text{ ssi } a\ T_1\ b \text{ et/ou } a\ T_2\ b,$$
$$a(T_1 \cap T_2)b \text{ ssi } a\ T_1\ b \text{ et } a\ T_2\ b.$$

Enfin, le *produit* $T_1 \cdot T_2$ sera défini par :

$$a\ T_1 \cdot T_2\ b \text{ ssi } \exists c \in A : a\ T_1\ c \text{ et } c\ T_2\ b.$$

On notera T^2 la relation $T \cdot T$, c'est-à-dire le produit de la relation T avec elle même. •

Étant donné une relation binaire T dans A on définit :

– sa relation inverse T^- telle que :

$$a\ T^-\ b \text{ ssi } b\ T\ a,$$

– sa relation complémentaire T^c telle que :



$$a\ T^c\ b \text{ ssi } a\ \neg T\ b,$$

بين مفهوم ليبينز في المساواة ونظرية المجموعات ZFC : نسخة ثانية

مفهوم ليبينز للتساوي يقول أن كائنين رياضيين متساويين إذا وفقط إذا تساوت خواصهما أي

$a = b \Leftrightarrow$

أنه مهما كانت القضية P فإن

$P(a) \Leftrightarrow P(b)$

https://fr.m.wikipedia.org/.../%C3%89galit%C3%A9_(math%C3...

وهذا يعني أن الكائن الرياضي هو خواصه فإذا تكافأت الخواص كان نفس الكائن رياضيا.

خاصية الكائن هي قضية صحيحة متعلقة به.

لكن كيف يمكن أن نحيط بجميع خواص كائن رياضي ؟

في نظرية ZFC الكائنات تبنى ولا يوجد كائن رياضي بظهر من فراغ فلا نحيط بجميع خواصه.

بناء الكائنات يتم عبر مسلمات ZFC وكلها مجموعات تنطلق من المجموعة الخالية.

فالعدد 1 مثلا في طريقة نيومان لصناعة مجموعة الأعداد الطبيعية N هو المجموعة $\{\emptyset\}$

أما العدد 2 فهو المجموعة $\{\emptyset , \{\emptyset\}\}$

https://fr.m.wikipedia.org/.../Construction_des_entiers...

فنستعمل مجموعات عدد عناصرها يوافق العدد المراد تعريفه للتعبير عنه.

وحتى دالة f مثلا هي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي لمجموع البدء في مجموعة الوصول عناصرها

$(x , f(x))$

وحتى علاقة الترتيب هي مجموعة فعندما تضع $1< 2$ فأنت تضع ثنائية $(1,2)$

إذا أردت تعريف كائن في الرياضيات يكفي تعريف خواصه كزمرة مثلا فهي معرفة بخواصها.

وكالدالة الأسية مثلا فنحن نعرفها بخواصها كأنها الدالة التي تساوي مشتقتها وتأخذ القيمة 1 عند الصفر فهاتان قضيتان تعرفان الأسية.

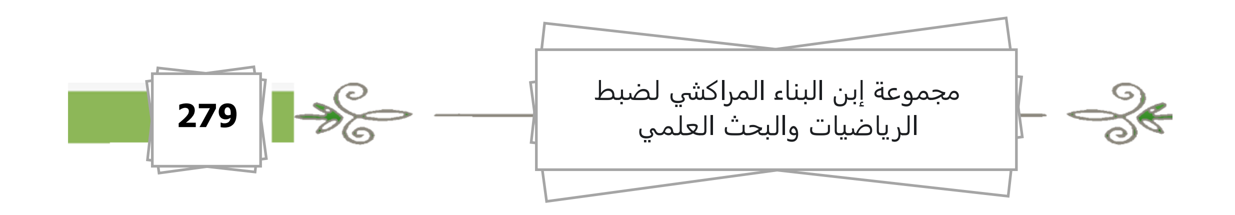
لاستعمال مفهوم ليبينز في المساواة لابد أن نحصر الخواص التي نريدها فنعطيها وجودا بالتسليم.

لذلك خارج المجموعات نختار ممثلا عن الخاصية أو الخواص فمثلا R لها بناءات متعددة كطريقة المقاطع لديديكاند وطريقة المتتاليات الكوشية وطريقة التطبيقات الصحيحة الشبه هولومورفية، لكن ما الذي جعلنا نقول أنها نفس R ؟ رغم أن العناصر تختلف من حيث الأصل ؟

ففي مقاطع ديدكاند العناصر ثنائيات مجموعات جزئية من Q .

https://fr.m.wikipedia.org/.../Construction_des_nombres_r...

أما في طريقة المتتاليات الكوشية فالعناصر أصناف تكافؤ متتاليات.



فنقول أنها نفس R لأننا أخذنا من البناء البنية الجبرية فقط فهذه الخواص هي ما سميناها R فلا فرق بين صناعة R بمتتالية كوشي وبين صناعة R بمقاطع ديديكاند رغم أن مقاطع ديديكان ليست بمتتالية كوشية لكن الذي يهمنا هي خواص كل منهما داخل البناء الجبري فهذا القدر المشترك من الخواص ما سميناه R .

ولذلك في البني الجبرية متى وجدنا تماثلا أو ما يسمى بالمورفيزم التقابلي حكمنا بأنها نفس البنية.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Morphisme

وهذا ما يجعلنا نكتب $R \subset C$

رغم أن مجموعة الأعداد المركبة معرفة على R^2 لكن وجدنا تماثلا بين جزء من C و R فحكمنا على الحقل الحقيقي باحتوائه في الحقل العقدي.

مفهوم ليبينز نجده في كل تعاريف المساواة فلذلك في نظرية المجموعات سلمنا بتعريف تساوي مجموعتين بأنه إذا تساوت عناصرهما، فكأننا نقول لا يهم كيفية بناء المجموعة فمتى تساوت العناصر فهي واحدة.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Ensemble

ولذلك كما في الصورة مسلمة التمديد فيها استلزام نحو تعريف ليبينز أما الاستلزام العكسي فهو ظاهر.

فقد يتبادر للذهن أن هذا شيء بديهي لكن لا سبيل لتعريف تساوي مجموعتين إلا التسليم بأن الخصائص الوحيدة التي تهمنا هي عناصرهما وهذا القدر ما نسميه مجموعة.

ولهذا السبب المجموعة الخالية وحيدة.

أما إذا كنا داخل مجموعة فالأمر أسهل فيمكننا المرور عبر أصناف التكافؤ لإعطاء وجود للخصائص كمجموعات فكل صنف تكافؤ يصبح عنصرا بدوره – وإن كان مجموعة عناصر – لأننا جردناها من خواصها الأخرى ولم نحتفظ إلا بالقدر المشترك الذي أعطيناه وجودا ككائن عبر مجموعة..

أما خارج المجموعات فنختار ممثلا لأنه إذا أردنا استعمال أصناف التكافؤ نصطدم بمتناقضة راسل فكما أن مجموعة جميع المجموعات غير موجودة فكذلك مجموعة جميع المجموعات ذات عنصر وحيد مثلا غير موجودة.

وهذا ما يفسر بناء N نفسها باختيار ممثل عن كل عدد كما تقدم بيانه.

على عكس بناء Z و Q و R فيمكننا الانطلاق من أصناف التكافؤ فـ Z تعرف بأصناف تكافؤ من N^2 و Q من أصناف تكافؤ من $Z \times Z^*$

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Corps_des_fractions

إذن تعريف ليبينز للمرور به لابد من حصر الخواص فالكائن الرياضي هو خواصه.

إذا تأملت ما سبق فهمت أن المساواة مفهوم عام لا يتعلق بالجبر فقط ولذلك نجده في مسلمات ZFC في تعريف مساواة مجموعتين.

لو تأملنا للواقع فالبشر يستعملون نفس المفهوم إذ هم يساوون بين الأشياء حسب الخصائص.



ألسنا نساوي بين الورقة النقدية بقيمتها مع قيمة مجموع قطع نقدية وإن كانت من حيث المادة مختلفة ذلك أن مهمة النقود قيمتها لا شكلها.

فالمساواة في الرياضيات لا تختلف عن نظيرتها في الواقع.

$$\forall A\ \forall B\ [\ \forall x\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B\ ].$$

Pour tous x et y, $(x = y)$ si et seulement si (pour tout prédicat P, $P(x)$ ssi $P(y)$)





Égalité de deux ensembles

En mathématiques – et pas seulement en mathématiques d'ailleurs –, on considère que deux objets sont égaux quand ils ont les mêmes propriétés, que l'on ne peut donc les distinguer l'un de l'autre – c'est la définition de l'égalité de Leibniz. Dire que deux objets sont égaux, c'est-à-dire que deux expressions désignent en fait le même objet, c'est donc donner une information sur ce que sont ces objets. En théorie des ensembles on décide qu'un ensemble est complètement caractérisé par ses éléments, son *extension*, alors qu'il peut avoir plusieurs définitions. Par exemple, il n'y a pas lieu de distinguer l'ensemble des entiers différents d'eux-mêmes et l'ensemble des entiers supérieurs à tous les nombres premiers : ces deux ensembles sont tous les deux vides, donc égaux – ils ont bien les mêmes éléments –, même s'ils ont des définitions différentes, et sont vides pour des raisons très différentes.

La logique des prédicats contient des axiomes standards pour les égalités qui formalisent les lois de Leibniz, énoncées par le philosophe Leibniz au XVII[e] siècle. L'idée de Leibniz était que deux choses sont identiques si et seulement si (ssi) elles ont les mêmes propriétés. En formalisant

> Pour tous x et y, $(x = y)$ si et seulement si (pour tout prédicat P, $P(x)$ ssi $P(y)$)

Cependant, dans la logique de premier ordre, on ne peut pas quantifier les prédicats. Nous avons donc besoin d'un schéma d'axiomes :

> Pour tous x et y, si $x = y$ alors $P(x)$ ssi $P(y)$.

Cette série d'axiomes valable pour tout prédicat P à une variable, ne prend en compte qu'un seul sens de l'implication: si $x = y$ alors x et y ont les mêmes propriétés.

Pour construire la réciproque, il suffit d'ajouter : pour tout x, $x = x$

Ainsi, si x et y ont les mêmes propriétés, pour le prédicat P défini par $P(z)$ ssi $x = z$, nous avons $P(x)$ ssi $P(y)$. Or $P(x)$ est réalisé, donc $P(y)$ est vrai : $x = y$

الكائن في الرياضيات هو خصائصه

هذا نمر وهذا نمر لكن كيف يكون كلاهما نمر وهما مختلفان ؟

لماذا نضع في حقل الأعداد المركبة $(10,0) = 10$ والأول في R والثاني في R^2 ؟

النمر اسم جنس يطلق على جميع أفراده وهو يجمع مواصفات معينة إذا توفرت في كائن سمي نمرا.

فلفظ نمر تجريد لخصائص معينة لذلك نطلق عليه اسم جنس ونقول عنه لفظ مطلق ومن قبيله الشجرة والإنسان والجبل و ....

الرياضيات تعمل بنفس الطريقة فهي تطلق مسميات على خصائص مجردة تصنع منها كائنا، من قبيل ذلك ما نجده في البني الجبرية فمتى وجد تماثل يحفظ الخصائص الجبرية فتكون البنية نفسها كيفما كان أصل صناعتها.

لو أخذنا مجموعة الأعداد الحقيقية R مثلا فعندها طرق صناعة مختلفة فيمكن صناعتها من المتتاليات الناطقة الكوشية فيكون أصل العنصر الحقيقي هو صنف تكافؤ متتاليات كوشية.

ويمكن صناعتها كذلك من مقاطع دينيكاند فيكون أصل العنصر ثنائية مجموعات من الأعداد الناطقة.

ويمكن صناعتها من شبه تماثلات صحيحة.

كيفما كانت طريقة الصناعة فهي غير مهمة فمتى وجدنا تماثلا جبريا بين هذه الحقول فهو حقل واحد لأن مسمى الحقل الحقيقي يطلق على حقل ذو خصائص معينة.

ونفس الشيء يقال على مجموعة الأعداد المركبة فلو عوضنا i بـ $-i$ لوجدنا نفس الحقل.

ونقول عن R أنها محتواة في C لأنه يوجد تماثل جبري بين الحقل $(R, + , .)$ والحقل الجزئي من C $(R \times \{0\}, + , .)$

هندسيا نحن نقول هنا أن محور الفواصل يمثل الأعداد الحقيقية وهو مستقيم من المستوى الذي يمثل مجموعة الأعداد المركبة.

ففي الرياضيات نحن من نعطي تعريفا للمساواة فالمفهوم الأصلي للمساواة بين كائنين هو وجود نفس الخصائص لديهما فالكائن في الرياضيات هو خصائصه ونحن من نعين هذه الخصائص التي تصنع كائننا فمثلا عندما نقول مجموعة تساوي مجموعة فنحن نقصد أن لهما نفس العناصر ونكتب:

$$\forall A, \forall B [\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B]$$

فنحن من قررنا أن المجموعة هي عناصرها.

ولو نظرنا لمجموعة الأعداد الطبيعية لوجدنا أن لها طرق صناعة مختلفة لكن لا يهم ذلك ما دام لها نفس الخصائص فلا يهم أن نضع

$$1 = \{\varnothing\}$$

$$2 = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$$

$$3 = \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$$



أو أن نضع

$1 = \{\emptyset\}$

$2 = \{\{\emptyset\}\}$

$3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}$

فطريقة الصناعة مجرد طريقة نظر للكائن لكن المهم هو خصائصه.

ولذلك في الرياضيات كثيرا ما نستعمل أصناف التكافؤ لبناء كائن جديد يحقق خصائص معينة فمثلا مجموعة الأعداد الصحيحة نعرفها عن طريق أصناف تكافؤ على ثنائيات طبيعية تحقق

$(n,m) \sim (j,k) \Leftrightarrow n + k = j + m$

فتجاوزا لو كنا نعمل في Z هذا يعني $n - m = j - k$ أي أننا نقول

$(4 , 2) = (3 , 1) = (2, 0) = 2$

فالعدد الصحيح ممثل بثنائية لكننا عادة ننظر إليه مقارنة بالصفر فالعدد الموجب فوق الصفر والسالب تحت الصفر لكن المقارنة بالصفر مجرد وجهة نظر فيمكننا أن نقارن بالنسبة للواحد مثلا أو أي عدد آخر لنجد المساواة السابقة و التي تعني أن هذه العناصر تمثل نفس صنف التكافؤ بعلاقة التكافؤ السابقة الذكر.

وهذا نستعمله حتى في الواقع فلو طلبت من أحد رقم هاتفه سيقول مثلا

01 23 45 67 89

فإذا قلت له كيف يمكن أن أتصل بك من خارج البلد فسيقول

00 213 1 23 45 67 89

فيضيف الرقم الدولي فرقم هاتفه لم يتغير لكننا ننظر للرقم من ناحية مختلفة فالأولى من داخل البلد والثانية من خارجه.

وهكذا الرياضيات فهي تجرد المفاهيم لتنظر للخصائص لأن الكائن في الرياضيات هو مجموعة خصائص.



لنضبط الرياضيات معا , المساواة بين المجموعات

لماذا في نظرية المجموعات ZF في مسلمة التمديد

$$\forall A, \forall B [\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B]$$

لا نحتاج وضع الاستلزام المعاكس ؟

مسلمة التمديد تخبرنا أن المجموعة هي عناصرها فيكفي أن تكون للمجموعتين نفس العناصر لتكونا نفس المجموعة.

لكن في تعريف المسلمة لا نضع الاستلزام العكسي، أي

$$A = B \Rightarrow (\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

لفهم سبب ذلك لابد أن نعود لمفهوم المساواة في الرياضيات والمسمى بمفهوم لبينز.

تعرف المساواة في الرياضيات بين كائنين أن لهما نفس الخصائص أي عندما نضع $a = b$ فنحن نفرض أنه مهما كانت الخاصية P فإذا كانت محققة في a فهي محققة في b والعكس صحيح أي:

$$\forall P : P(a) \Leftrightarrow P(b)$$

وهذا يعني أن الكائن في الرياضيات هو خصائصه.

مفهوم المساواة عام في الرياضيات فإذا طبقناه على المجموعات كحالة خاصة سنجد أن قولنا المجموعة A تساوي المجموعة B

$A = B$ يعني $\forall P : P(A) \Leftrightarrow P(B)$ وكحالة خاصة يمكننا أخذ P كخاصية انتماء عنصر للمجموعة لنجد

$$A = B \Leftrightarrow (\forall P : P(A) \Leftrightarrow P(B))$$

$$\Rightarrow (\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

لذلك في مسلمات ZF لا نحتاج وضع الاستلزام العكسي في مسلمة التمديد وإنما نكتفي بـ

$$\forall A, \forall B [\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B]$$

أما الاستلزام العكسي فيستفاد من تعريف المساواة.

مسلمة التمديد تخصص المساواة بقضية الانتماء فقط أي إذا تحقق

$$\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

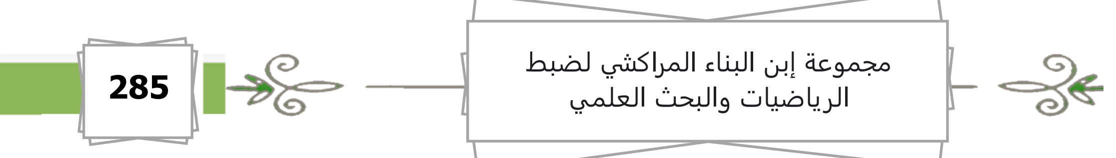
فنقول $A = B$ فهي تخبرنا أننا لا نحتاج النظر لخصائص أخرى كما هو في التعريف العام للمساواة

$$\forall P : P(A) \Leftrightarrow P(B)$$

ويمكننا أن نكتفي تسليما بالنظر للانتماء فقط حتى نقول بالمساواة بين مجموعتين.

لا يمكننا وضع تكافؤ في هذه المسلمة حتى وإن كان صحيحا رياضيا لسببين:

الأول أنه لا يمكننا تحت مسلمات ZF إعطاء معنى خاص للمساواة بين المجموعات بدون النظر للعناصر فإذا أردنا تعريفا خاصا للمساواة بين A و B كمجموعتين فسنجدنا نتكلم عن عناصر A هي عناصر B أي الاستلزام الآخر $\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B$



والسبب الثاني أن المفهوم العام للمساواة الذي يشترط تحقق نفس الخصائص هو تعريف سابق عن ZF فلا يمكننا إعادة وضعه كمسلمة في حالة خاصة بين المجموعات.

ولذلك يبقى الاستلزام

$$A = B \Rightarrow (\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

كحالة خاصة من تعريف المساواة.

أما الاستلزام العكسي $\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B$

كمسلمة ضمن مسلماتZF .



العد في العقل بين الحدس الواقعي والواقع الرياضياتي

أنا أراه لكن لا أصدقه .... جملة شهيرة لجورج كنتور في رسالته لصديقه ديدكاند، قالها متعجبا عندما استطاع صناعة تطبيق يقابل القطعة المستقيمة بالمربع و هنا لم يصدق عينيه كيف لسطح في بعدين أن يقابل قطعة في بعد واحد!!

كثير هي المسائل لا تتذوقها عقولنا لأننا لم نفكر فيها مليا بل لم تكن صناعتها عند الرياضياتيين بالشيء السهل.

من هذه المسائل مسألة قدرات المجموعات فنحن نقول أن لمجموعتين نفس القدرة إذا وجد بينهما تقابل.

ونعلم أن الأعداد الزوجية لها نفس قدرة الأعداد الطبيعية رغم أنها جزء منها فكيف يكون ذلك ؟

كيف للعقل أن يتقبل أن الجزء يساوي الكل ؟

كيف للعقل أن يتقبل أن الأعداد الطبيعية وجزء منها لهما نفس القدرة ؟

أليس لو عددنا الأعداد الزوجية من 1 إلى 100 وجدناها النصف أي 50 ؟

فكيف وصلنا للتساوي لما مررنا للمالانهاية ؟

لمعرفة ذلك لابد من النظر عميقا في المسلمات العقلية فنطرح السؤال التالي:

من أين لك أيها العقل أن الجزء أصغر من الكل ؟ فهل هذه مسألة عقلية أو نتيجة تجريبية ؟

في الحقيقة هي نتيجة تجريبية إذ تعود العقل في الواقع على أن الجزء أصغر من الكل.

ثم أخفت اللغة مسائل مهمة لابد من إظهارها هنا إذ الحقيقة في هذه الجملة أنه ليس الجزء أصغر من الكل إنما كمية الجزء أصغر من كمية الكل فعندما نقول كلغ من الدقيق أصغر من طن منه إنما نحن نقارن كميات.

فالمسألة مسألة قياس وهذا ما يحدث عندما نعد من 1 إلى 100 إنما نحن هنا نستعمل قياس العد.

لكن عندما نمر للمالانهاية فنحن لا ننظر للأعداد الزوجية عند مقابلتها بالطبيعية ككميات مقاسة إنما ننظر إليها كعناصر في مجموعات ومتى جردنا هذه العناصر من التسميات لم يبقى معنى لزوجي وفردي إنما هذه عمليات جبرية زائدة على المجموعة.

أي نحن نتعامل هنا مع مفهوم جديد غير مفهوم القياس ولذلك نجد أن مجموعة الأعداد الناطقة قابلة للعد رغم أنها كثيفة.

لكن المشكلة أنه في المجموعات المنتهية يتوافق قياس العد مع قدرة المجموعات بالتقابل لذلك لا يتنبه العقل إلى أنه يتعامل مع مفهومين مختلفين:

مفهوم القياس وفيه الجزء أصغر من الكل.

ومفهوم قدرة المجموعات وهو ليس بمفهوم كمي فالجزء قد يساوي الكل.



لقد تنبه بوريل ولوبيغ لهذه المسألة بعد اطلاعهم على أعمال كنتور التي قام بها في بداية السبعينات من القرن التاسع عشر 1874 ثم تبعتها أعمال بوريل ولوبيغ في نهاية نفس القرن 1894 – 1901.

فوضع لوبيغ مفهوم القياس والذي فيه لا حرج أن نقول أن طول المجال [0,1] أصغر من طول المجال [0,10] لكن كلا المجالين له نفس عدد العناصر.

والمفارقة هنا أن العقل لا يستهجن المقارنة بينهما فهو يري أن المجال الأول والثاني نفس الشي لأنهما قطعتان مستقيمتان يمكنه مقابلتهما عن طريق تغيير معيار الوحدة.

لكن لماذا يجد العقل صعوبة مع الأعداد الزوجية والطبيعية ؟

العقل يجد صعوبة مع الأعداد الطبيعية لأنه ينظر إليها عن طريق الترتيب فلا يستطيع أن ينفك تفكيره عن الترقيم المتتابع ولا يمكنه تصور هذه الأعداد إلا عن طريق التتابع 1، 2، 3 ، ...

أما المجال [0,1]

فيلحقه بالقطعة المستقيمة فلا يراها كأعداد مرتبة بل هي قطعة يمكنه تطويلها كما يطول العلكة لتوافق [0,10]

إذن الرياضيات نفسها لا تخالف العقل عندما تفرق بين القياس وقدرة المجموعات إنما المشكل في العقل البشري أنه تعود على النظر للأعداد بطريقة معينة فكان من الصعوبة عليه تجريد نظرته بنزع مفهوم العدد كعدد ليصبح كعنصر في مجموعة ومتى قارن الأعداد الزوجية مع الطبيعية من حيث الحدس الواقعي تعامل معها ككميات إلا أنها ليست بكميات ولا يمكنها أن تكون كذلك.

ففي مجموعة مجردة من البنى الجبرية لا يوجد معنى للترتيب ولا فرق بين 1 و مليار كلاهما عنصر إنما الفرق الذي يراه العقل إنما يراه لأنه لا ينظر ل 1 و مليار كعناصر بل ينظر إليها ككميات حسابية فيرى أن المليار كبير جدا و 1 صغير.

الذي نتعجب منه هو كيف استطاع هؤلاء العلماء ككنتور ولوبيغ وغيرهم رؤية هذه المفاهيم والتمييز بينها لتعميمها وكيف نحن اليوم لا نستطيع رؤيتها لأول وهلة كما رأوها ؟

بل كيف لا نتذوق الرياضيات كما تذوقوها ؟

إنما سبب ذلك هو تعودنا على مصطلحات ومسميات دون التفكير في مفاهيمها العميقة ...

إن الرياضيات حلوة عندما تدرس بتاريخها ومفاهيمها.





من المالانهاية الطبيعية نحو المالانهاية القوية : قوة المستمر

لقد طرحنا مؤخرا في المجموعة عدة أسئلة حول المالانهايات المجموعاتية حتى نحث المشاركين على التفكير وبناء تصور صحيح للمالانهاية.

أول هذه الأسئلة كان حول مصدر عدم انتهاء مجموعة الأعداد الطبيعية والتي لم ينجح الكثير من المشاركين في تصورها تصورا صحيحا ذلك لعدم إدراكهم للفرق بين الذوق العقلي والبناء الرياضي.

فالذوق العقلي يخبرنا أنه متى أمكننا إضافة واحد لأي عدد طبيعي فإن الاعداد الطبيعية غير منتهية إما بتكرار العملية أو إستنتاجا من عدم المحدودية.

إلا أن هذا الذوق أدخل مسلمتين أولهما : أنه سلم بإمكانية تكرار إضافة 1 لأي عدد طبيعي بشكل غير منته وهذا التسليم هو عينه التسليم بعدم إنتهاء الأعداد الطبيعية فكل ما قمنا به هنا هو مقابلة المنطق الخوارزمي بالأعداد الطبيعية عن طريق تكرار خوارزمية الجمع بشكل غير منته.

والتسليم الثاني قولنا أنه ما دمنا يمكننا إضافة واحد لأي عدد طبيعي فلا يوجد حد للأعداد الطبيعية فهي غير منتهية إلا أنه هنا أدخلنا مبدا الثالث المرفوع بمقابلة عدم المحدودية بعدم الإنتهاء وهذا نفسه يحتاج برهانا إذا سلمنا بمبدأ الثالث المرفوع.

فالمالانهاية الطبيعية تمتاز بكونها موافقة للمنطق الخوارزمي وهو منطق مقبول لعقولنا لذلك هي لا تعدو أن تكون تسليما بتكرار غير منته.

لكن لو تطرقنا لقوة المستمر كقدرة مجموعة الأعداد الحقيقية فالأمر يختلف، وفي هذا طرحنا مثالا في المجموعة بفندق وراء كل باب من أبوابه بابين إحداهما تفتح غرفة والأخرى تفتح على بابين بشكل غير منته والذي في النهاية وإن كان عدد أبواب الفندق قابلا للعد لأنه موافق للأعداد العشرية فإن سلسلة الأبواب نفسها غير قابلة للعد.

هذا ما يقابل المتتاليات الناطقة التي تصنع R .

فقوة R تصنع من تكرار الاختيار بشكل غير منته ومتوازي على عكس الأعداد الطبيعية التي تكرارها خطي متتابع.

قوة المستمر تظهر من عدم خطية التكرار وتصور وراء كل تكرار تكرار جديد بشكل غير منته.

هذا التكرار لا يقبله العقل البشري في دقائقه وإن كان يتصوره في مجمله فالعقل البشري لا يمكنه التفكير في شيئين في آن واحد إنما يرتب الإختيار واحدا وراء واحد.

أما R فتنتج من تصور إمكانية وجود خيارات متوازية متفرعة وهذا الذي يعطينا قوة المستمر:

2^INFINI

قد يقال هذا تصور لا يوافق الواقع ؟ والجواب بل هو لا يوافق تفكير العقل البشري لكنه موجود في الواقع فيما يسمى بميكانيك الكم وعليه ستبنى الحواسيب الكمية...



فرضية المستمر

فرضية المستمر هي سؤال طرحه كنتور بعد دراسته لقدرة المجموعات : هل توجد مجموعة قدرتها بين N و R فقدرة R نسميها قدرة المستمر.

أجابت على جزء من هذا السؤال أعمال غودل سنة 1938 بأن هذه الفرضية لا تتناقض مع ZFC .

ثم أتم الجواب جوزيف بول كوهين سنة 1963 بأن فرضية المستمر مستقلة تماما عن نظام ZFC .

يمكن تفسير ذلك بأن بناء المجموعات في ZFC يمر بطريقتين:

إما بالتركيب إنطلاقا من اتحاد مجموعات أحادية أو الجداء الديكارتي وهذه تعطينا عبر المسلمات مجموعة قابلة للعد.

إما عبر مجموعة أجزاء المجموعات وهذه تنقلنا من مجموعة ك N قدرتها قابلة للعد إلى مجموعة غير قابلة للعد قدرتها 2^N للتذكير قدرة R هي 2^N

فالطريقة الوحيدة للقفز من قدرة لأخرى هي المرور بـ مجموعة الأجزاء وهذا ما يفسر عدم استطاعة المسلمات إنشاء مجموعة قدرتها بين N و 2^N

فالمسلمات تعطي طريقة واحدة للتوسع وتسكت عن الباقي وهذا ما يفسر إستقلال فرضية المستمر عن ZFC .

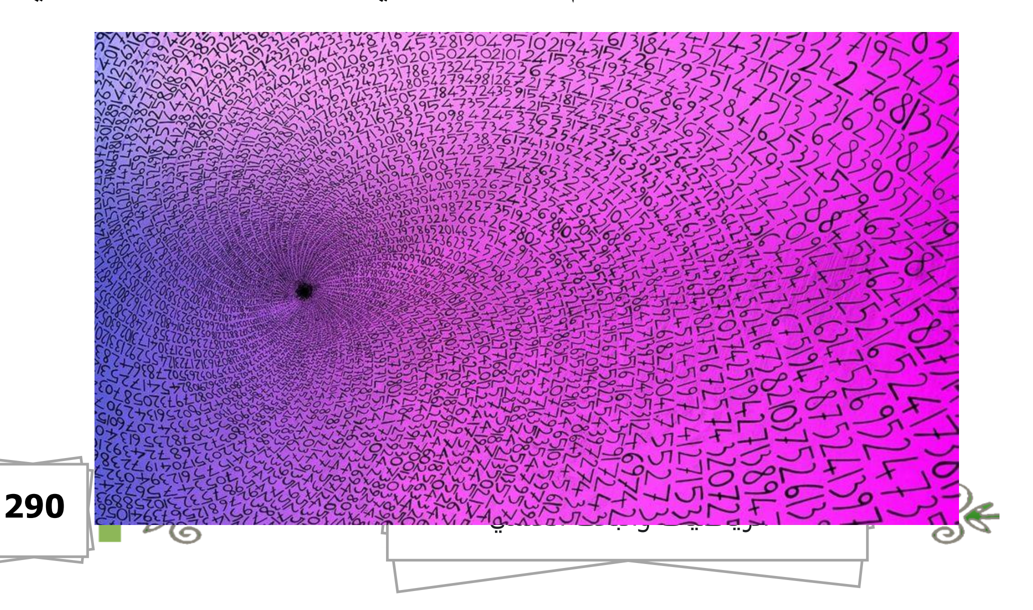
أما مسلمة الإختيار فلا تفيد شيئا هنا لأنها لا تنشئ قدرة جديدة إنما تحتار عناصر من مجموعة مجموعات فهي تعطي نفس قدرة المجموعة المطبقة عليها.

إذا تأملنا هذا فهمنا أن وجود أو عدم وجود مجموعات بين قدرة N و 2^N لا يضيف شيئا على مسلمات ZFC .

تعمم فرضية المستمر لما يسمى فرضية المستمر المعممة وهي هل توجد قدرات بين متتابعة مجموعات المجموعات الجزئية N , R , P(R) , P(P(R)) ....

والجواب نفسه أن هذه القضية مستقلة عن ZFC أي هي غير قابلة للتقرير في نظامنا المسلماتي المعتاد.

أعمال غودل ذهبت لأبعد من هذا فبين عبر ما يسمى بمبرهنة عدم الإكتمال لغودل أنه كل نظام مسلماتي خوارزمي أي يقبل تمثيل الاعداد الطبيعية هو نظام غير مكتمل أي فيه قضايا غير قابلة للتقرير.



انفصال فرضية المستمر عن نظرية المجموعات ZFC

نظرية المجموعات ZFC هي مجموعة من المسلمات التي وضعت نتيجة أزمة الأساسيات في بداية القرن العشرين والتي تهدف إلى بناء الرياضيات على أسس سليمة.

هذه المسلمات مكونة من مسلمات ZF وهي مسلمات زارميلو و فرانكل ويضاف إليها مسلمة الإختيار C أوAC .

للتذكير أزمة الأساسيات انطلقت من تناقض راسل الذي يقول هل مجموعة جميع المجموعات موجودة ؟ وهذه قضية تشكل مجموعة في تصور الرياضيات الساذج الذي يعطي وجودا لمجموعة انطلاقا من أي قضية.

إلا أنه يؤدي إلى تناقض يهدم الرياضيات ولذلك انطلقت أزمة الأساسيات فهل الرياضيات متناقضة لأنها كانت مبنية على نظام مجموعاتي ساذج ؟

أدى ذاك إلى إعادة بناء المسلمات فوضع زارملو مسلمات ZF ثم أضيف إليها مسلمة الإختيارAC .

ففي هذا النظام لا يسمح بصناعة مجموعة إلا بالبناء انطلاقا من المجموعة الخالية وبهذا تخلصنا من القضايا الساذجة بتقيدها داخل مجموعة.

لكن السؤال الذي بقي مطروحا منذ أعمال كنتور : هذه المجموعات المبنية

على نظام ZFC ك N و Z و Q و R لها قدرتين فقط:

إما قابلة للعد ك N و Z وQ

أو غير قابلة للعد ك R و C

للتذكير مجموعتين لهما نفس القدرة إذا وجد بينهما تقابل ونقول أن مجموعة قدرتها أصغر من أخرى إذا وجد تباين من الأولى نحو الثانية واستحال وجود تقابل.

فالسؤال الذي طرحه كنتور هل توجد مجموعة قدرتها بين N و R فقدرة R نسميها قدرة المستمر.

تسمى هذه الفرضية بفرضية المستمر والتي أجابت عليها أعمال غودل سنة 1938 بأن هذه الفرضية لا تتناقض مع ZFC و أنهاها جوزيف بول كوهين سنة 1963 بأن فرضية المستمر مستقلة تماما عن نظامZFC .

يمكن تفسير ذلك بأن بناء المجموعات في ZFC يمر بطريقتين:

إما بالتركيب انطلاقا من اتحاد مجموعات أحادية أو الجداء الديكارتي وهذه تعطينا عبر المسلمات مجموعة قابلة للعد.

وإما عبر مجموعة أجزاء المجموعات وهذه تنقلنا من مجموعة ك N قدرتها قابلة للعد إلى مجموعة غير قابلة للعد قدرتها 2^N للتذكير قدرة R هي 2^N



فالطريقة الوحيدة للقفز من قدرة لأخرى هي المرور بـ مجموعة الأجزاء وهذا ما يفسر عدم استطاعة المسلمات إنشاء مجموعة قدرتها بين N و R أي 2^N

فالمسلمات تعطي طريقة واحدة للتوسع وتسكت عن الباقي وهذا ما يفسر استقلال فرضية المستمر عن ZFC .

أما مسلمة الاختيار فلا تفيد شيئا هنا لأنها لا تنشئ قدرة جديدة إنما تحتار عناصر من مجموعة مجموعات فهي تعطي نفس قدرة المجموعة المطبقة عليها.

إذا تأملنا هذا فهمنا أن وجود أو عدم وجود مجموعات بين قدرة N وR لا يضيف شيئا على مسلمات ZFC .





مبرهنة كنتور – برنشتاين : عندما تتساوى قدرات المجموعات.

عدد عناصر مجموعة مسألة اهتم بها جورج كنتور في محاولة منه لدراسة المجموعات غير المنتهية ومقارنتها.

فإن كان عدد عناصر مجموعة منتهية مفهومه واضح للعقول، فالمسألة صعبة متى قمنا بدراسة المالانهاية المجموعاتية.

الذي قام به كنتور هو مقارنة المجموعات بتطبيق تقابلي فمتى تمكنا من مقابلة مجموعتين قلنا أن لهما نفس القدرة.

ذهب كنتور إلى أكثر من ذلك بل رتب المجموعات حسب قدراتها فوجد أن قدرة مجموعة الأعداد الحقيقية تساوي قدرة مجموعة مجموعات أجزاء مجموعة الأعداد الطبيعية وعموما وجد القدرات تقفز بقدرات مجموعات الأجزاء أي

$$card(N) < card(P(N)) = card(R) < card(P(R)) < ....$$

تساءل كنتور عن وجود مجموعة قدرتها بين قدرة N و R وهذا ما نسميه بفرضية المستمر ولم يجب على ذلك حتى سنة 1938 من غودل أين بين أن وجود هذه المجموعة لا يناقض مسلمات ZFC ثم أكمل ذلك بول كوهين سنة 1963 أين بين أن مسلمات ZFC لا يمكن برهنتها في ZFC فتبين أنها قضية جديدة منفصلة عن النظام المسلماتي ZFC .

لكن السؤال المتبادر للذهن ما معنى قدرة مجموعة أكبر من قدرة أخرى أو قدرة مجموعة أصغر من قدرة أخرى ؟

والجواب أنه متى وجدنا تباينا من المجموعة الثانية نحو الأولى ولم نجد تباينا من المجموعة الأولى نحو الثانية فيمكننا أن نقول أن قدرة الأولى أكبر من الثانية.

لكن ماذا يحدث لو وجدنا تباينا في الاتجاهين ؟

أجاب على ذلك كنتور في مبرهنة كنتور برنشتاين والتي تنص على أنه إذا وجد تباينان في الاتجاهين فيمكننا صناعة تقابل بين المجموعتين أي لهما نفس القدرة.

سميت هذه المبرهنة بمبرهنة كنتور برنشتاين ذلك أن كنتور أعطى برهانا يستعمل مسلمة الاختيار ثم قام برنشتاين بإعطاء برهان آخر لا يستعملها.

سنقدم أحد البراهين لها وذلك عن طريق التوطئة التالية:

البرهان في ملف مع براهين أخرى على الرابط:

https://archive.org/download/kantour/kantour_V4.pdf

لنعتبر مجموعة E ومجموعة أجزائها ولنفرض أنه لدينا تطبيق g من مجموعة الأجزاء نحو نفسها بحيث هذا التطبيق متزايد $g : P(E) \to P(E)$



التطبيق المتزايد بمفهوم المجموعات هو التطبيق الذي يحقق $A \subset B \Rightarrow g(A) \subset g(B)$

إذا حقق التطبيق ذلك فهو يقبل نقطة صامدة أي توجد مجموعة بحيث $g(M) = M$

برهان التوطئة:

لنعرف المجموعة التالية $X = \{A \in P(E) : g(A) \subset A\}$

بما أن $\varnothing \subset g(\varnothing)$ فهي تنتمي ل X إذن X غير خالية.

لنصنع اتحاد مجموعات X فنضع $C = U M , M \in X$

بما أن $\forall M \in X : M \subset g(M)$

فنستنتج أن

$C = U M \subset U g(M) : (1)$

لكن كون g متزايدة نستنتج منه أن $M \subset C \Rightarrow g(M) \subset g(C)$

ومنه

$U g(M) \subset g(C) : (2)$

من 1 و 2 نستنتج

$C \subset g(C) : (3)$

إذن C تنتمي لـX

نطبق كون g متزايدة فيكون لدينا $C \subset g(C) \Rightarrow g(C) \subset g(g(C))$

لكن هذا يعني أنه $g(C) \in X$

إذن هي محتوات في C لأنها اتحاد مجموعات X

$g(C) \subset C : (4)$

إذن من 3 و 4 نجد نقطتنا الصامدة $g(C) = C$

برهان مبرهنة كنتور – برنشتاين

لنفرض أنه لدينا تباين f من A نحو B وتباين h من B نحو A .

نحن نعلم أن f يصبح تقابلي إذا جعلناه من A نحو $f(A)$

وعموما يصبح تقابلي من مجموعة E نحو $f(E)$

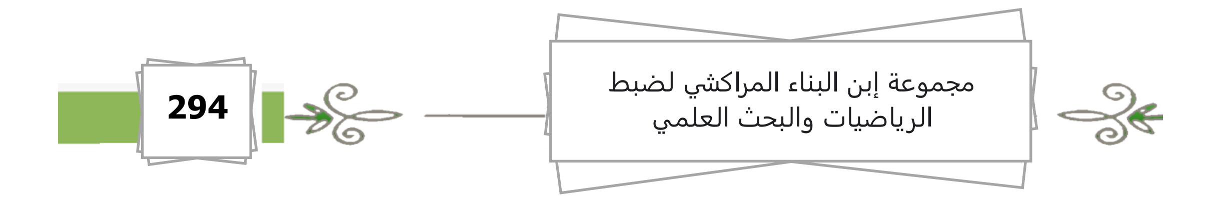
ونفس الشيء يقال على h

الفكرة هي أن نقصر f على مجموعة E بحيث تتمة E في A أي $A \backslash E$

هي صورة كذلك للجزء المتمم من B بواسطة h

أي $h(B \backslash f(E)) = A \backslash E$

عندها يكون f تقابلي من E نحو صورة E و h تقابلي من تتمة صورة E بـ f نحو تتمة E في A .



فيمكننا أن نعرف تطبيق تقابلي k كالتالي:

$$k(x) = f(x) , x \in E$$

$$k(x) = h^{-1}(x) : x \in A \setminus E$$

إذن نحتاج أن يكون h تقابلا بين B\f(E) و A\E

حتى نستطيع استعمال h^{-1} أي نحتاج $h(B \setminus f(E)) = A \setminus E$

كي نكمل به ما تبقي من الصور التي لا يغطيها f .

المساواة السابقة تعني أن $A \setminus h(B \setminus f(E)) = E$

لكن هذا يعرف تطبيق على مجموعات أجزاء المجموعة A أي من أجل كل مجموعة M لدينا

$$g(M) = A \setminus h(B \setminus f(M))$$

وهذا التطبيق بتعريفه متزايد فهو يقبل نقطة صامدة إذن توجد مجموعة E يحقق عندها

$$g(E) = E$$

أي

$$A \setminus h(B \setminus f(E)) = E$$

وهو المطلوب لكي نعرف التطبيق التقابلي k .

برهان ثان لمبرهنة كنتور برنشتاين

تنص مبرهنة كنتور برنشتاين أنه إذا وجد تباين لمجموعة نحو أخرى ويوجد تباين كذلك من الثانية نحو الأولى فبينهما تقابل.

سنقدم برهانا ثانيا لهذه المبرهنة و سنبدأ أولا بهذه التوطئة:

وهي إذا وجد تباين بين مجموعة وجزء منها فيوجد بينهما تقابل.

لتكن مجموعة A وتباين u نحو جزء منها B

ولنأخذ متتالية المجموعات المعرفة بالتراجع التالية

$$C_0 = A \setminus B$$

$$C_n = u(C_{n-1}) \, , \, n > 0$$

وليكن C اتحادها

نلاحظ من تعريف C أن $u(C) \subset C$

نعرف الآن التطبيق v بأنه مطابق ل u على C وحيادي على متممة C أي:

$$v(x) = u(x) : x \in C$$

$$v(x) = x : c \notin C$$

هذا التطبيق ينقل القيم من A نحو B لأن القسم الأول من تعريفه معرف بـ u الذي صوره في B .

والقسم الثاني ينقل x لا تنتمي ل C نحو x لكن كون x لا تنتمي ل C يعنى أنها لا تنتمي ل C_0 لأن C هي اتحادات C_n و بما أن $C_0 = A \setminus B$ فهذا يعني أن x لا تنتمي ل $A \setminus B$ أي تنتمي لـB .

التطبيق v متباين من تعريفه ذلك أن القسم الأول $v(x) = u(x) : x \in C$ متباين لتباين u والقسم الثاني كذلك $v(x) = x : c \notin C$ وهما قسمان لا يلتقيان لأن $v(C) = u(C) \subset C$

سنبرهن الآن أنه غمر من A نحو B

ليكن y من B فإذا كان لا ينتمي ل C فلدينا $v(y) = y$

أما إذا كان ينتمي ل C فهو ينتمي لأحد مجموعات اتحادها أي C_n

لكنه لا ينتمي ل C_0 لأن B هي مجموعة وصولنا و C_0 هي $A \setminus B$

إذن سينتمي ل $Cn = u(C_{(n-1)}) \, , \, n > 0$ ومنه يوجد x في $C_{(n-1)}$ بحيث $v(x) = u(x) = y$

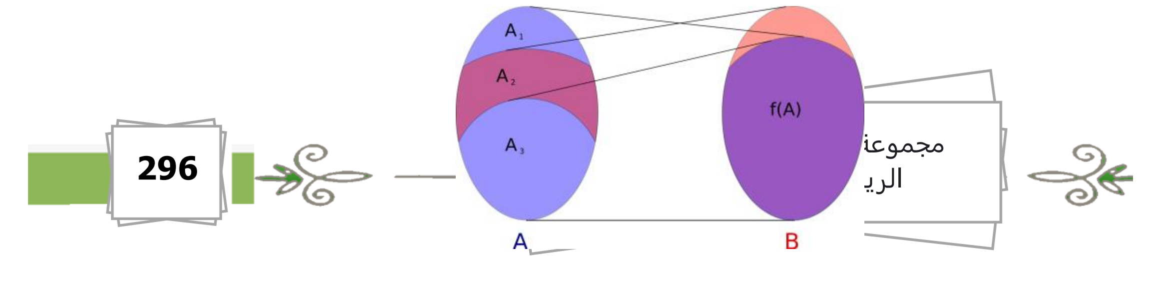
إذن تطبيقنا غامر ومتباين فهو تقابل من A نحو B .

برهان مبرهنة كانتور برنشتاين

إذا كان عندنا تباين f من E نحو F وتباين g من f نحو E فنحن نعلم أن g تقابل بين F و $g(F)$

ولدينا $u = gof$ تباين من E نحو $g(F)$ ومنه حسب التوطئة يوجد تقابل h بين E و$g(F)$

وبما أن g هو تقابل بين F و $g(F)$ فقد برهنا المطلوب بالتطبيق: goh^-1



برهان ثالث لمبرهنة كنتور برنشتاين

تنص مبرهنة كنتور برنشتاين أنه إذا وجد تباين لمجموعة نحو أخرى ويوحد تباين كذلك من الثانية نحو الأولى فبينهما تقابل.

سنقدم برهانا ثالثا لهذه المبرهنة مستوحى من برهان Julius König 1906

لتكن المجموعتين غير الخاليتين E و F والذي بينهما تطبيقان متباينان

$f : E \rightarrow F$

$g : F \rightarrow E$

سنعرف من أجل x من E السلسلة المكونة من متتالية من عناصر من المجموعتين.

سنضع $x_0 = x$

إن وجدت صورة عكسية ل x_0 بواسطة g سنضع

$x_1 = g^{-1}(x_0)$

إن وجدت صورة عكسية ل x_1 بواسطة f سنضع

$x_2 = f^{-1}(x_1)$

ونواصل هكذا فتكون عندنا ثلاث حالات:

إما أننا نواصل للمالانهاية فنرمز للقسم من E الذي يحقق ذلك أي مجموعة القيم x من E التي لها سلسلة غير منتهية $E(\infty)$

أو نتوقف عند x_n في E ليس لها سابقة بـ g فنرمز لهذا الجزء أي مجموعة قيم x من E التي لها سلسلة تتوقف في E بـ $E(E)$

أو نتوقف عند x_n من F ليس لها سابقة بـ f فنرمز لهذا الجزء أي مجموعة قيم x من E التي لها سلسلة تتوقف في F بـ $E(F)$

فنستطيع بذلك تقسيم E إلى ثلاث أقسام منفصلة

$E(\infty)$ و $E(E)$ و $E(F)$

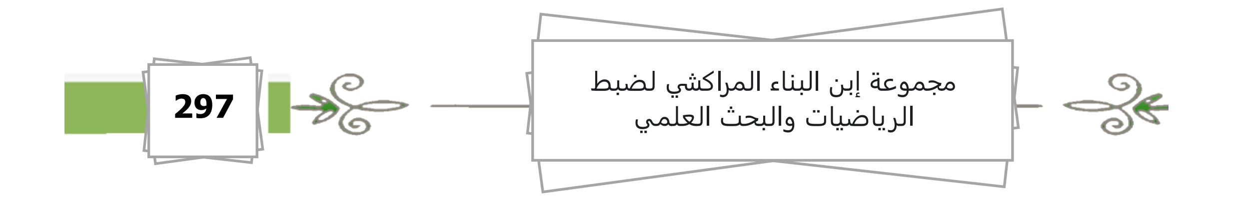
نلاحظ أن $g^{-1}(E(F))$ لا تتقاطع مع $f(E(\infty))$ و $f(E(E))$ ذلك أنه لو كانت هناك y مشتركة فستكون سابقتها a من $E(F)$

والتي لها متتالية تنتهي بـ x_n في F ليس لها سابقة بـ f

وسابقة b من $E(\infty)$ أو $E(E)$

لكن a و b تشتركان في السلسلة ابتداء من y وهذا تناقض إذ الأولى تنتهي بـ x_n في F أما الثانية فلا تنتهي أو تنتهي بـ x_n في E .

نلاحظ كذلك أن جميع عناصر $E(F)$



لها سوابق بـ g وإلا لكانت تمثل متتالية تقف عند E وهذا يناقض كونها من $E(F)$

إذن يمكننا تعريف التطبيق التقابلي من E نحو F

$$h(x) = f(x) , x \in E(\infty) \cup E(E)$$

$$h(x) = g^{-1}(x) , x \in E(F)$$

كونه متباين واضح من كون f و g^{-1} متباينان وصورهما لا تلتقي.

كونه تقابلي نتيجة أن أي عنصر من F إما أن صورته في E بواسطة g هي في متتالية من $E(\infty)$ أو $E(E)$

ومنه عندها سابقة في E بـ f أي يوجد لها f^{-1}

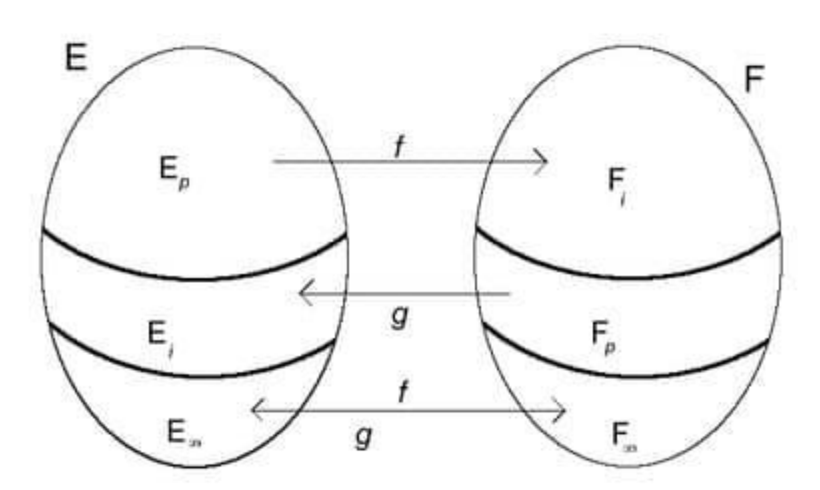
حسب تعريف المجموعتين إذن سنجدها بـ f من

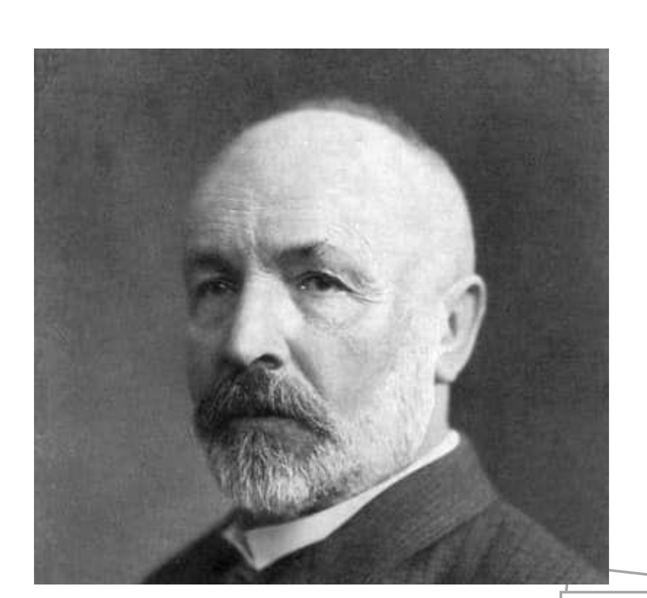
$E(\infty)$ أو $E(E)$

وإما هي في $E(F)$

ومنه نجدها بـ g^{-1} على $E(F)$

وهكذا نكون برهنا على مبرهنة كنتور برنشتاين.







تم وضع البراهين الثلاثة لمبرهنة كنتور برنشتاين في ملف واحد

https://archive.org/download/kantour/kantour_V4.pdf

الملف:

الأستاذ بن شعبانة عبد الحكيم

مجموعة ابن البناء المراكشي

مبرهنة كنتور

من أجل كل مجموعتين غير خاليتين

$$A , B$$

إذا وجد تباين من الأولى نحو الثانية و وجد تباين من الثانية نحو الأولى **فيوجد تطبيق تقابلي بينهما**

سميت هذه المبرهنة بمبرهنة كنتور برنشتاين ذلك أن كنتور أعطى برهانا يستعمل مسلمة الاختيار ثم قام برنشتاين بإعطاء برهان آخر لا يستعملها.

سنقدم ثلاث براهين مختلفة لهذه المبرهنة

البرهان الأول

عن طريق التوطئة التالية:

توطئة

لنعتبر مجموعة E ومجموعة أجزائها ولنفرض أنه لدينا تطبيق g من مجموعة الأجزاء نحو نفسها بحيث هذا التطبيق متزايد:

$$g : P(E) \to P(E)$$

التطبيق المتزايد بمفهوم المجموعات هو التطبيق الذي يحقق

$$A \subset B \Rightarrow g(A) \subset g(B)$$

إذا حقق التطبيق ذلك **فهو يقبل نقطة صامدة** أي توجد مجموعة بحيث

$$g(M) = M$$

برهان التوطئة

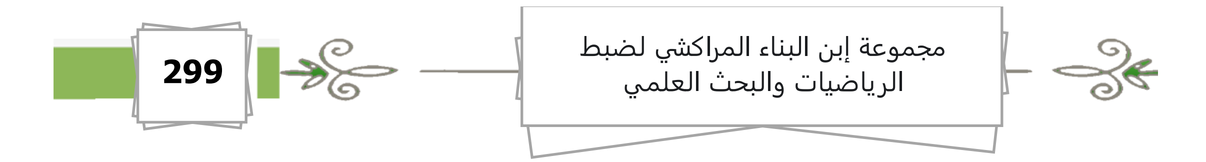
لنعرف المجموعة التالية

$$X = \{A \in P(E) : A \subset g(A)\}$$

بما أن المجموعة الخالية تحقق

$$\varnothing \subset g(\varnothing)$$

فهي تنتمي ل X إذن X غير خالية.



لنصنع اتحاد مجموعات X فنضع

$$C = \bigcup M \;,\; M \in X$$

بما أن

$$\forall M \in X : M \subset g(M)$$

فنستنتج أن

$$\bigcup M \subset \bigcup g(M) \;\dots (1)$$

لكن كون g متزايدة نستنتج منه أن

$$M \subset C \Rightarrow g(M) \subset g(C)$$

ومنه

$$\bigcup g(M) \subset g(C) \dots (2)$$

من 1 و 2 نستنتج

$$C \subset g(C) \dots (3)$$

إذن C تنتمي ل X

نطبق كون g متزايدة فيكون لدينا

$$C \subset g(C) \Rightarrow g(C) \subset g(g(C))$$

لكن هذا يعني أنه

$$g(C) \in X$$

إذن هي محتوات في C لأنها اتحاد مجموعات X

$$g(C) \subset C \dots (4)$$

إذن من 3 و 4 نجد نقطتنا الصامدة

$$g(C) = C$$

برهان مبرهنة كنتور - برنشتاين

لنفرض أنه لدينا تباين f من A نحو B وتباين h من B نحو A.

نحن نعلم أن f يصبح تقابلي إذا جعلناه من A نحو f(A)

وعموما يصبح تقابلي من مجموعة E نحو f(E)

ونفس الشيء يقال على h

الفكرة هي أن نقصر f على مجموعة E بحيث تتمة E في A أي A\E هي صورة كذلك للجزء المتمم من B بواسطة h أي

$$h(B \setminus f(E)) = A \setminus E$$

عندها يكون f تقابلي من E نحو صورة E و h تقابلي من تتمة صورة E ب f نحو تتمة E في A.

فيمكننا أن نعرف تطبيق تقابلي k كالتالي:

$$k(x) = f(x) \ , x \in E$$

$$k(x) = h^{-1}(x) : x \in A \setminus E$$

إذن نحتاج أن يكون h تقابلا بين **B\f(E)** و **A\E** حتى نستطيع استعمال h^-1

أي نحتاج

$$h(B \setminus f(E)) = A \setminus E$$

كي نكمل به ما تبقي من الصور التي لا يغطيها f.

المساواة السابقة تعني أن

$$A \setminus h(B \setminus f(E)) = E$$

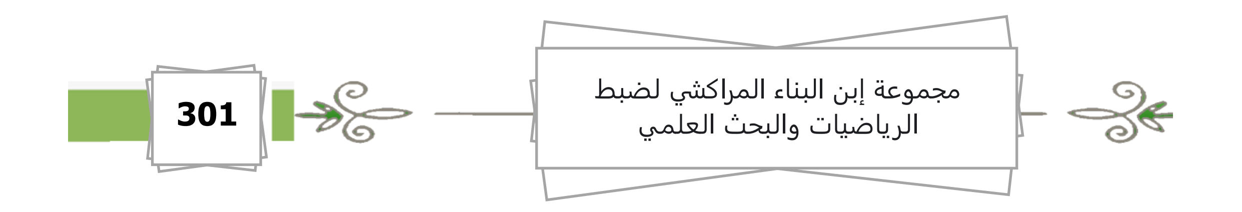
لكن هذا يعرف تطبيق على مجموعات أجزاء المجموعة A أي من أجل كل مجموعة M لدينا

$$g(M) = A \setminus h(B \setminus f(M))$$

وهذا التطبيق بتعريفه متزايد فهو يقبل نقطة صامدة إذن توجد مجموعة E يحقق عندها g(E) = E أي

$$A \setminus h(B \setminus f(E)) = E$$

وهو المطلوب لكي نعرف التطبيق التقابلي k.



البرهان الثاني

سنبدأ أولا بهذه التوطئة

توطئة

إذا وجد تباين من مجموعة نحو جزء منها فيوجد بينهما تقابل.

لتكن مجموعة A وتباين u نحو جزء منها B

ولنأخذ متتالية المجموعات المعرفة بالتراجع التالية

$$C(0) = A\backslash B$$
$$C(n) = U(C(n-1))\ ,\ n > 0$$

وليكن C اتحادها، نلاحظ من تعريف C أن

$$u(C) \subset C$$

نعرف الأن التطبيق v بأنه مطابق ل u على C وحيادي على متممة C أي :

$$v(x) = u(x) : x \in C$$
$$v(x) = x :\ \ c \notin C$$

هذا التطبيق ينقل القيم من A نحو B لأن القسم الأول من تعريفه معرف ب u الذي صوره في B.

والقسم الثاني ينقل x لا تنتمي ل C نحو x لكن كون x لا تنتمي ل C يعنى أنها لا تنتمي ل C(0) لأن C هي اتحادات Cn و بما أن **C(0) = A\B** فهذا يعني أن x لا تنتمي ل A\B أي تنتمي ل B.

التطبيق v متباين من تعريفه ذلك أن القسم الأول

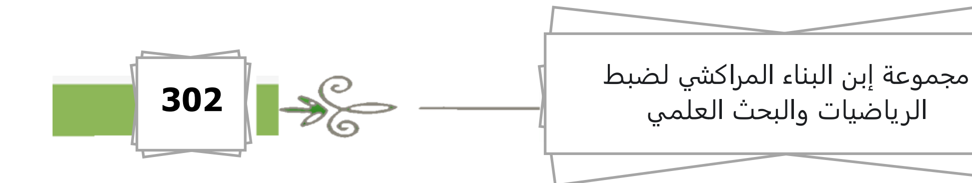
$$v(x) = u(x) : x \in C$$

متباين لتباين u

والقسم الثاني كذلك

$$v(x) = x :\ \ c \notin C$$

وهما قسمان لا يلتقيان لأن $v(C) = u(C) \subset C$




سنبرهن الآن أنه غمر من A نحو B

ليكن y من B فإذا كان لا ينتمي ل C فلدينا

$$v(y) = y$$

أما إذا كان ينتمي ل C فهو ينتمي لأحد مجموعات اتحادها أي C(n) لكنه لا ينتمي ل C(0) لأن مجموعة وصولنا هي B و C(0) هي A\B

إذن سنتمي لأحد مجموعات الاتحاد الأخرى

$$C(n) = u(C(n-1))، n > 0$$

ومنه يوجد x في C(n-1) بحيث

$$v(x) = u(x) = y$$

إذن تطبيقنا غامر ومتباين فهو تقابل من A نحو B.

برهان مبرهنة كانتور برنشتاين

إذا كان عندنا تباين f من E نحو F وتباين g من f نحو E فنحن نعلم أن g تقابل بين F و g(F) ولدينا

$$u = gof$$

تباين من E نحو g(F)

ومنه حسب التوطئة يوجد تقابل h بين E و g(F) وبما أن g هو تقابل بين F و g(F) فقد برهنا المطلوب بالتطبيق:

$$goh^{-1}$$

البرهان الثالث

هذا البرهان مستوحى من برهان

Julius König 1906

لتكن المجموعتين غير الخاليتين E و F والذي بينهما تطبيقان متباينيان

f : E → F
g : F → E

سنعرف من أجل x من E السلسلة المكونة من متتالية من عناصر من المجموعتين.

سنضع

$$x0 = x$$

إن وجدت صورة عكسية ل x0 بواسطة g سنضع

$$x1 = g^{-1}(x0)$$

إن وجدت صورة عكسية ل x1 بواسطة f سنضع

$$x2 = f^{-1}(x1)$$

ونواصل هكذا فتكون عندنا ثلاث حالات:

إما أننا نواصل للمالانهاية فنرمز للقسم من E الذي يحقق ذلك أي مجموعة القيم x من E التي لها سلسلة غير منتهية

$$E(\infty)$$

أو نتوقف عند xn في E ليس لها سابقة ب g فنرمز لهذا الجزء أي مجموعة قيم x من E التي لها سلسلة تتوقف في E ب

$$E(E)$$

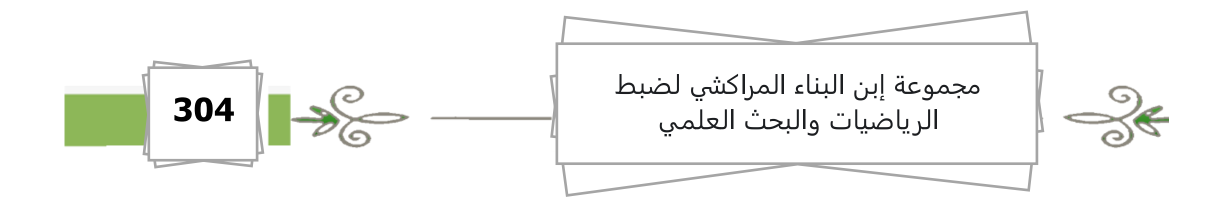
أو نتوقف عند xn من F ليس لها سابقة ب f فنرمز لهذا الجزء أي مجموعة قيم x من E التي لها سلسلة تتوقف في F ب

$$E(F)$$

فنستطيع بذلك تقسيم E إلى ثلاث أقسام منفصلة

نلاحظ أن **$g^{-1}(E(F))$** لا تتقاطع مع **$f(E(\infty))$** و **$f(E(E))$** ذلك أنه لو كانت هناك y مشتركة فستكون سابقتها a من **E(F)**

والتي لها متتالية تنتهي ب xn في F ليس لها سابقة ب f وسابقة b من **$E(\infty)$** أو **E(E)**



لكن a و b تشتركان في السلسلة ابتداء من y وهذا تناقض إذ الأولى تنتهي ب xn في F أما الثانية فلا تنتهي أو تنتهي ب xn في E.

نلاحظ كذلك أن جميع عناصر **E(F)** لها سوابق ب g وإلا لكانت تمثل متتالية تقف عند E وهذا يناقض كونها من **E(F)** إذن يمكننا تعريف التطبيق التقابلي من E نحو F

h(x) = f(x)   , x ∈ E(∞) U E(E)
h(x) = g^-1(x) , x ∈ E(F)

كونه متباين واضح من كون f و g^-1 متباينان وصورهما لا تلتقي.

كونه تقابلي نتيجة أن أي عنصر من F إما أن صورته في E بواسطة g هي في متتالية من **E(∞)** أو **E(E)**

ومنه عندها سابقة في E ب f أي يوجد لها f^-1 حسب تعريف المجموعتين إذن سنجدها ب f من **E(∞)** أو **E(E)** وإما هي في **E(F)**

ومنه نجدها ب g^-1 على **E(F)**

وهكذا نكون برهنا على مبرهنة كنتور برنشتاين.



عندما تتساوى قدرة مجموعة الأعداد الحقيقية مع قدرة مجموعة مجموعات أجزاء مجموعة الأعداد الطبيعية.

لقد اكتشف جورج كنتور عند دراسته للمجموعات أنه يمكن مقابلة مجموعة الأعداد الحقيقية مع مجموعات أجزاء مجموعة الأعداد الطبيعية.

فقام بترتيب المجموعات حسب مفهوم القدرة فنقول عن مجموعتين أن لهما نفس القدرة إذا وجد تقابل بينهما.

ونقول عن قدرة مجموعة أنها أقل من قدرة أخرى إذا وجد تباين من الأولى نحو الثانية ولا يمكن ايجاد تقابل بينهما.

من بين المبرهنات التي اكتشفها كنتور أن قدرة مجموعة أجزاء مجموعة كيفية A أكبر تماما من قدرة A ذلك أنه لا يمكن أن يوجد تقابل بينهما.

وكذلك من مبرهناتها المبرهنة المسماة بمبرهنة كنتور برنشتاين والتي تنص على أنه إذا وجد تباين من مجموعة A نحو B وتباين من B نحو A فيوجد بينهما تقابل فهما متساويتان في القدرة.

سنتطرق في هذا المنشور للتقابل بين مجموعة الأعداد الحقيقية R مع مجموعات أجزاء مجموعة الأعداد الطبيعية $P(N)$

يمكننا العمل على مجال الوحدة المفتوح $]0,1[$

لأنه يقابل R ، يمكن رؤية ذلك عن طريق التطبيق $\tan(\pi x - \pi/2)$

يمكننا ملاحظة أن الكتابة في النظام الثنائي لأي عدد حقيقي من مجال الوحدة المفتوح تعطى متتالية أرقام $U_n = 0$ أو $U_n = 1$

حيث n هي رتبة الرقم من كتابة العدد بعد الفاصلة.

ومنه يمكن مقابلة هذا العدد الحقيقي بمجموعة الرتب التي لا تنعدم عندها U_n وهذه مجموعة جزئية من N فهي تمثل المجموعة المميزة للرتب مثال ذلك: $0.0101 \rightarrow \{2,4\}$

ذلك أن الرتبة 2 و الرتبة 4 يظهر فيهما الواحد.

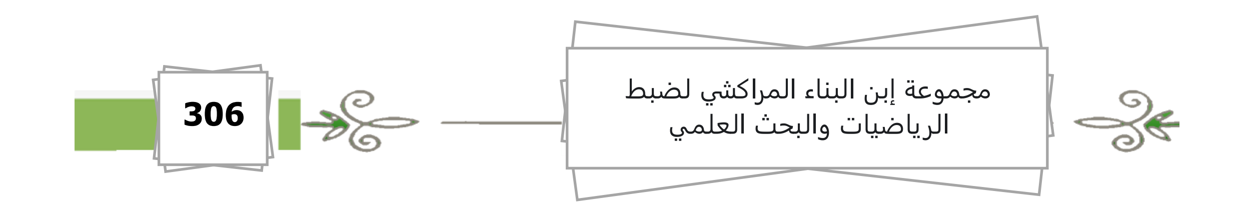
وكمثال آخر: $0.010101010101... =\{2,4,6,...\}$

إذن بهذا نكون قد عرفنا تباينا من مجال الوحدة من R نحو $P(N)$

الآن نقوم بالعملية العكسية فننطلق من $P(N)$

فننقلها بنفس الطريقة السابقة باعتبار أن كل عدد هو رتبة المتتالية U_n التي تساوي 1 عنده فنحصل على كتابة عشرية تمثل عددا حقيقيا.

لكن هنا سنصطدم بمشكلة الكتابة غير النظيفة في النظام الثنائي لأنه يمكننا أن نجد عددا بكتابتين من الشكل $0.1 = 0.01111....$ أي $\{2,3,4,...\}$ و $\{1\}$ لهما نفس الكتابة في النظام الثنائي.



فلكي يكون تطبيقنا متباينا لابد أن نعتبر الكتابة المتحصل عليها في نظام أكبر من الثنائي كالعشري مثلا

وعندها يصبح تباينا لأنه في النظام العشري $0.01111.... \neq 0.1$

ومنه حسب مبرهنة كنتور برنشتاين بما أنه يوجد تباين في الاتجاهين فهناك تقابل بين $]0,1[$

و $P(N)$ ومنه تقابل بين R ومجموعة أجزاء N .

لم نهتم هنا بالصفر أي $\{0\}$ لأنه عدد وحيد لا يؤثر في البرهان فلدينا N تقابل N^*

سنقوم الآن بترتيب قدرات المجموعات المألوفة.

بالنسبة للمجموعات المنتهية فقدراتها تساوي عدد عناصرها وهي مرتبة بذلك في N

نعلم كذلك أن $card(N) = card(Z)$ وهذا ظاهر بالتقابل $f(n) = (-1)^n [(n+1)/2]$

حيث المعكوفتين هما دالة الجزء الصحيح.

ولدينا كذلك $card(N) = card(Q)$

ذلك أنه يوجد تباين من Q نحو N يمكن تعريفه بـ $f(p/q) = 2^p \times 3^q$

بما أن N جزء من Q فحسب مبرهنة كانتور برنشتاين يوجد بينهما تقابل.

بل هذا التطبيق يبين أن $card(N) = card(N^2)$ وعموما $card(N) = card(N^m)$

بالنسبة ل R كما شاهدنا لدينا $card(R) = card(P(N))$

بل يمكننا أن نبرهن أن $card(R) = card(N^N)$

المقصود بـ N^N الجداء الديكارتي ل N في نفسها مكرر لمالانهاية قابلة للعد.

بما أن مجموعة الأعداد العشرية كثيفة في R فكل عدد حقيقي يمكن مقابلته بمتتالية عشرية تكتب من الشكل

$U_n = P,a_1a_2....a_n$

حيث a_i هي الأرقام بعد الفاصلة.

ومنه يمكن مقابلته بالعنصر من N^N :

$(P, a_1,a_1a_2,...,a_1...a_n,...)$

فبهذا يوجد تباين من R نحو N^N .

نقوم بالعكس الآن، من أجل كل عنصر من N^N يمكننا كتابة كل عدد من N في النظام الثنائي فيكون

لدينا العنصر $(b_1,b_2,....)$ حيث b_i مكتوبة في النظام الثنائي وعندها يمكن مقابلته بالعدد

$0.b1_3_b2_3_...$

أي نكتب الأعداد جنبا لجنب ككتابة عشرية مع الرقم 3 كفاصل بين كل عددين.

فنكون بذلك صنعنا تباينا من N^N نحو R .

حسب مبرهنة كنتور برنشتاين بما أنه يوجد تباين في الاتجاهين فيوجد تقابل بين N^N و R .

يمكننا أن نبرهن بطرق مماثلة أن $card(R) = card(2^N)$

عن طريق كتابة العدد الحقيقي في النظام الثنائي للتباين الأول وللتباين العكسي اعتبار كل عنصر من 2^N

ككتابة في النظام العشري بتصفيف الأرقام بعد الفاصلة فنكون تحصلنا على تباين في الاتجاهين ومنه التقابل.

بالنسبة لترتيب القدرات حسب مبرهنة كنتور من أجل كل مجموعة A لدينا

$$card(A) < card(P(A))$$

إذن سنستنتج من ذلك أن

$$card(\mathbf{N}) = card(\mathbf{Z}) = card(\mathbf{Q}) < card(P(\mathbf{N})) = card(\mathbf{R}) = card(\mathbf{C}) < card(P(\mathbf{R})) < card(P(P(\mathbf{R}))) ....$$

فالقدرات تقفز بمجموعة الأجزاء.

السؤال الذي طرحه كنتور هو هل توجد مجموعة قدرتها بين N و R ؟ وهذا ما يعرف بفرضية المستمر.

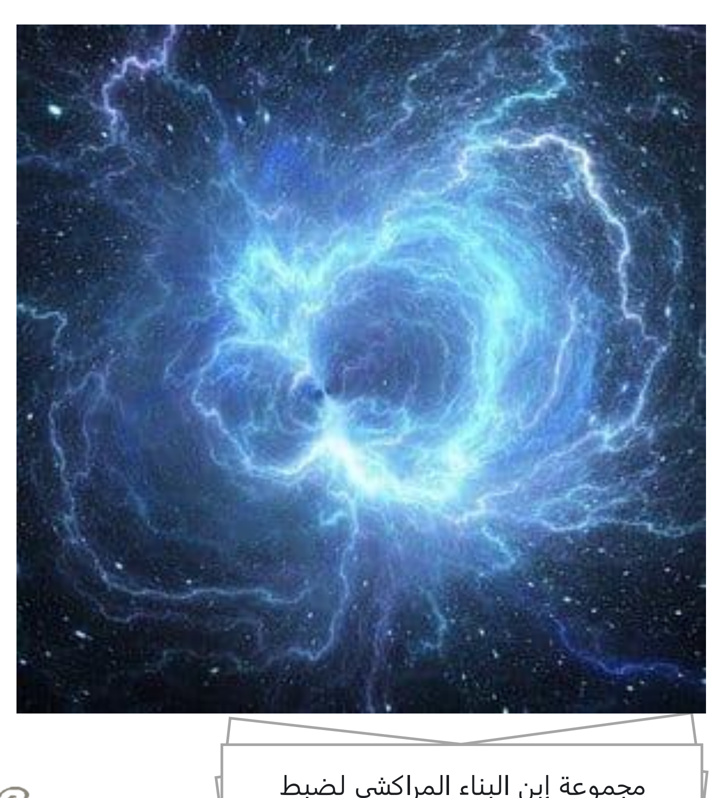
فنسمي قدرة R بقوة المستمر وفرضية المستمر تقول أن أي جزء من مجموعة الأعداد الحقيقية إما منته أو قابل للعد أو بقوة المستمر أي بقوة R .

هذه المسألة هي المسألة الأولى من مسائل هلبرت الثلاث والعشرين.

ونسمي فرضية المستمر المعممة هي أن كل القدرات بعد قدرة R تقفز بقدرات مجموعة الأجزاء .

كان يجب انتظار قدوم غودل سنة 1938 أين بين أن إضافة فرضية المستمر إلى النظام المسلماتي ZF لا يناقضه.

ثم أنهى المسألة بول كوهين سنة 1963 حين بين أن فرضية المستمر مسألة غير قابلة للتقرير في نظام ZFC فهي مسألة خارجة عنها أي لا هي خاطئة ولا هي صحيحة هي مسألة منفصلة تماما على المسلمات المعروفة.



لننظر إلى المعادلات بطريقة مختلفة

ما هي المعادلة ؟ من الناحية المنطقية هي علاقة بالمعنى اللغوي أو قضية بالاصطلاح المنطقي مرتبطة بمتغيرات تقبل حسب متغيراتها الصحة أو الخطأ.

كمثال على ذلك المعادلات الجبرية التي تساوي صيغة جبرية بالقيمة صفر.

$x^2 - 1 = 0 , x \in R$

لكن إن كان هذا التعريف مضبوط رياضيا إلا أنه لا يعطي مفهوم المعادلة في الواقع التي عادة ما تكتب عن طريق مساواة بين كميتين بل لا يساعد على فهم ماهية المعادلة.

المعادلة في الواقع هي نظرة لمفهوم بطريقتين مختلفتين مثال ذلك لو نظرنا لمفهوم القوة سنجدها تأثير لشيء على آخر يمكن أن يغير من حركته حسب كمية التأثير.

فمهوم القوة متعلق بالحركة بل بكميتها فإذا دققنا بين المفهومين لاحظنا أن توليد القوة لحركة شيء يتناسب مع كتلته فأمكننا كتابة معادلة نيوتن الشهيرة : القوة تساوي مشتق كمية الحركة بالنسبة للزمن أي الكتلة في التسارع.

فالمعادلة هنا كتبت مفهوم القوة بطريقتين طريقة تكميمية وطريقة حسابية تفاضلية.

لو تأملنا كثير الحدود من الدرجة الثانية من الناحية الهندسية كما رآه الخوارزمي في زمانه سنجد أنه كتابة لمفهوم مساحة بطريقتين مثال ذلك $x^2 + 1 = 2x$

أي أن مساحة المربع طول ضلعه x زائد مساحة قدرها 1 تساوي مساحة المستطيل بنفس طول الضلع x وذو عرض 2 أو العكس.

المعادلات الفيزيائية بصفة عامة ومنها التفاضلية تصنع عن طريق النظر لمفهوم معين بطريقتين تنتج عنها معادلة ثم تحول جبريا لتصبح معادلة جبرية يسهل حلها حسابيا.

المعادلات التفاضلية تتبع نفس الطريقة ففي الأصل هي تمثل علاقة بين دالة ومشتقاتها و التي هي في الواقع كميات متعلقة بتغيراتها.

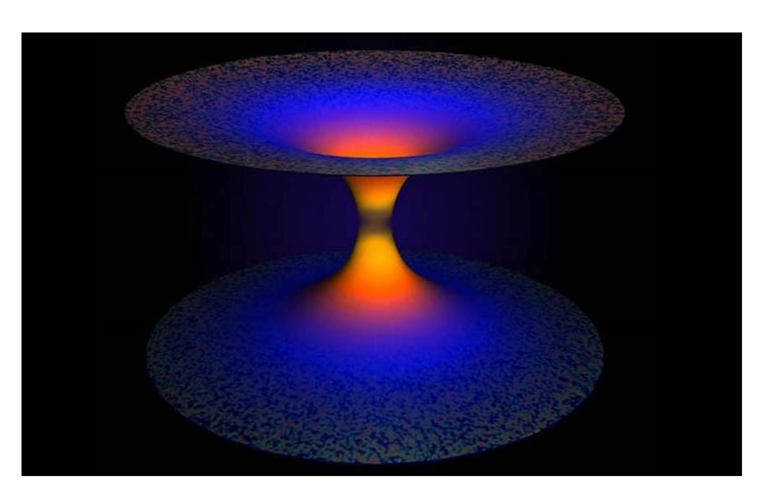
لماذا نذكر كل هذا ؟ إنما نذكره ليفهم التلميذ كيف يصنع المعادلات فقد عودنا التلميذ على حفظ طرق حل معادلات معينة بطرق معينة لكن لم نشرح له كيفية صناعتها فمتى وضعنا التلميذ أمام مثال من الواقع لم يستطع التعامل معه.

يمكننا هنا أن نشير إلى أن التلاعب في صياغة معادلة بطرق مختلفة قد يظهر مفاهيم جديدة موجودة في الواقع فالمسألة العكسية ممكنة وهي انطلاقا من معادلة نظهر كائنات واقعية وهذا ما حصل مع بلانك عندما درس كارثة الجسم الأسود أين تمكن عن طريق تغيير كتابة معادلته من إظهار الكانتا التي سميت فيما بعد بالفوتون.

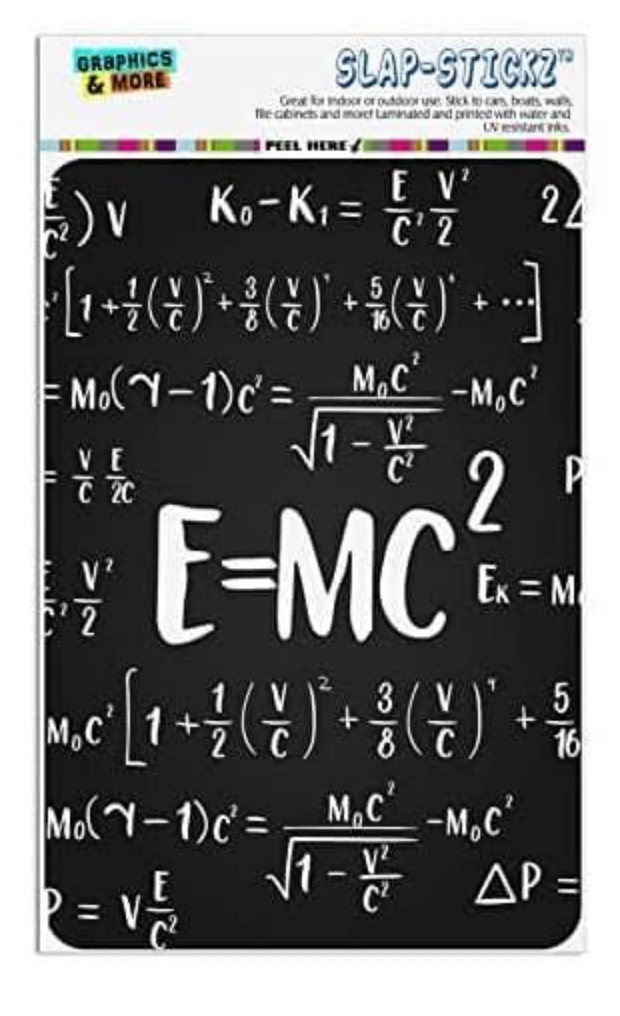


وكذلك هذا ما حصل مع نظرية الجاذبية الكمية بالحلقات إذ قام Abhay Ashtekar سنة 1988 بإعادة صياغة معادلة النسبية العامة لأينشتاين فجعل الجاذبية قابلة للتكميم فصنع بذلك نظرية فيزيائية جديدة قائمة على تكميم الجاذبية.

يجب أن لا ننظر للمعادلات كمجرد صيغ جبرية أو علاقات تفاضلية فقط بل هي أكبر من ذلك فهي مفاهيم ينظر إليها بطرق مختلفة وحسب طريقة نظرنا إليها يمكننا صياغة نتائج جديدة.







العبقرية الرياضية من ZFC إلى $E= m C^2$

الرياضيات مبنية على مسلمات نظرية المجموعات ZFC والتي تبدأ بالتسليم بوجود المجموعة الخالية ثم بواسطة تركيبات منها تصنع جميع المجموعات العددية إلى الفضاءات الجبرية والطبولوجية وغيرها من الكائنات الرياضية المعقدة.

دعونا ننظر في هذه الكائنات عن قرب.

ما هي الدالة ؟ الدالة هي علاقة بين مجموعتين فهي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي يمكن التعبير على عناصرها بالثنائيات $(x , f(x))$

ما هي علاقة الترتيب ؟ هي كذلك علاقة فهي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي فنحن عندما نكتب $x < y$ فما كتبنا إلا (x,y) ما هي المجموعة Z ؟ هي مجموعة مصنوعة من N^2

ما هي N ؟ هي مجموعة مصنوعة من تركيبات من المجموعة الخالية

$$1 = \{\varnothing\}$$
$$2 = \{\varnothing , \{\varnothing\}\}$$
$$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing \}\}\}$$

....

ما هي عملية الجمع ؟ هي كذلك علاقة فهي مجموعة فعندما نكتب $x + y = z$ فما كتبنا إلا $((x,y),z)$

عبقرية الرياضيات أنها صنعت جميع الكائنات بخصائصها من المجموعات والتي بدورها هي تركيبات من المجموعة الخالية.

فيمكن اعتبار المجموعة الخالية كالذرة التي تصنع منها الرياضيات.

لكن الرياضيات لا تفرق بين الكائن وخصائصه فهما مصنوعان من شيء واحد من المجموعات.

هل تستوعبون هذا ؟ الرياضيات تقول لكم أستطيع من لون البطيخ أن أصنع كائنا جديدا يسمى لون فلا فرق بين البطيخة ولونها من حيث الوجود!!!

وإن لم تستوعبوا هذا المثال أعطيكم آخر : الرياضيات تقول أنه لا فرق بين الشجرة وطولها فيمكنها أن تصنع من طول الشجرة كائنا جديدا!!!

الرياضيات تفعل هذا أليس صنعنا من خاصية تساوي باقي القسمة $m \equiv k\ [n]$ مجموعة سميناها Z/nZ

أليس استمرار دالة هو تركيب مجموعات ؟ أنظروا لتعريفه

$$\forall\ \xi > 0 ,\ \exists\ \delta > 0 ,\ \forall\ x \in Df ,\ |x - x0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x0)| < \xi$$

لدينا ξ عنصر من مجموعة

علاقة $<$ مجموعة

كذلك δ عنصر من مجموعة

كذلك x و x_0



كذلك f

حتى القيمة المطلقة هي تطبيق فهي مجموعة

فهذا التعريف كله عناصر مجموعات مركبة فيما بينها ولو حذفنا المجموعات منه لما بقي إلا المكممات والاستلزام: $\forall, \exists, \forall, \Rightarrow$

لكن السؤال المطروح، هل طريقة الرياضيات مجرد صرح حسابي نظري أو هو شيء في الواقع ؟

هل في الواقع لا يوجد فرق بين الشيء وأوصافه ؟

تجيبنا نظرية النسبية بمعادلتها الشهيرة E = m C^2

فتقول لا يوجد فرق بين الكتلة والطاقة، لكن أتدرون ما هي الطاقة ؟

عندما تسير بسرعة فأنت تكتسب طاقة حركية فالنسبية تقول أن كتلتك تزيد بزيادة طاقة سرعتك.

السرعة وصف للشيء فإذا هي تتحول لكتلة أي مادة فالطاقة جزء من المادة فهكذا يفعلون في المسرع CERN فهم يحولون الطاقة لجسيمات جديدة وهكذا يفعلون في المفاعلات النووية فهم يحولون الكتلة لطاقة.

فالنسبية تقول يمكن لطول الشجرة أن يصبح شجرة...

والحقيقة أن كل الخصائص الفيزيائية هي نتيجة لتركيب جسيمات فالقوى الثلاث في النظام الاعتيادي هي تبادل جسيمات.

اللون هو موجة ضوئية فهو فوتونات فهو جسيمات.

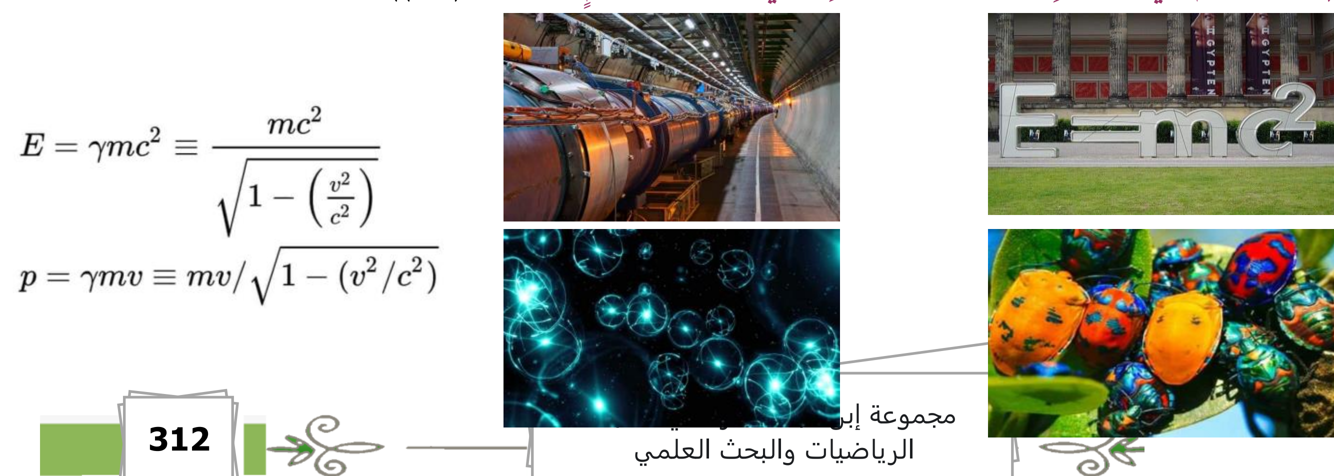
الرياضيات ليست فقط طريقة للتعبير عن الواقع بل يبدو أنها تجريد الواقع ذاته فهي تقول أن كل ما نراه هو مجرد تركيب من فكرة الوجود.

سواء أكلت حلوا أو مالح أو رأيت أحمر أو أخضر أو طرت بسرعة أو قفزت بمظلة فكل هذه هي تركيبات لجسيمات....

فتبارك الله أحسن الخالقين.

(وَفِي الْأَرْضِ قِطَعٌ مُّتَجَاوِرَاتٌ وَجَنَّاتٌ مِّنْ أَعْنَابٍ وَزَرْعٌ وَنَخِيلٌ صِنْوَانٌ وَغَيْرُ صِنْوَانٍ يُسْقَىٰ بِمَاءٍ وَاحِدٍ وَنُفَضِّلُ بَعْضَهَا عَلَىٰ بَعْضٍ فِي الْأُكُلِ ۚ إِنَّ فِي ذَٰلِكَ لَآيَاتٍ لِّقَوْمٍ يَعْقِلُونَ (4)) الرعد

(وَمَا ذَرَأَ لَكُمْ فِي الْأَرْضِ مُخْتَلِفًا أَلْوَانُهُ ۗ إِنَّ فِي ذَٰلِكَ لَآيَةً لِّقَوْمٍ يَذَّكَّرُونَ (13)). النحل



بين الكثافة الطبولوجية ومسلمة الإختيار ... مبرهنة هان باناخ كنموذج

لو نظرنا إلى مبرهنة هان باناخ في فضاء ثلاثي الأبعاد لوجدناها تقول أنه إذا كان لدينا تطبيق خطي في مستوى – أي مستقيم إذا كان غير بديهي – أصغر من منحنى تطبيق محدب في ثلاثة ابعاد كما في الصورة فإنه يمكننا تمديد التطبيق الخطي إلى مستوي في الفضاء الثلاثي الأبعاد ليبقى تحت المنحنى المحدب للتطبيق .

المسألة تبدو سهلة في الأبعاد المألوفة فتمديد مستقيم ليصبح مستوى يبقى تحت تحدب منحنى شيء يتصوره العقل لأن تحدب المنحنى يجعلنا نستطيع رسم تحته مستو يمر بمستقيمنا يقسم الفضاء لقسمين فمستقيمنا أصلا في النصف السفلي من الفضاء.

لكن الذي تأتي به مبرهنة هان باناخ هو تعميم النتيجة على الفضاءات غير منتهية الأبعاد.

فقد يقال يمكننا برهان ذلك بالتراجع بإضافة بعد ثم بعد إلى أن نمر للمالانهاية لكن هذا لا يصلح إلا في الأبعاد القابلة للعد أما غير القابلة للعد فيلزمنا اللجوء إلى مسلمة الإختيار.

مسلمة الإختيار تساعدنا على تعميم خواص مألوفة على مجموعات قابلة للعد نحو مجموعات غير قابلة العد ولا يهمنا عدم إمكانية بناء هذه الخواص المعممة لكن المهم أننا نعالج خواصا في مجموعات غير القابلة للعد كما نعالجها في مجموعات قابلة للعد .

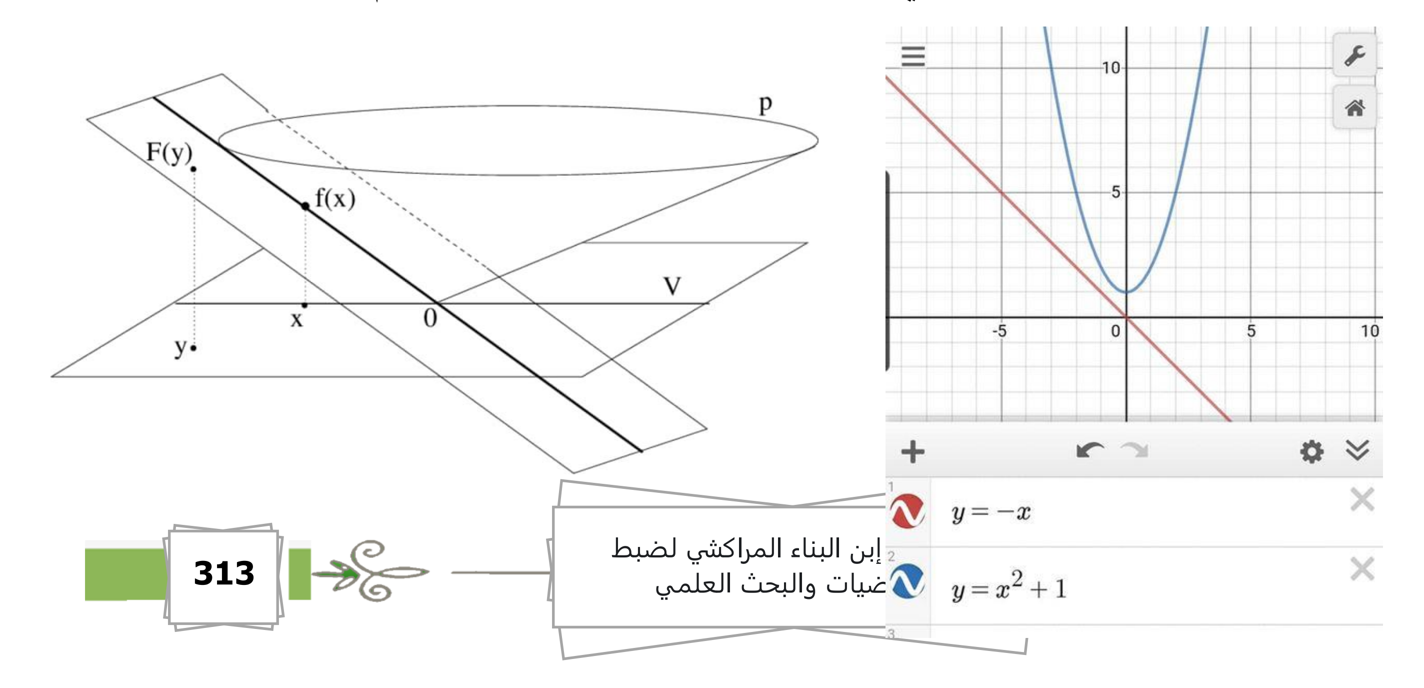
فلا ننسى أنه عند تطبيق هذه المبرهنات في الواقع نلجأ للتقريب والذي يمر عادة عبر كتابة عشرية منتهية في حدود إرتياب عدد الأرقام بعد الفاصلة المختار وهذه مجموعة أعداد منتهية.

فنحن في النهاية نمر لمجموعات منتهية أي يمكننا تطبيق الخواص كما ألفناها قبل تعميمها بمسلمة الإختيار.

المفيد في مثل هذه المجموعات العشرية أنه يمكننا تقريبها من مجموعتنا غير القابلة للعد كما نريد لأنها مجموعة كثيفة في R .

وهنا تظهر العلاقة الخصبة بين الكثافة الطبولوجية ومسلمة الإختيار...

فالكثافة الطبولوجية تساعدنا على التقريب أما مسلمة الإختيار فتساعدنا على تعميم التصور.



توطئة الإنقسام الثلاثي في المقارنة بين المجموعات Lemme de trichotomie

معروفة بمبرهنة المقارنة بين قدرة مجموعتين A و B أي أنه يمكننا دائما مقارنة عدد عناصر مجموعتين بواسطة تطبيق غامر، إما هناك تطبيق غامر من A نحو B أو العكس.

لكن رفع الحالة الثالثة وهي استحالة المقارنة بين قدرة مجموعتين A و B هو مكافئ لمسلمة الإختيار.

http://xavier.toonywood.org/popularization/choix.pdf

https://fr.wikipedia.org/.../Trichotomie_(math%C3...

Un dernier. L'axiome du choix est encore équivalent à ce que l'on appelle le lemme de trichotomie. Il dit que si X et Y sont deux ensembles quelconques, alors soit il existe une injection de X dans Y, soit il existe une injection de Y dans X. Pour une bonne définition de cardinal, il dit que les cardinaux sont totalement ordonnés.

Nous démontrerons au paragraphe 4.5 l'équivalence de toutes ces propriétés avec l'axiome du choix mais admettons-les pour le moment et voyons comment on les utilise.



نظرية المجموعات حسب مفهوم عبابو

محمد عبابو مشهور بمنشوراته في المجموعات الفيسبوكية التي يزعم فيها أن نظرية الأعداد غير المحدودة لا أساس لها من الصحة وأن في الواقع لابد وأن هناك حد للأعداد.

في الحقيقة محمد عبابو **يتوهم** وجود الأعداد في الواقع لكن مفهوم العدد هو مفهوم ذهني فالذهن من يتصور وجود صفة اسمها واحد أو إثنين أو ثلاثة ... يمثل بهذه الصفة التكرار الذي يراه في الواقع.

لا يوجد في الواقع عدد بذاته كواحد أو إثنين ... إنما يوجد شيء يوصف بهذه الصفة.

إذا تبين هذا فتصور عدم المحدودية في الذهن مقبول لأن الرياضيات لا تشترط المطابقة للواقع وإن كانت تستوحي كائناتها منه.

لكن دعنا ننظر لنظرية المجموعات بمفهوم عبابو إذا أردنا تقييدها بقيد المحدودية أي أنه لا يمكننا في الواقع تجاوز حد معين من التكرار وهذا يعود إلى فرض قيمة أعظمية للتكرار.

إذن فعلى نظرية عبابو لا يمكننا صناعة مجموعة أعداد طبيعية غير منتهية بل تقف عند حد معين وليكن M .

لكن ماذا يحدث لو أضفنا لهذا الحد واحد ؟

حسب مفهوم عبابو ذلك مستحيل لإستحالة التوفر على M و 1 أي لا يمكننا صناعة مجموعة فيها M تكرار و 1 معه لكن كيف نحد ذلك من الناحية المسلماتية ؟

عبابو يقول أنه إذا أرجعنا المجموعة لمكوناتها الأولية فلا يمكننا تجاوز M .

وهذا يعني أن كائنات عبابو هي مكونة من عدد معين من العناصر.

أي أن في نظرية عبابو لا يمكننا الانطلاق من المجموعة الخالية وتكرارها وإلا سقطنا في تناقض مع الحد الأعلى M .

أي أن المسلمة الأولى لنظرية المجموعات لعبابو أن هناك M عنصر نسلم بوجودها وأن المجموعات هي تركيبات من هذه العناصر بشرط أن كل عنصر يمكن إستعماله مرة واحدة.

فإذا صنعنا مجموعة من عنصرين $\{m_1,m_2\}$ ثم صنعنا مجموعة من هذه مع عنصر جديد $\{\{m_1,m_2\},m_3\}$ فإن m_3 لا يمكنه أن يكون m_1 و m_2 وإلا لأمكننا بتكرار m_1

$\{m_1,\{m_1\},\{\{m_1\}\}, ...\}$

أن نصنع مجموعة تتعدى الحد الأعلى M .

لو تأملنا جيدا نظرية المجموعات لعبابو يتبين لنا **أمران:**

الأول أن تعريف M نفسه مشكل إذ كيف نعطيه مفهوم العدد قبل صناعة مجموعة الأعداد الطبيعية N ؟

وعليه نظرية عبابو لا يمكنها أن توجد إلا بوجود نظرية الأعداد التي لا حد لها وهذا يناقض نظرية عبابو نفسها.



الثاني : أن أعداد عبابو ما هي إلا الكائنات الموجودة في الواقع فهو لا يقوم بتجريد مفهوم العدد إنما يعتبر العدد نفسه هي أجزاء المادة المكررة ومن هنا وصل لمشكلة الحدية.

فنظرية عبابو ليست نظرية عددية ولا مجموعاتية إنما هي مشكلة امكانية تمثيل الأعداد في الواقع لعدم توفر المادة الكافية لذلك.



المنطق وطرق البرهنة



المنطق كأنك تراه

يا أستاذ حدثني عن المنطق ؟

الجزء الأول : أصل المنطق، الروابط المنطقية، المنطق الشكلي والمنطق الحدسي.

الملاحظ في طريقة تفكير العقل البشري أنه يجمع بين ملاحظات الكائنات وخصائصها فعندما نقول هذه تفاحة حمراء فنحن لاحظنا وجود التفاحة وخاصية من خصائصها وهي اللون الأحمر.

العقل البشري يستطيع مقارنة الأشياء بخصائصها ويربطها ببعض ليستنتج أسباب ما يقع حوله أو ما قد يقع حوله لأن العقل البشري يعيش في الزمن.

فإذا رأينا أثر سير في الصحراء علمنا أن أحدهم سار من هنا وإن لم نكن نره.

الذي فعله البشر هو محاولة ضبط طريقة التفكير هذه عن طريق تجريدها ومن هنا ظهرت الرياضيات.

ففي الرياضيات نتعامل مع شيئين:

الكائنات الوجودية وهي المجموعات فالمجموعة تمثل تجريد الموجودات.

والقضايا المنطقية وهي جمل أو أوصاف يمكن تصديقها أو تكذيبها فبهذا يمكنه وصف الكائنات.

كما يمكن للبشر تركيب الموجودات بضمها لبعضها البعض أو فصلها عن بعض فهو كذلك قادر على ضم القضايا المنطقية وفصلها بل يمكنه ربطها ببعض بما يسمى الاستلزام الطبيعي،

أليس كوننا رأينا أثر المسير على الرمل دلنا على مرور سائر من هنا ؟ فهذه قضية استنتجناها من أخرى.

عندما اندلعت أزمة الأساسيات في بداية القرن العشرين قرر العلماء إعادة بناء الرياضيات على أسس سليمة لا تتناقض فصنعوا ما يسمى بنظرية المجموعات ZFC والتي تهتم بالكائنات الموجودة.

إلى جانب ذلك حاولوا بناء المنطق على أسس مسلماتية.

لكن ما هو المنطق ؟

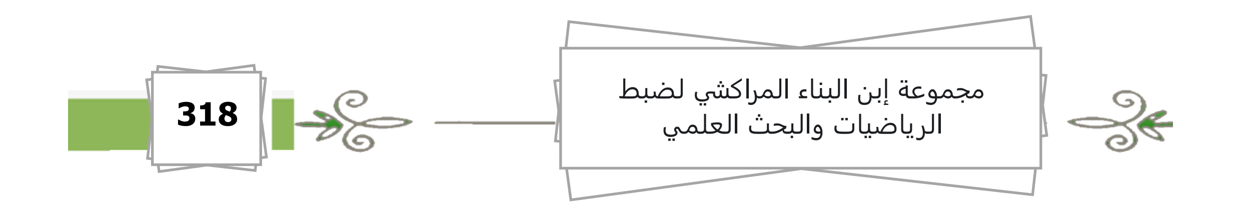
فالمنطق هو آلة تفكير للرياضيات يمكن من خلالها توضيح الطريق المتبعة من الرياضياتي لبرهنة الصحة في الرياضيات فهو الذي يبين ما هو ببرهان بما هو ليس برهان فهو الفيصل بين الصحة والخطأ فكل ما سار على قواعده هو مقبول وكل ما خالفها فهو مرفوض

لذلك المنطق يهتم بالقضايا والعلاقة بينها وطرق البرهنة عن طريق السير وفق قواعد لصناعة قضايا جديدة.

أصل المنطق هو تفكير العقل البشري لذلك هو يجرد هذا التفكير فيتكلم على القضية هل هي صحيحة أو خاطئة.

التفاحة حمراء ؟ الطماطم من الخضروات....

فهو يجرد القضية ويشير إليها بترميزات مثلا P لكن لا يهمه ما داخل P قدر ما يهمه هل P صحيحة أو خاطئة.



البشر لا يكتفي بوصف الأشياء بخصائصها بل يصفها كذلك بما لا تتصف به كقولنا التفاحة ليست برتقالة ولذلك الرياضيات تجرد هذا بنفي القضية فتستعمل رمز النفي $\neg P$ للدلالة على نفي القضية P .

هناك من يرمز كذلك للنفي بخط فوق القضية.

البشر كذلك يتكلم عن وصل القضايا فقضيتان يمكن تشكيل قضية جديدة منهما فالتفاحة حمراء وكروية ولذلك يكتب الوصل بهذه الطريقة:

$$P \wedge Q$$

وكذلك الفصل فلكي تنير الغرفة إما تفتح الستار ليدخل ضوء الشمس أو تشعل المصباح فيرمز لذلك بـ

$$P \vee Q$$

فكما لاحظ البشر أن الأشياء في الكون تتسم بالتركيب و يمكنه تقسيمها وتجميعها لاحظ كذلك أن نفس المسألة يمكنه القيام بها على القضايا.

بل لاحظ أن هناك تلازما بين القضايا كما رأينا في مسألة أثر السير يدل على المسير ولذلك صنع رمزا للتلازم فإذا وجدت قضية وجدت أخرى فصنع ما يسمى بالاستلزام

$$P \Rightarrow Q$$

قد يظن البعض أنه استلزام لنتائج زمنية أي حدثت P فأنتجت Q وهذا خطأ فوجود أثر سير في الصحراء يدل على مرور أحد من هنا رغم أن مرور أحد هو سبب الأثر.

بل هناك تكافؤ فإذا مر أحد ترك أثر سير وإذا وجد أثر سير فقد مر أحد من هنا وهذا ما ترمز إليه الرياضيات بـ

$$P \Leftrightarrow Q$$

وهو استلزام في الجهتين أي يمكننا كذلك أن نعبر عليه بـ

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

فكما نرى يمكننا إجراء عمليات منطقية لصناعة قضايا جديدة،

فتسمى هذه الروابط الأولية بالروابط المنطقية وهي

الفصل $\vee$

والوصل $\wedge$

والاستلزام $\Rightarrow$

والتكافؤ $\Leftrightarrow$

فيمكننا استعمالها للمرور من قضية لأخرى وهنا تكمن أهمية المنطق إذ يحاول الرياضياتيون بناء الرياضات على نظام مسلماتي أي يسلمون بقضايا ثم يستنبطون منها أخرى فالمنطق هنا يساعدهم على رسم هذه الطريق من المسلمات نحو المبرهنات الجديدة.

قد يبدو الأمر سهلا هكذا لكن عند التدقيق في آراء العلماء سنجد صناعة منطق متكامل ليس بالأمر الهين.



بعد أزمة الأساسيات اختلف العلماء على ثلاث فرق:

المنطقيون بزعامة راسل وهؤلاء يرون أن الرياضيات هي نفسها هذه الكتابات المنطقية.

أصحاب المنطق الشكلي بزعامة هلبرت وهؤلاء يرون أن المنطق يمكن أن يبنى على نظام مسلماتي غايته البحث في صحة أو خطأ القضايا.

أصحاب المنطق الحدسي بزعامة بروير وهؤلاء يرون أن المنطق مجرد طريقة تدوين لطريقة تفكير البشر وأن الرياضيات ليست فقط صحة القضايا بل لابد من بناء الطريق نحو هذه الصحة.

عند التأمل في رأي فريق المنطقيين نجده مستبعدا فنحن نعلم أن الرياضيات أكثر من مجرد كتابات منطقية بل هي أفكار جمعناها لبناء كائنات ثم جعلتنا نختار طريقا دون غيره للبرهنة فهذه الأفكار نفسها وأسباب اختيار الطريق لا ندونها بالمنطق بل عادة ما نضيفها شرحا للبراهين.

أما المنطق الحدسي فهو كما يبدو جزء من المنطق الشكلي يختلف عنه بأنه يرفض التسليم بصحة قضايا دون بناء طرق نحوها.

فعلى هذا سنجد بعض المسلمات المنطقية في المنطق الشكلي لا يقبلها المنطق الحدسي وأهمها مبدأ الثالث المرفوع.

فمن الأشياء التي تقبلها عقولنا أن القضية إن لم تكن صحيحة فهي خاطئة أي نحن نرى أنه إما القضية صحيحة أو القضية خاطئة أي نسلم بصحة: $P \vee \neg P$

ولا نرى مسألة ثالثة غير هاذين أي نحن نسلم أنه إذا كان نفي P خاطئة ف P صحيحة.

$\neg P \Rightarrow P$

هذه في الحقيقة مسلمة في المنطق الشكلي لكن المنطق الحدسي لا يقبلها فهو يرى أننا لم نبين ببرهان بنائي على صحة P إنما سلمنا بذلك من صحة نفيها.

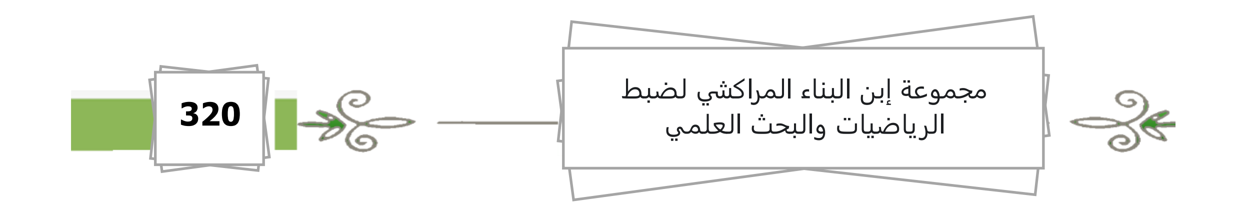
قد تقولون هذا غير معقول ؟ فأقول لكم المسألة ليست بالهينة من عدة نواحي.

فلا أحد يمكنه الجزم بأنه يمكن الحكم على أي قضية بالصحة أوالخطأ وقد بين هذا غودل في مبرهنته المسماة مبرهنة عدم الاكتمال فهناك قضايا غير قابلة للتقرير أي ليست صحيحة ولا خاطئة لأنها ببساطة خارج النظام المسلماتي المتبع.

يمكننا رؤية القضايا داخل نظام مسلماتي كخزانات ماء مرتبطة ببعضها بشبكة أنابيب معقدة فإذا ملأنا بعضها بالماء وزعته على غيرها فكل ما وصله الماء نسميها قضايا صحيحة وكل ما لم يصله بخاطئة.

لكن قد تكون هناك خزانات ليست أصلا في شبكة المياه هذه فهذه لا يمكننا الحديث عليها بالصحة أوالخطأ.

الأمر الثاني هل كون الخزان غير فارغ يعني أن فيه ماء ؟ المنطق الشكلي يقول نعم لأنه لا يوجد إلا حالتين حسب مبدأ الثالث المرفوع : الخزان فيه ماء أو فارغ فإن لم يكن فارغ ففيه ماء.



أصحاب المنطق الحدسي يرفضون هذا فقد يكون الخزان غير فارغ لكن مملوء بالرمل مثلا ... فما لم نبين أن فيه ماء فلا يمكننا الحكم بذلك.

ومن هنا تظهر خلافات بين المنطقين فكل ما هو صحيح حسب المنطق الحدسي صحيح في المنطق الشكلي لكن العكس غير صحيح.

وعلى هذا يمكننا أن نستعمل ما نسميه البرهان بالخلف في المنطق الشكلي أي إذا أردنا برهنة صحة قضية P يكفي أن نبرهن خطأ نفيها والخطأ هنا يعني مناقضتها لمسلماتنا التي ننطلق منها أو أحد القضايا مما أثبتنا صحتها من مسلماتنا.

لذلك إذا أردنا أن نبين مثلا أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما

$$x + 1/x \geq 2$$

يمكننا أن ننطلق من نفيها أو نقيضها فنصل لتناقض فإذا كان نفيها خطأ فالقضية صحيحة، إذن ننطلق من

$$x + 1/x < 2$$

فنجد

$$x^2 + 1 < 2x$$

أي

$$(x-1)^2 = x^2 + 1 - 2x < 0$$

وهذا تناقض فنكون بذلك برهنا على صحة

$$x + 1/x \geq 2$$

لكن هذا البرهان غير مقبول على المنطق الحدسي لأنه استعملنا مبدأ الثالث المرفوع.

لذلك على المنطق الحدسي لابد أن نصنع برهانا بنائيا مثل أن نقول بما أن

$$(x-1)^2 = x^2 + 1 - 2x \geq 0$$

فلدينا

$$x^2 + 1 \geq 2x$$

ومنه

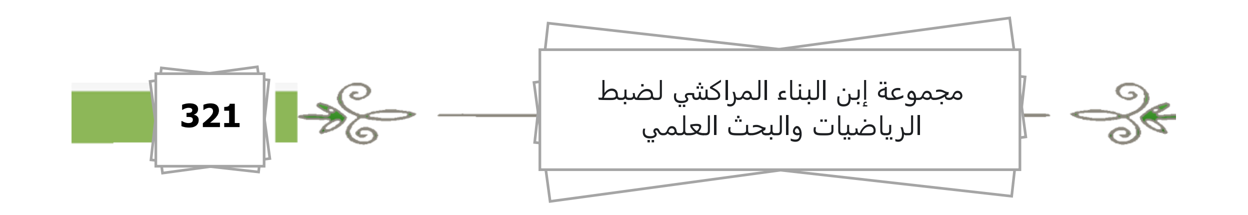
$$x + 1/x \geq 2$$

المنطق الحدسي رغم أنه يحاول محاكاة التفكير الطبيعي للبشر إلا أنه قد يؤدي إلى مسائل لا يقبلها العقل فمثلا المجموعة غير الخالية في المنطق الشكلي سيكون فيها حتما عنصر.

أما على المنطق الحدسي كون المجموعة غير خالية لا يعني أن فيها عنصر !! فيسمون المجموعة التي فيها عناصر بالمجموعة المأهولة.

المنطق الحدسي لا يقبل كذلك مبرهنة القيم المتوسطة لأنها تستعمل مبدأ الثالث المرفوع.

هو لا يقبل مسلمة الاختيار لأنها لا تبين طريقة الاختيار.

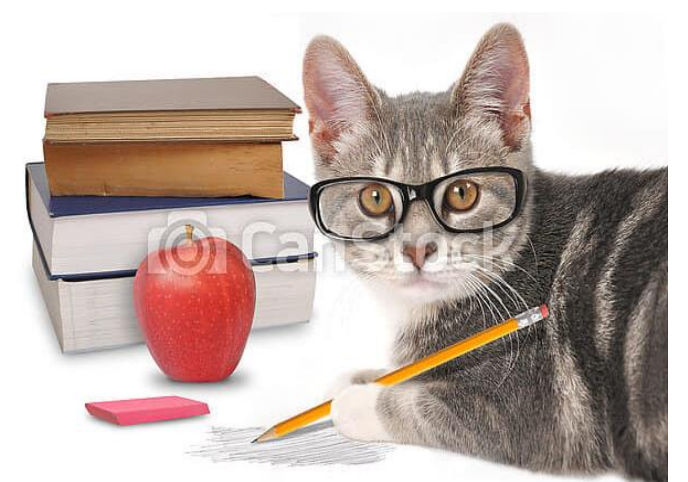


المنطق الحدسي يرى أنه في الرياضيات لا يكفي فقط برهنة صحة القضايا بل لابد من طرق برهان بنائية توصل لذلك لأنه في الواقع هذه الطرق ستترجم بخوارزميات بنائية فلا فائدة من ذكر صحة قضية إن لم يمكن تطبيق ذلك على الواقع.

أما المنطق الشكلي فيرى أن الرياضيات مجردة عن الواقع لذلك لابد أن لا يتعلق المنطق بمحتوى القضايا إنما يتعلق فقط بصحتها أو خطئها.

لكن ما هو البرهان وكيف يبنى بواسطة الروابط المنطقية ؟

هذا سيكون موضوع منشورات قادمة...







المنطق كأنك تراه

يا أستاذ حدثني عن المنطق ؟

الجزء الثاني : الشبكة المنطقية، جدول الحقيقة، المكممات

هل هذه قضية صحيحة ؟

الطائرة تطير = $Q \Rightarrow$ التفاحة حمراء = P

ذكرنا في الجزء الأول من منشورات المنطق أن غرض الرياضيات تجريد الواقع عن طريق تجريد تفكير العقل البشري.

فالبشر يرون الكون من ناحيتين من ناحية الوجود ومن ناحية خصائص الموجودات.

أما الوجود فجردته الرياضيات بنظرية المجموعات فكل عناصر يميزها العقل البشري يسميها مجموعة.

ويجري العقل البشري عمليات على المجموعات من حيث التركيب بالاتحاد والفصل بالتقاطع والاختيار والمقارنة بالاحتواء فكل هذه تمكنه من صناعة مجموعات جديدة.

قام الرياضياتيون ببناء الرياضيات على مسلمات بسيطة سموها نظرية المجموعاتZFC .

أما خصائص الكائنات فجردها البشر عبر القضايا فالقضية هي عبارة يمكن الحكم عليها بالصحة أو الخطأ.

وكما فعلوا مع المجموعات فعلوا مع القضايا عبر علم سموه بالمنطق فبنوه على مسلمات بسيطة توافق تفكير العقل البشري.

في المنطق يتكلم الرياضياتيون عن صحة القضية وخطئها.

يصنعون من قضيتين قضية جديدة بالوصل أو الفصل وهذا محاكاة لما يفعله البشر.

فعندما نقول التفاحة حمراء وكروية ففي الحقيقة هذه قضية جديدة مصنوعة من قضيتين بالوصل

التفاحة حمراء : P

التفاحة كروية : Q

ومنها صنعوا قضية جديدة بالوصل بالرمز

التفاحة حمراء وكروية : $P \wedge Q$

القضية الجديدة تكون صحيحة إذا كانت كل من القضيتين P و Q صحيحتين.

أما الفصل فمثال ذلك قولنا هذه التفاحة حمراء أو خضراء فتكتب هكذا

التفاحة حمراء : P

التفاحة خضراء : Q

التفاحة خضراء أو حمراء : $P \vee Q$

فتكون القضية الجديدة صحيحة إذا كان أحد من P و Q صحيحتين أو كلاهما.



ولو لاحظنا حتى هذه الجملة هي قضية استنتاجية ذلك أننا انطلقنا من P و Q فصنعنا قضية جديدة وهذا ما يسمونه بالاستلزام و يكتب

صحيحة $(P \vee Q) \Rightarrow$ Q صحيحة V صحيحة P

والجملة السابقة

صحيحة $(P \wedge Q) \Rightarrow$ Q صحيحة $\wedge$ صحيحة P

تكلمنا كذلك على التكافؤ بأنه استلزام في اتجاهين وضربنا كمثال أن السير في الصحراء يترك أثرا ووجود الأثر يدل على السير

السير في الصحراء : P

أثر السير : Q

وجود أثر السير يكافئ وجود السير : $P \Leftrightarrow Q$

أي

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$$

فكما تلاحظون نستطيع بهذه الترميزات صناعة قضايا معقدة نعرف صحتها من صحة ما صنعت به وهذا ما نسميه البرهان في الرياضيات.

يمكننا رؤية القضايا داخل نظام مسلماتي كخزانات ماء مرتبطة ببعضها بشبكة أنابيب معقدة فإذا ملأنا بعضها بالماء وهذا ما نسميه بالمسلمات وزعته على غيرها فهذه هي النتائج فكل ما وصله الماء نسميه قضايا صحيحة وكل ما لم يصله بخاطئة.

لكن نحتاج لأكثر من وصف حدسي هنا لتقنين الربط فلابد أن نضع قواعد منطقية متينة لا تتعلق بالذوق البشري لكي يكون بناء القضايا الجديدة مقبولا رياضيا.

وهنا ظهر الخلاف بين الرياضياتيين فظهر أصحاب المنطق الشكلي بزعامة هلبرت فقالوا لابد أن نصنع نظاما مسلماتيا منطقيا كما صنعنا نظاما مسلماتيا مجموعاتيا.

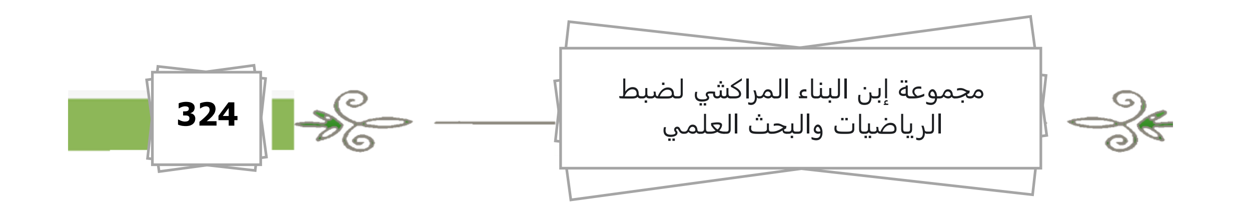
وهكذا بهذه المسلمات المنطقية وبنظرية المجموعات ZFC نستطيع صناعة قضايا جديدة نسميها المبرهنات.

فإذا أردنا أن نصنع قواعد للمنطق لابد أن تكون هذه الروابط المنطقة متعلقة بصحة القضايا أو خطئها ولا تنظر لما فيها فهذا غاية التجريد.

فعلى هذا عندما نكتب الوصل كرابط منطقي نستنتج صحة قضية $P \wedge Q$

من صحة P و صحة Q ولا نحتاج أن ننظر ما هي P و ما هي Q .

فأصحاب المنطق الشكلي يرون أن هذه الروابط المنطقية كتطبيقات منطقية تنطلق من الحكم علىP والحكم على Q لتصل للحكم على القضية الجديدة المعرفة بالرابط المنطقي بين P وQ .



قد يقول قائل كيف يمكن أن نتكلم عن التطبيقات والمنطق يظهر قبل المجموعات فالجواب هذا مفهوم عام للتطبيق أو الدالة هو أعم من مفهوم تطبيقات المجموعات فعندما نقول القضية صحيحة فهذه دالة منطقية صنعناه من القضايا نحو الحكم عليها.

لا نحتاج في التطبيقات أو الدوال المنطقية أن نلجأ للمجموعات.

فإذا رمزنا للصحة بـ 1 و الخطأ بـ 0 أمكننا صناعة جدول بسيط فيه القيمة الممكنة ل P والقيمة الممكنة ل Qوما ننتظره بالربط بينهما.

فإذا أخذنا الوصل والحالات الممكنة ل P و Q نجد ما يوافق:

حالة P صحيحة و Q صحيحة سنعتبر $Q \wedge P$ صحيحة أي بلغة الصفر والواحد

$1 \wedge 1 = 1$

وهذا يوافق ما يفكر به العقل البشري

حالة P صحيحة و Q خاطئة سنعتبر $Q \wedge P$ خاطئة أي بلغة الصفر والواحد

$1 \wedge 0 = 0$

ونفس الشيء للعكس

$0 \wedge 1 = 0$

وإذا كان كل منهما خاطئا فالوصل خاطئ كذلك

$0 \wedge 0 = 0$

هذا ما نسميه بجدول الحقيقة فهو يمكننا من مقابلة نموذج بنموذج حسب قيم الحقيقة وهو يعمل على ما يسمى بالجبر البولي الذي يرى الروابط المنطقية كدوال من $\{0,1\} \times \{0,1\}$ نحو $\{0,1\}$

فإذا أخذنا حالة الفصل نجد أربع حالات كذلك:

حالة P صحيحة و Q صحيحة تكون P أو Q قضية صحيحة

$1 \vee 1 = 1$

حالة P صحيحة و Q خاطئة فـ P أو Q صحيحة كذلك

$1 \vee 0 = 1$

ونفس الشيء للعكس

$0 \vee 1 = 1$

حالة كل منهما خاطئ فتكون P أو Q قضية خاطئة

$0 \vee 0 = 0$

ننتقل الآن للتكافؤ لبساطته وسنترك الاستلزام للأخير

فتكافؤ P مع Q حدسيا يقودنا للقول أنه يجب أن يكون لكلاهما نفس الحكم لذلك:

حالة P صحية و Q صحيحة فهما متكافئتان

$(1 \Leftrightarrow 1) = 1$



وكذلك P خاطئة و Q خاطئة فالخطأ يكافئ الخطأ.

$(0 \Leftrightarrow 0) = 1$

لكن إن كانت إحداهما صحيحة والأخرى خاطئة فلا يمكن أن يكون بينهما تكافؤ أي

$(1 \Leftrightarrow 0) = (0 \Leftrightarrow 1) = 0$

بقي الاستلزام:

فإذا كانت لدينا P صحيحة فالذي يقوله لنا العقل أنه إذا استنبطنا منها Q صحيحة فلابد أن يكون الاستلزام صحيحا أي

$(1 \Rightarrow 1) = 1$

ولا يمكن أن نستنبط باستلزام صحيح Q خاطئة اي

$(1 \Rightarrow 0) = 0$

أي هذا استلزام خاطئ

بقيت حالتين : هل يمكن أن نستنبط الخطأ من الخطأ ؟ نعم هذا يوافق العقل كذلك

$(0 \Rightarrow 0) = 1$

وهل يمكن أن نستنبط الصواب من الخطأ ؟ هنا تظهر مشكلة فإما نضع أن ذلك غير ممكن أي

$(0 \Rightarrow 1) = 0$

لكن لو فعلنا هذا سيصبح هذا جدول التكافؤ الذي رأيناه قبل فهذا ليس باستلزام

إذن الأصوب أن نقبل احتمالية خروج الصواب من الخطأ

$(0 \Rightarrow 1) = 1$

أي نقول أنه يمكن

$(0 \Rightarrow 0) = 1$

او

$(0 \Rightarrow 1) = 1$

أي الخطأ يمكنه أن يستلزم الصواب أو الخطأ

فنكون بهذا أعطينا تعريفا لروابطنا المنطقية بدون النظر لما في القضايا فهذا غاية التجريد.

قد نظن لأول وهلة أن هذا موافق للواقع، نعم هو كذلك لكن ليس كما نتصوره.

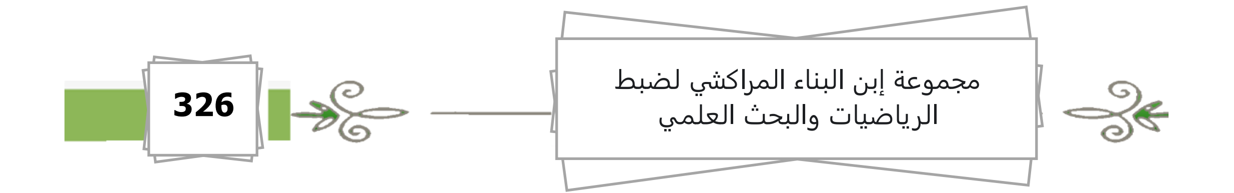
فكتابتنا $P \Rightarrow Q$ لا تعني في المنطق الشكلي أننا فعلا وجدنا Q من خلال عمليات فكرية انطلاقا من P .

بعبارة أخرى يمكننا أن نكتب في المنطق الشكلي

P = التفاحة حمراء $\Rightarrow$ Q= الطائرة تطير

وهذا قد يصدم العقل لأول وهلة لأنه لا يرى علاقة بين التفاحة والطائرة لكن المنطق الشكلي يقول هذا استلزام صحيح لأنه من نوع

$1 \Rightarrow 1$



فكيف نفسر ذلك ؟
المنطق الشكلي كما ذكرنا يرى أن المنطق شبكة تصل بين خزانات نملأ بعضها وهي ما نسميه مسلمات فينتقل الماء لخزانات أخرى وهي القضايا الصحيحة.
فالمنطق الشكلي لا يهمه كيف وصل الماء لخزان معين المهم أنه وصل لذلك هو يقول في ظل الشبكة المنطقية القائمة على نظام مسلماتي كون P و Q صحيحان كاف للقول أن بينهما علاقة ولا يهم كيف هي فانتماؤهما لنفس الشبكة مع امتلائهما هي علاقة صحيحة في حد ذاتها.
وهذا في الحقيقة موافق للواقع فقد يبدو لأول وهلة أنه لا علاقة بين التفاحة الحمراء وطيران الطائرة لكن لو تمعنا جيدا فوجود كليهما هو نتيجة لتواجدهما في الأرض فالعلاقة موجودة بل تفسر بالقوانين الفيزيائية والبيولوجية القائمة على البنية الذرية للمادة التي أدت لوجود كليهما.
لذلك المنطق الشكلي يرى أن الروابط المنطقية تتعلق فقط بالحكم على القضايا التي تربطها ولا يوجد شيء زائد عن ذلك.
ومتى عرفنا هذه الروابط يمكننا صناعة قضايا جديدة.
أصحاب المنطق الحدسي لا يوافقون أصحاب المنطق الشكلي في هذه النقطة بل يطلبون تحديد المسار الذي سلكناه لاستنتاج Q من P فهم لا يقبلون جدول الحقيقة كما هو معرف عند اصحاب المنطق الشكلي.
لذلك إذا عرفنا نفي P بالقضية التي تأخذ عكس حكم P يمكننا وضع جدول الحقيقة لنفي P هكذا

$$P = 1 : \neg P = 0$$
$$P = 0 : \neg P = 1$$

وعليه سنجد حسب جدول الحقيقة الذي سيساعدنا في مقارنة النماذج

$$P = 1 : \neg P = 0 : \neg\neg P = 1$$
$$P = 0 : \neg P = 1 : \neg\neg P = 0$$

فنجد تكافؤا بين P و نفي نفي نفسها

$$P \Leftrightarrow \neg\neg P$$

لكن أصحاب المنطق الحدسي لا يقبلون هذا بل يقبلون نصفه، هم يقولون يمكننا أن نقبل

$$P \Rightarrow \neg\neg P$$

لأنه إذا وجدنا برهانا ل P يمكننا صناعة نفيه ثم نفي نفيه لكن العكس غير ممكن فلا يقبلون

$$\neg\neg P \Rightarrow P$$

وأصل المشكلة أنهم لا يقبلون مبدأ الثالث المرفوع، فعلى المنطق الشكلي يمكننا أن نتأكد ببساطة أنه يوجد حالتين ل P و نفيها فإذا كان P صحيحة فنفيها خاطئ وإلا العكس أي القضية التالية صحيحة

$$P \vee \neg P$$

فلا توجد حالة ثالثة، أما أصحاب المنطق الحدسي فلا يقبلون هذا ذلك أنهم يرون أننا لم نصنع برهانا هنا إلا التسليم بامكانية نفي النفي.



ولو تأملنا جدول الحقيقة للاستلزام سنجد أن هناك تكافؤا بين

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

أي أنه إما P خاطئة فلا يهمنا حكم Q لأنه كما سبق وجدنا أن الخطأ يمكنه أن يستلزم الخطا أو الصواب وإلا إذا كانت P صحيحة فلابد أن نجد Q صحيحة.

وهذا كذلك قائم على مبدأ الثالث المرفوع.

كيفما كان المنطقين الشكلي أو الحدسي فإنه بتعريف هذه القواعد المنطقية أصبح تدوين البراهين سهل عن طريق رسم الروابط بين المسلمات والقضايا الجديدة.

كن قبل هذا لابد أن نضيف المكممات المنطقية فكما تكلمنا سابقا عن الدوال المنطقية التي تأخذ قضية نحو صحتها أو خطئها فيمكننا أن نتصور القضايا بمتغير فتصبح عبارات منطقية تأخذ صفة القضية عند تعويض المتغير مثال ذلك:

كل طائر له جناحين ، فلفظ كل يحتاج لترجمة فنترجمه بلفظ مهما يكن ونرمز له بـ $\forall$ فتصبح عبارتنا المنطقية

$\forall$ x : x طائر $\Rightarrow$ x عنده جناحين

نسمي $\forall$ بالمكمم الكلي أو الشمولي فهو مكمم منطقي يخول لنا كتابة دوال قضايا أو ما نسميه عبارات منطقية.

فتكون عبارتنا P(x) عند كل x تكون قضية يمكن الحكم عليها بالصحة أو الخطأ.

لكن هل يوجد شيء له جناحين ليس بطائر ؟ نعم الطائرة مثلا وهذه نكتبها هكذا

$\exists$ x : x عنده جناحين $\wedge$ x ليس بطائر

فالمكمم $\exists$ مكمم وجودي

يمكننا كذلك كتابتها هكذا

$\exists$ x : x عنده جناحين $\wedge$ $\neg$(x طائر)

لأن نفي x طائر هو x ليس بطائر.

فتكون العبارة صحيحة إذا كانت صحيحة عند كل قيمة لمتغير.

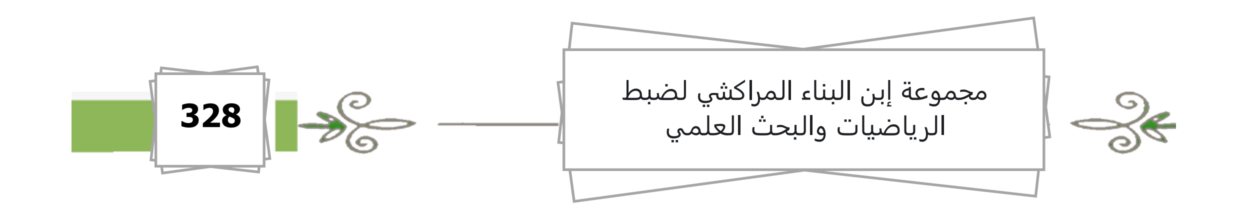
مثلا لو كتبنا

$\exists !$ x : x عنده جناحين $\wedge$ $\neg$(x طائر)

أي يوجد x وحيد وهذه تكتب بالمكمم الوجودي مع الوحدانية $\exists !$

فتصبح عبارتنا خاطئة لأنه يوجد أكثر من كائن عنده أجنحة وليس بطائر فالطائرة ليست وحيدة.

يمكننا بهذه اللغة الشكلية الانطلاق من المسلمات والتعريفات لصناعة قضايا جديدة وهذا ما نسميه بالبرهان.



مثال ذلك نعرف الاحتواء بـ

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

فهذا تكافؤ معرف بالوضع فنسلم به

وكذلك نعرف التقاطع بالوضع

$$\forall x : x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

وبواسطة جدول الحقيقة أو ما نستنبطه منه يمكننا صناعة قضايا جديدة من هذه القضيتين فمثلا نعلم من جدول الحقيقة أن

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

يمكن التأكد بذلك بسهولة حسب حالات P و Q ومتى يكون الاستلزام صحيحا.

فيمكننا بربط تعريف التقاطع مع هذا الاستلزام أن نكتب:

$$\forall x : x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

$$\Rightarrow x \in A$$

فوجدنا هنا

$$\forall x : x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$$

وهذا تعريف الاحتواء السابق أي

$$A \cap B \subset A$$

هكذا يمكننا أن نصنع قضايا جديدة من المسلمات والتعريفات عن طريق تحويل القضايا بالروابط المنطقية فبمثل هذا نجد مثلا:

مبرهنة طاليس ⇔ مبرهنة فيثاغورث

فبواسطة المنطق الذي يقنن هذه الروابط والمسلمات المحيطة بها تمكنا من صناعة ما يسمى بطرق البرهان الرياضي فعندما نكتب

$(\neg P \Rightarrow$(خطأ (أي تناقض) $)) \Rightarrow P$

فنحن نعرف هنا البرهان بالخلف أي نقول إذا فرضنا P خاطئة أي نفيها صحيح فوصلنا لتناقض أي خطأ فلابد أن نفي P هو الخاطئ لأننا نعلم أن الصواب لا يمكنه أن يستلزم الخطأ ومنه إذا كان نفي P خاطئ ستكون P صحيحة.

في الحقيقة هي تكتب هذا

$(\neg P \Rightarrow$(خطأ (أي تناقض) $)) \Rightarrow \neg\neg P \Rightarrow P$

وهنا سنلاحظ مباشرة أن البرهان بالخلف مقبول في المنطق الشكلي أما الحدسي فيرفضه لأنه يرفض

$$\neg\neg P \Rightarrow P$$

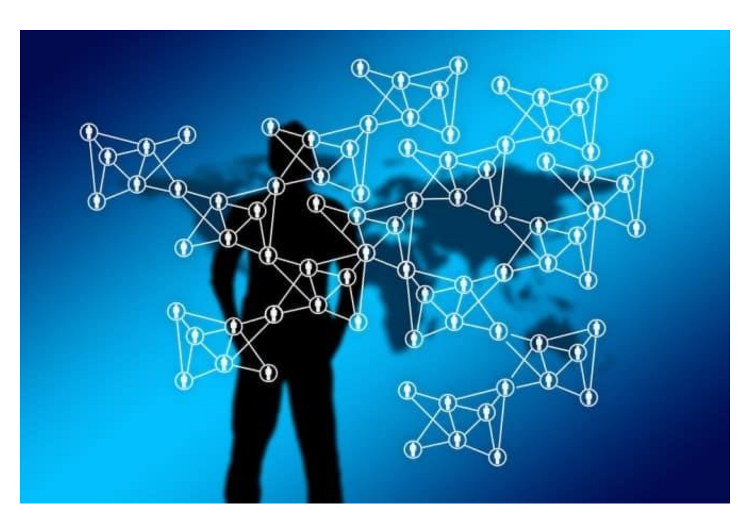
ولفهم هذا سنضرب مثالا

إذا أردنا أن نبرهن أن العدد الحقيقي غير المعدوم a أنه عدد ناطق فنقول لنفرض بالخلف أنه ليس ناطق ثم نصل لتناقض.

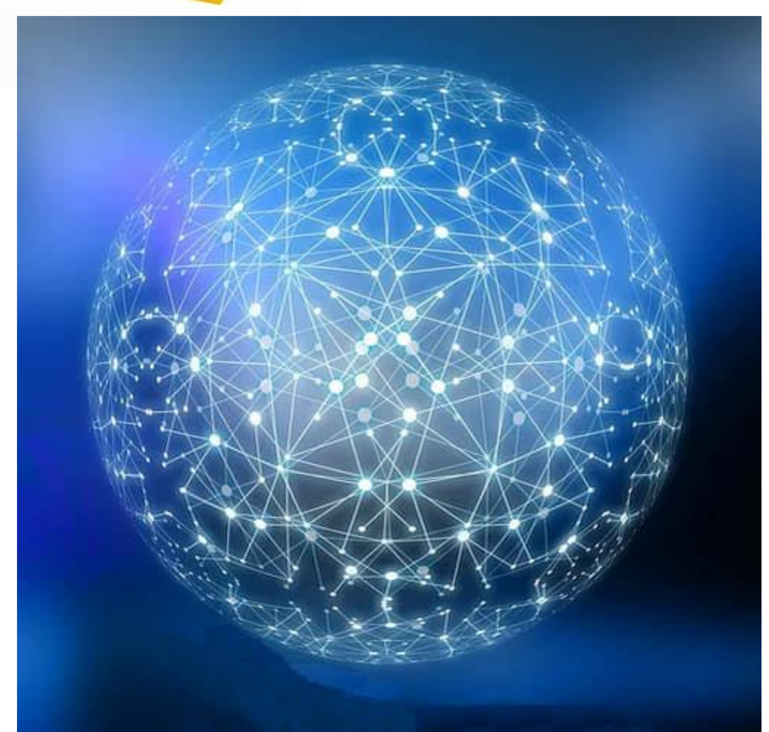
فعلى مبدأ الثالث المرفوع في المنطق الشكلي نستنتج أن a ناطق لأنه إما ناطق أو غير ناطق وبما أننا برهنا خطأ القضية الثانية بقيت الأولى.

لكن المنطق الحدسي لا يقبل هذا لأننا لم نجد عددين صحيحين غير معدومين p و q بحيث $a = p/q$
فالمنطق الحدسي يهتم بالبرهان البنائي أما الشكلي فينظر للحكم على القضايا.

يتبع أنواع البراهين المنطقية.







يا أستاذ حدثني عن المنطق ؟

الجزء الثالث : استنباط طرق البرهنة من جداول الحقيقة

رأينا في المنشور السابق أن أصحاب المنطق الشكلي صنعوا مسلمات منطقية بنوا عليها المنطق وذلك بواسطة الروابط المنطقية الأربعة:

الوصل $\wedge$, الفصل $\vee$, الاستلزام $\Rightarrow$, والتكافؤ $\Leftrightarrow$

صحة هذه الروابط المنطقية تعتمد على صحة القضايا التي تربط بينها فيمكننا رؤية كل رابط كدالة منطقية تنطلق من صحة أو خطأ كل قضيتين لتصنع قضية جديدة تربط بينهما ولمعرفة صحة القضية الجديدة نستعمل جدول الحقيقة.

فمثلا الوصل له أربع حالات (نرمز للصحة بـ 1 وللخطأ بصفر)

$1 \wedge 1 = 1$

$1 \wedge 0 = 0$

$0 \wedge 1 = 0$

$0 \wedge 0 = 0$

أي تكون القضية $Q \wedge P$ صحيحة إذا كانت كل من P صحيحة و Q صحيحة.

جدول الحقيقة يساعدنا في معرفة التكافؤ بين القضايا حسب النماذج فهو لا يبرهن قضايا بعينها.

مثلا من جدول حقيقة الوصل نستنتج أن $P \wedge P$ تكون صحيحة إذا وفقط إذا كانت P صحيحة

أي $P \Leftrightarrow P \wedge P$ فهذه قضية جديدة كذلك يمكننا استنتاجها من جدول الحقيقة حسب حالات P فلدينا

حالة P صحيحة أي تأخذ 1 فنجد بالنسبة للوصل نفس القيمة $1 \wedge 1 = 1$

حالة P خاطئة أي تأخذ 0 فنجد بالنسبة للوصل نفس القيمة $0 \wedge 0 = 0$

إذن في الحالة الأولى وجدنا $1 \Leftrightarrow 1$ والحالة الثانية وجدنا $0 \Leftrightarrow 0$

وكلاهما حسب تعريف التكافؤ صحيح فنكون قد بينا أن $P \wedge P \Leftrightarrow P$

من جدول الحقيقة يمكن أن نبين صحة تحولات منطقية كثيرة فمثلا إذا أردنا أن نبرهن Q انطلاقا من P يمكننا أن نستعمل الاستلزام: $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$

أي لبرهنة صحة Q يكفي أن ننطلق من P صحيحة و استلزام صحيح $P \Rightarrow Q$ فنحن نعلم أن للاستلزام الصحيح ثلاث حالات:

$1 \Rightarrow 1$

$0 \Rightarrow 1$

$0 \Rightarrow 0$

لكن بما أن P صحيحة لا يبقى لدينا إلا حالة واحدة وهي $1 \Rightarrow 1$ فتكون Q صحيحة.



هذا ما نسميه برهان مباشر.

لكن من أين تأتي هذه الاستلزامات الصحيحة ؟

تأتي إما من المسلمات والفرضيات فمثلا نحن نعرف الاحتواء بـ

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

ف

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

استلزام صالح للاستعمال بالتعريف ومنه إذا اخترنا x من A سنجد

$$(x \in A \wedge (x \in A \Rightarrow x \in B)) \Rightarrow x \in B$$

لذلك عندما نبدأ بالبرهنة نقول لنفرض x ينتمي ل A وذلك لنستعمل البرهان المباشر فنستنتج منطقيا أن x ينتمي ل A .

وهكذا من المسلمات والفرضيات سنصنع قضايا جديدة بالتركيب.

أو تأتي من هذه التركيبات فنصنع منها استلزامات صحيحة جديدة.

عند البرهنة نحن نستعمل هذه الصيغ المنطقية لكن كثيرا ما نخفيها عن طريق اللغة فنكتب بدل الاستلزام لفظ ومنه أو إذن وما شابه.

توجد أنواع متعددة من طرق البرهنة كلها تعتمد على صناعة القضايا.

ذكرنا منها البرهان المباشر ، مثال ذلك إذا كان لدينا عدد حقيقي x فإن

$$x > 0 \Rightarrow x + 1 > 1$$

فهذه نستنتجها مباشرة من العبارة منطقية:

$$\forall\ (x,y,z) \in R^3 : x > y \Rightarrow x + z > y + z$$

فنحن نستعمل هنا

$$((x > 0 \wedge z = 1) \wedge (x > y \Rightarrow x + z > y + z)) \Rightarrow x + 1 > 0 + 1$$

وهو برهان مباشر.

النوع الثاني البرهان بالخلف وقد شاهدناه سابقا وهو يعتمد على التسليم بصحة هذا الاستلزام

$$\neg\neg P \Rightarrow P$$

ويمكننا أن نعبر عنه بـ

$$(\neg P \Rightarrow (\text{خطأ (أي تناقض)})) \Rightarrow P$$

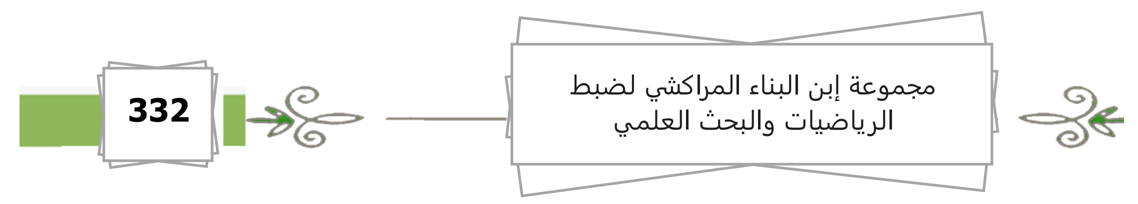
لذلك في البرهان بالخلف نبدأ بفرض نفي P صحيح أي نفرض P خاطئة.

مثال ذلك عندما نريد أن نبرهن أن الجذر التربيعي ل 2 ليس ناطق فنفرض بالخلف أنه ناطق أي يكتب

$$\neg P : \sqrt{2} = p/q$$

حيث p و q أوليان فيما بينهما

ثم نستعمل العبارات المنطقية الصحيحة مثلا:



$$\sqrt{2} = p/q \Rightarrow 2 = (p^2/q^2)$$

$$\Rightarrow 2\,q^2 = p^2$$

$$\Rightarrow p^2 \equiv 0\ [2]$$ أي يقبل القسمة على 2

$$\Rightarrow p \equiv 0\ [2]$$

$$\Rightarrow p = 2k\ ,\ k \in N$$

$$\Rightarrow p^2 = 4\,k^2$$

$$\Rightarrow 2\,q^2 = 4\,k^2$$

$$\Rightarrow q^2 = 2\,k^2$$

$$\Rightarrow q^2 \equiv 0\ [2]$$

$$\Rightarrow q \equiv 0\ [2]$$

وهذا يناقض كون q و p أوليان فيما بينهما لأنهما هنا زوجيان ومنه نستنتج خطأ $\neg P$

ومنه نستنتج صحة $\neg\neg P$ ومنها صحة P .

عند البرهنة لا نكتب كل هذه المراحل بل أهملت كثيرا من التفسيرات هنا وذلك لأننا تعودنا على اختصار الصيغ المنطقية.

النوع الثالث من طرق البرهنة : البرهان بالعكس النقيض

فيمكننا انطلاقا من جدول الحقيقة أن نبين أن

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

وهذا ما نسميه بالعكس النقيض وهو يوافق حدسنا إذ إذا كان وجود P يعني وجود Q فعدم وجود Q يعني عدم وجود P لأنها لو كانت P موجودة لوجدت Q .

مثال ذلك نريد أن نبرهن:

$$\forall x \in R : x < 1 \Rightarrow x < 3$$

باستعمال العكس النقيض يكفي أن نبرهن أن

$$\forall x \in R : \neg(x < 3) \Rightarrow \neg(x < 1)$$

أي

$$\forall x \in R : x \geq 3 \Rightarrow x \geq 1$$

وهذا يمكننا أن نبرهنه بتعريف علاقة الترتيب فمن الفرضيات فرضنا صحة هذه العبارة

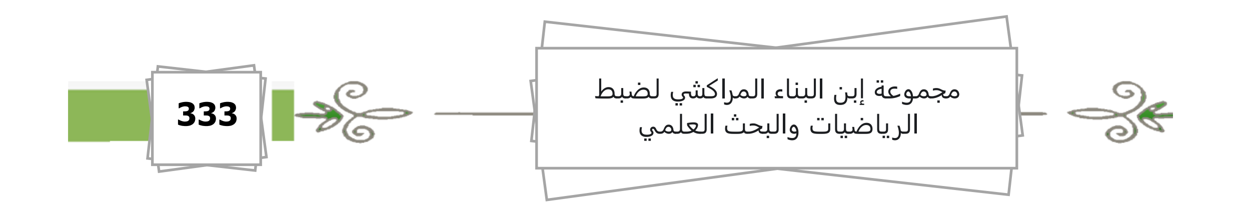
$$\forall (x,y,z) \in R^3 : x \geq y \wedge y \geq z \Rightarrow x \geq z$$

فبوضع $y = 3$ و $z = 1$

نجد

$$\forall x \in R : x \geq 3 \wedge 3 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$$

وهو المطلوب فببرهنة العكس النقيض نكون قد برهنا على الاستلزام الأصلي.



النوع الرابع : البرهان بمثال مضاد فإذا كانت عندنا عبارة منطقية يكفي أن نبين بتعويض أحد متغيراتها أنها تنتج قضية خاطئة مثال ذلك

$\forall n \in N : (2^n+1$ عدد أولي)

نلاحظ أنه من أجل $n = 3$ لدينا $2^3+1 = 9$

وهو ليس أولي إذن هذه العبارة خاطئة.

النوع الخامس : البرهان بفصل الحالات فإذا أمكن تقسيم القضية إلى حالات فيمكن برهنة كل حالة على حدى مثال ذلك:

$\forall n \in N : (n$ لا يقبل القسمة على ثلاثة $) \Rightarrow (n^2+2$ يقبل القسمة على ثلاثة)

فالقضية n لا يقبل القسمة على ثلاثة يمكننا تقسيمها لحالتين $n \equiv 1\ [3] \vee n \equiv 2\ [3]$

ومنه حسب الحالات:

$$n \equiv 1\ [3] \Rightarrow n^2+2 \equiv 1^2+2\ [3]$$
$$\Rightarrow n^2+2 \equiv 3\ [3]$$
$$\Rightarrow n^2+2 \equiv 3\ [3]$$
$$n \equiv 2\ [3] \Rightarrow n^2+2 \equiv 2^2+2\ [3]$$
$$\Rightarrow n^2+2 \equiv 6\ [3]$$
$$\Rightarrow n^2+2 \equiv 0\ [3]$$

فنكون قد برهنا جميع الحالات.

النوع السادس البرهان بالتراجع

فيمكننا من جدول الحقيقة التأكد من صحة هذه القضية

$(P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow H) \Rightarrow (P \Rightarrow H)$

اختصارا نكتب $P \Rightarrow Q \Rightarrow H$

فإذا كانت عندنا متتالية قضايا بحيث

$P_0 \Rightarrow P_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow P_n$

فصحة P_0 تعطينا صحة P_n

البرهان بالتراجع يعتمد على هذا فإذا كانت عندنا عبارة منطقية متغيرها n وقد نطلق عليها تسمية خاصية $P(n)$

فيكفي أن نبرهن أن

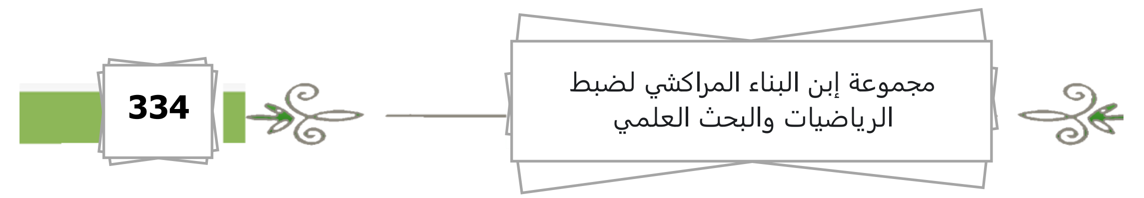
$P(0)$ صحيحة

والاستلزام:

$\forall n \in N : P(n) \Rightarrow P(n+1)$

صحيح وعليه نكون برهنا جميع السلسلة

$P(0) \Rightarrow P(1) \Rightarrow \dots \Rightarrow P(n) \Rightarrow \dots$



فنكون برهنا الخاصية عند كل n .

مثال ذلك برهنة أن

$$S_n = 0+1+2+...+n = 1/2\, n\, (n+1)$$

فلدينا

$$S_0 = 0 = 1/2\, 0\, (0+1) = 0$$

أي

صحيحة $P(0)$

ثم

$$\forall\, n \in N : S_n = 0+1+2+...+n = 1/2\, n\, (n+1)$$
$$\Rightarrow S_{n+1} = S_n + (n+1) = 1/2\, n\, (n+1) + (n+1)$$
$$= (n+1)\, [\, 1/2\, n + 1]$$
$$= 1/2\, (n+1)\, (n+2)$$

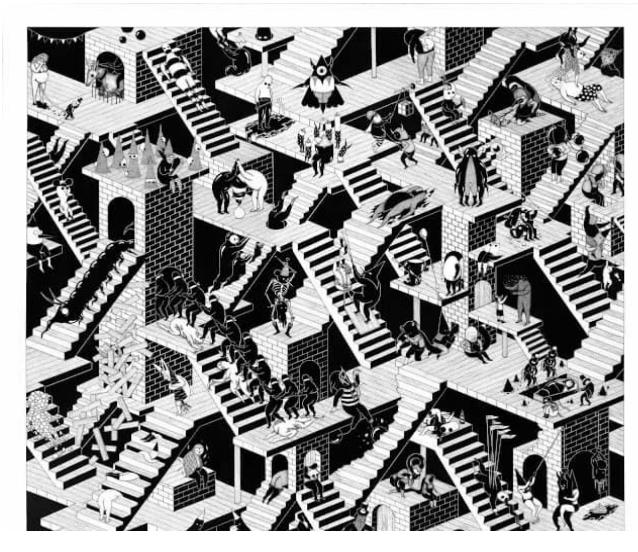
أي

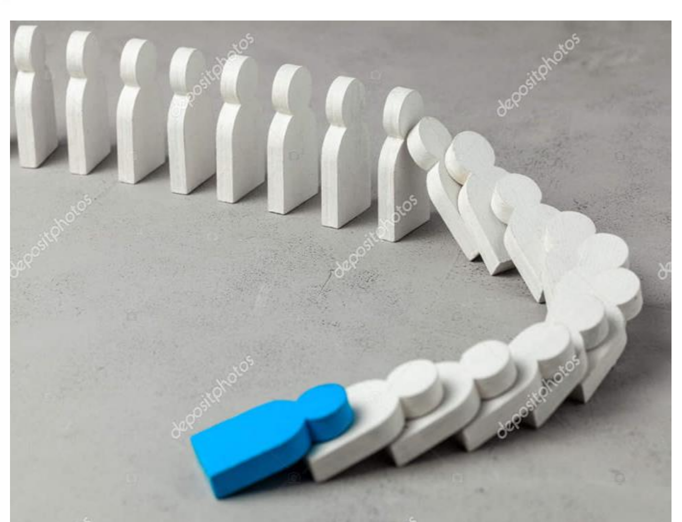
$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

وهو المطلوب.

فهذه أشهر أنواع البراهين في المنطق الشكلي وهو المستعمل بكثرة حاليا والمعتمد في المدارس.

المنطق الحدسي لا يقبل البرهان بالخلف لأنه يستعمل مبدأ الثالث المرفوع ولا يقبل كذلك البرهان بالعكس النقيض لنفس السبب.





المنطق كأنك تراه : لماذا الخطأ يستلزم الصواب ؟

كثيرا ما ندرس أو نعلم التلاميذ أن الخطأ يستلزم الصواب قضية صحيحة منطقيا لكن كيف يعقل هذا ؟

$0 \Rightarrow 1$

لفهم هذه المسألة لابد أن نميز بين التكافؤ والاستلزام.

فتكافؤ قضيتين يعني يمكن استنتاج كل واحدة من الأخرى فمنطقيا هما شيء واحد لذلك إذا كانت إحداهما صحيحة فالأخرى كذلك وإذا كانت خاطئة فالأخرى كذلك.

أما الاستلزام فهو استنتاج قضية من أخرى لذلك القضية المستنتجة هي جزء من القضية الأصلية، قد تساويها وقد تكون جزءا منها غير مساو لها.

$P \Rightarrow Q$

لكن ماذا يحدث إذا كانت Q جزء من P لكن لا تكافئها ؟

فإذا كانت القضية P صحيحة فكل أجزائها كذلك إذا كانت قضايا قابلة للتقرير وعليه إذا أخذنا جزء منها فهو صحيح وهذا ما نسميه $P \Rightarrow Q$ ونقول عنه أنه إذا كانت P صحيحة ف Q كذلك.

لكن ماذا لو كانت P خاطئة ؟

كون P خاطئة لا يعني أن جميع أجزائها خاطئة فقد يكون بعضها صحيح وبعضها خاطئ ولذلك ما نستنتجه منها قد يكون صحيحا وقد يكون خاطئا مثال ذلك القضية $P : 1 = 2 \wedge 0 = 0$

فهذه قضية خاطئة لكنها مركبة من قضيتين أحدهما خاطئة $1 = 2$ والثانية صحيحة $0 = 0$

فلو قلنا

$1 = 2 \wedge 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

فالاستلزام صحيح رغم أن القضية الأولى خاطئة والثانية قضية صحيحة.

وكذلك لو كتبنا

$1 = 2 \wedge 0 = 0 \Rightarrow 1 = 2$

فالاستلزام صحيح رغم أن القضية الأولى خاطئة والثانية خاطئة.

وكمثال آخر:

$a = b \wedge c = d \Rightarrow a \times c = b \times d$

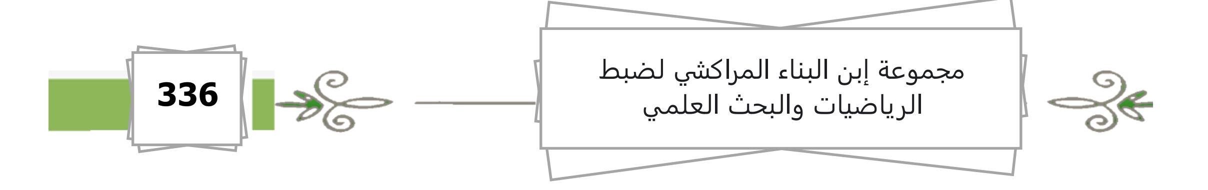
فالاستلزام صحيح لكن لو وضعنا

$1 = 2 \wedge 0 = 0 \Rightarrow 1 \times 0 = 2 \times 0$

سنجد الخطأ يستلزم الصواب.

فالخطأ لا يعنى أنه خطأ في جميع حيثياته إذ قد يكون قسم منه صواب وهو الذي ينتج القضية الصحيحة.

لكن معرفتنا بأن النتيجة صحيحة ليست نتيجة هذا الاستلزام إنما هي من منظور آخر إذ الاستلزام نفسه إذا انطلق من الخطأ فهو لا يضمن الصحة بل يمكنه أن ينتج الصواب أو الخطأ.



أما إذا انطلق من الصواب فهو لا ينتج إلا صوابا ولذلك عند البرهان ننطلق من قضايا صحيحة عندما نريد الانتقال بالاستلزام.

للتنبيه : لم أتطرق هنا للخلاف بين المنطق الشكلي والحدسي فهو أعمق لكن اكتفيت بالاستلزام المبني على برهان بنائي وهو مشترك بين المنطقين.

لمزيد من الفائدة ينظر مقال (المنطق كأنك تراه , إذا رفرفت فراشة في الصين حدث إعصار في أمريكا...)





المنطق كأنك تراه

إذا رفرفت فراشة في الصين حدث إعصار في أمريكا ... المنطق الرياضي يخبرنا أن الاستلزام $P \Rightarrow Q$ صحيح إذا كانت P و Q صحيحتين.

لكن كيف نعطي معنى لقولنا مثلا :

التفاحة حمراء يستلزم الطائرة تطير !!!

ولا علاقة بين طيران الطائرة ولون التفاحة ؟

بالجملة هناك فرق بين الاستلزام في المنطق الشكلي والمنطق الحدسي.

للتذكير المنطق الشكلي هو المنطق الذي نستعمله في المدرسة أما الحدسي فهو منطق أصغر منه يرفض مبدأ الثالث المرفوع ومسلمة الاختيار لاشتراطه في برهنة صحة القضايا على وجود برهان بنائي لا مجرد فرضيات كتسليمنا بمسلمة الاختيار مثلا.

بالنسبة لسؤالنا ففي المنطق الشكلي المؤثرات المنطقية الأربعة : الوصل والفصل والاستلزام والتكافؤ هي مؤثرات ثنائية أي تستعمل قضيتين لإنتاج ثالثة بالمؤثر المنطقي عن طريق الوصل بينهما فصحة القضية المكونة بهما بواسطة المؤثر هي صحة مسلماتية مبنية على صحة أو خطأ القضيتين ولا تعطي أبدا وجود سببية بين القضية الأولى والثانية.

وعلى هذا صحة القضايا في المنطق الشكلي مبنية على:

المسلمات الوجودية كنظرية المجموعات ZFC التي تعطي الصحة لاستلزامات بالتسليم والتعريف كمسلمة التمديد مثلا

$$\forall A, \forall B [\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B]$$

فهي تعطي صحة لهذا الاستلزام بالتعريف.

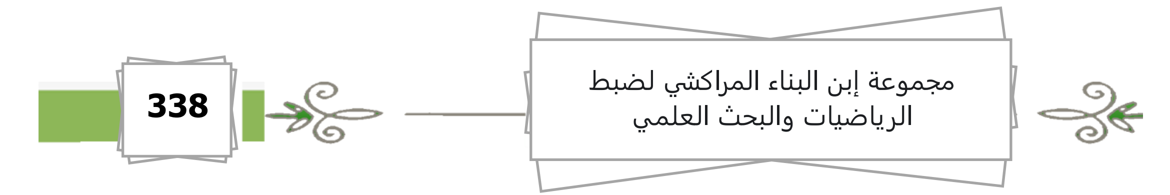
ومسلمات منطقية والتي منها جدول الحقيقة فقولنا $P \Rightarrow Q$ هي قضية صحيحة إذا كان كل من P و Q صحيح هي مسلمة منطقية وهذا لا يعني وجود سببية بين صحة P وصحة Q .

الذي يجب ان نفهمه في المنطق الشكلي أنه لا يهمه كيفية الحصول على صحة Q إنما الذي يهمه هو صحة Q فهو نظام يهتم بالتناسق ولذلك عندما يسلم بصحة مسلمة الاختيار فهو لا يخبرنا عن كيفيته.

لكن في المنطق الحدسي الأمر يختلف فالاستلزام لابد ان يكون بنائيا أي هو يرى وجود طريقة تحول برهان صحة P إلى برهان صحة Q .

إذا فهمنا الفرق بين النظرتين فهمنا سبب عدم تقبل عقلنا لطريقة المنطق الشكلي متى عوضنا P و Q بقضايا من الواقع كالتفاحة حمراء تستلزم الطائرة تطير لأننا لا نرى العلاقة بين الأمرين.

لكن على المنطق الشكلي فهو يرى أن قبولنا لكون التفاحة حمراء نابع عن قبولنا لواقعنا ومن ضمنه طيران الطائرة وإن كان ذلك لا علاقة له بالتفاح لكنه يقول ما دمنا متناسقين فلابد أن نقبل بقبولنا للمسلمات التي



أدت لتصديقنا بأن التفاحة حمراء أن نقبل أن الطائرة تطير لأن رفضنا لطيران الطائرة هو رفض لواقعنا فنعود برفض برهان كون التفاحة حمراء.

وهذا يعنى أنه إذا غيرنا النظام المسلمات قد يصبح هذا الاستلزام خاطئا اي التفاحة حمراء تسلتزم الطائرة تطير قضية خاطئة.

يمكننا رؤية ذلك بنقل تفاحة حمراء تحت البحر وقصرنا قبولنا على البحر فالتفاحة تبقي حمراء داخله لكن الطائرة لا تطير داخله فقبولنا لكونها حمراء لم ينبني على مسلمات تعطينا طيران الطائرة تحت البحر فيمكننا رفض طيران الطائرة تحت البحر دون أن نرفض ما أدانا لقبول التفاحة حمراء.

لكن ما فائدة هذا الاستلزام إن كان لا يشترط السببية ؟

نعم هو لا يشترط السببية لكنه يحتويها فإذا وجدت فهو صحيح ولذلك نكتب

$$(P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow H) \Rightarrow (P \Rightarrow H)$$

أما إذا لم توجد فهو لا يقول لنا أن Q خاطئة لذلك سواء حكمنا بكون Q صحيحة أو خاطئة في حالة عدم وجود سببية مع P فهذه المعلومة لا تزيد شيئا لذلك المنطق الشكلي لا يهتم بهذه الحيثية لأنه لا يشترط بناء البرهان بعكس المنطق الحدسي الذي يجبرنا على ذلك.

يمكننا ترجمة الاستلزام في المنطق الشكلي بالقضية:

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee \neg P]$$

أي إما أن P و Q صحيحتان أو كون نفي P صحيح $(\neg P)$ أي P خاطئة لا يخبرنا شيئا عن Q أي سواء استعملنا طريقة بنائية صحيحة لبرهنة Q انطلاقا من P أو طرقا خاطئة فالنتيجة لا يمكننا الحكم عليها لأنها قد تكون صحيحة أو خاطئة.

فالرياضيات الشكلية لا تهمها هذه المسائل لأنها تبحث عن ضمان التناسق بين القضايا وهذا غاية التجريد.

ولو تأملنا هنا في هذا التكافؤ لوجدنا أننا استخدمنا مبدأ الثالث المرفوع باعتبارنا إما P أو $\neg P$ وعدم وجود حالة ثالثة فهذا الذي يرفضه المنطق الحدسي.

ملاحظة : الصورة الثانية صورتها بنفسي البارحة في ضواحي باريس من منطقة la defense





المنطق كأنك تراه

كيف نفسر أن الخطأ يستلزم الصواب في المنطق الشكلي ؟

كلنا درسنا جدول الصحة في تعريف الاستلزام وهو مكون من أربع حالات:

$P \Rightarrow Q$

إذا كانت P صحيحة و Q صحيحة فالاستلزام صحيح

إذا كانت P خاطئة و Q خاطئة فالاستلزام صحيح

إذا كانت P خاطئة و Q صحيحة فالاستلزام صحيح

إذا كانت P صحيحة و Q خاطئة فالاستلزام خاطئ.

الاستلزام الرياضي في المنطق الشكلي مستوحى من الاستلزام اللغوي وهو نوع من التلازم بين القضيتين أي إذا كانت P صحيحة ف Q صحيحة.

لكنه يفترق عن الاستلزام اللغوي أنه إذا ربطنا لغة بين قضيتين فنحن ننتظر وجود علاقة بينهما كقولنا مادام هناك سمك حي فهناك ماء ذلك أننا نعلم أن السمك لا يعيش بدون ماء .

لكن لا تقبل عقولنا جملة مثل مادام هناك سمك حي فهناك واحات في الصحراء رغم أن كلا القضيتين صحيح لكن لا علاقة استنباطية أو تلازمية بينهما.

أما الاستلزام الرياضي في المنطق الشكلي فلا يطلب وجود علاقة سببية بين القضيتين إنما صحته هي متعلقة بصحة أو خطأ القضيتين P و Q

إن كان العقل يقبل أنه إذا كانت P صحيحة فلابد أن Q صحيحة لأن الصواب يستلزم الصواب ولا يمكنه أن ينتج الخطأ.

وكذلك يقبل أنه إن كانت P خاطئة و Q خاطئة فالخطأ أنتج الخطأ.

فهو لا يتصور لأول وهلة كيف أنه إذا كانت P خاطئة فقد تنتج Q صحيحة ؟

هنا لابد أن نعرف أن الصواب والخطأ المطلقين غير موجودين في الرياضيات إنما عندما نقول P خاطئة فنحن نقول هي خاطئة في نظام مسلماتي وكذلك نقول عن الصحة ف Q صحيحة في نفس النظام المسلماتي.

فإذا أخذنا كمثال النظام المسلماتي ZFC فنحن عندما نكتب $P \Rightarrow Q$ فنعني بها

$P \wedge ZFC \Rightarrow Q \wedge ZFC$

أي قولنا P صحيحة أو خاطئة يعني أننا ننطلق من ZFC قبل ذلك أي نقر بأن

$P \wedge ZFC \Rightarrow ZFC$

وعلى هذا كل القضايا الصحيحة في ZFC لابد من قبولها في هذا الاستلزام لأنه يمكننا كتابة

$P \wedge ZFC \Rightarrow ZFC \Rightarrow Q$

فإذن ليس فقط في الاستلزام الخطأ يستلزم الصواب بل مهما كانت القضية فمادام حكمنا عليها من



منظور ZFC فلابد أن نقبل جميع القضايا الصحيحة المستنبطة من ZFC .

أي كيفما كانت القضية P صحيحة أو خاطئة فيمكنها أن تستلزم جميع القضايا الصحيحة في ZFC لأننا نعتبرها كقاعدة لها وهذا ما يفسر اعتبار أصحاب المنطق الشكلي الاستلزام صحيحا متى كانت Q صحيحة كيفما كانت P .

فهو يقول لا يهم الطريق التي وصلنا بها لصحة Q إنما المهم أنها صحيحة فسواء كان ذلك مستنبطا من صحة P أو من صحة ZFC التي ننظر من خلالها ل P فالهدف هو الحكم على Q وقد وصلنا إليه.



P	Q	P ⇨ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

لماذا المنطق الحدسي يقبل $P \Rightarrow \neg\neg P$ ولا يقبل $\neg\neg P \Rightarrow P$

في المنطق الشكلي لدينا $P \Leftrightarrow \neg\neg P$ فهو يتفق من المنطق الحدسي في صحة $P \Rightarrow \neg\neg P$

ذلك أن المنطق الحدسي يعتبر أنه إذا وجدنا برهانا بنائيا يثبت صحة P فيمكن أن نصنع منه برهانا بنائيا يثبت صحة نفي P ومن ذلك نصنع برهانا على صحة نفي نفي P .

لكن المنطق الحدسي لا يقبل الاتجاه العكسي أي $\neg\neg P \Rightarrow P$

فهو يرى أن إثبات صحة نفي نفي P لا يعني وجود برهان بنائي يثبت صحة P .

مثال ذلك إن أردنا أن نبرهن أن العدد الحقيقي غير المعدوم a أنه عدد ناطق فنقول لنفرض بالخلف أنه ليس ناطق ثم نصل لتناقض.

فعلى مبدأ الثالث المرفوع في المنطق الشكلي نستنتج أن a ناطق لأنه إما ناطق أو غير ناطق وبما أننا برهنا خطأ القضية الثانية بقيت الأولى.

لكن المنطق الحدسي لا يقبل هذا لأننا لم نجد عددين صحيحين غير معدومين p و q بحيث $a= p/q$

ومن أجل هذا يرفض المنطق الحدسي مسلمة الاختيار فكوننا لدينا مجموعة مجموعات غير خالية وإن كان كل عنصر منها غير خال فإننا لا نملك طريقة نختار بها من كل مجموعة عنصرا منها متى كان عدد هذه المجموعات غير قابل للعد.

وكمثال آخر نحن نعلم أنه إذا أخذنا عددين حقيقين x و y فإنها لدينا إما $x = y$ أو $x \neq y$

لكن هذا لا يقبله دائما المنطق الحدسي، يقبله في الأعداد الصحيحة مثلا لأنه يمكننا مقابلة عدد بعدد.

لكن في الأعداد الحقيقية لو حاولنا مقارنة كتابة x العشرية وكتابة y فإن الكتابة العشرية غير منتهية فلا يمكننا استيفاؤها كلها لنتأكد أن x و y متطابقان.

بل نحتاج لخوارزمية منتهية تخول لنا مطابقة x بـ y .

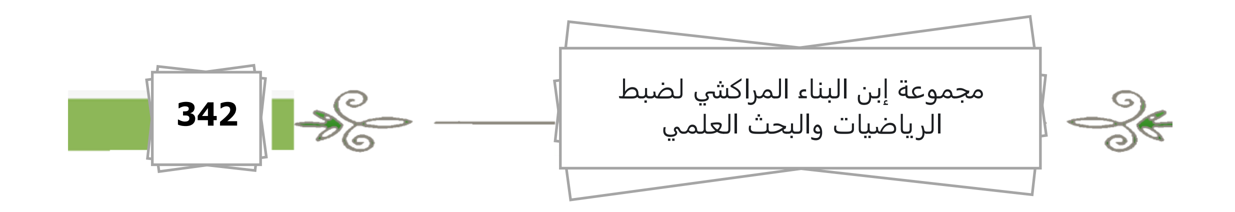
وهذا يوافق بالضبط ما نقوم به خوارزميا في الحسابات.

في هذا يقول الأستاذ الفاضل ناجي هرماس:

إن القضية الصحيحة في الرياضيات هي القضية القابلة للبرهان؛ أي هي القضية التي لها برهان رياضي يدل على صحتها. ويفترق علماء الرياضيات الحدسيون عن نظرائهم الكلاسيكيين في معنى وجود هذا البرهان: فبالنسبة للأولين، يجب أن يُعطى البرهان صراحة، أو على الأقل يجب أن تكون بين أيدينا خوارزمية صريحة تحدد تماما عناصره. بينما بالنسبة للثانيين، فيكفي أن نعرف بوجوده الضمني.

وأهم خلاف بين الحدسيين والكلاسيكيين هو حول مبدأ الثالث المرفوع "من أجل كل قضية رياضية P ، فإن ' P أوnot(P) ' ، حيث تشير not(P) إلى النفي المنطقي للقضية P ".

فالحدسيون، بخلاف الكلاسيكيين، لا يعترفون بهذا المبدأ لعدة أسباب وجيهة.



كلنا نعرف العدد الشهير في الرياضيات 'هـ(e) '، والمسمى بالعدد النيبيري نسبة إلى الاسكتلندي جون نابير (John Napier) مبتكر اللوغاريتم الطبيعي. إن هذا العدد ليس كسرا، بل ليس عددا حقيقيا جبريا؛ أي ليس جذرا لأي كثير حدود بمعاملات كسرية. ومع ذلك فهو عدد حقيقي حدسي؛ أي يمكن تعريفه وفق قواعد الرياضيات الحدسية.

إلى حد اللحظة الراهنة لا نعرف إن كان العدد 'هـ أس هـ' (exp(e)) كسرا أم لا، وبكلمات أخرى، لا نعلم برهانا للقضية "exp(e) هو كسر"، كما لا نعلم برهانا للقضية "exp(e) ليس كسرا". بل أكثر من ذلك، إذا كان ك كسرا معطى، فلا نعرف إن كانت القضية " exp(e) يساوي ك" صحيحة أم خاطئة .

حسب مبدأ الثالث المرفوع، فإن "exp(e) يساوي ك أو لا يساويه". لكن في إطار المنطق الكلاسيكي، هذا لا يعني بأي حال من الأحوال أن إحدى القضيتين "exp(e) يساوي ك" وَ "exp(e) لا يساوي ك" صحيحة. وقد ناقشت هذه المسألة المهمة جدا في المنطق في منشور سابق لي. أما الحدسيون، فيرفضون جملة وتفصيلا اعتبار القضية "exp(e) يساوي ك أو لا يساويه" صحيحة، وشعارهم

"هات برهانك، أو لتصمت."

نستطيع حساب القيم العشرية التقريبية للعدد exp(e) لأية مرتبة نريدها، فقط نحتاج إلى الوقت الضروري للحساب. والسؤال هو: هل تحل هذه الخوارزمية الحسابية المشكلة؟ والإجابة هي:

أ) إذا كان "exp(e) لا يساوي ك"، فإننا نكتشف ذلك في مرحلة ما قد تكون طويلة جدا. ومن ثمة يتوقف الحساب؛

ب) نفس الشيء إذا "exp(e) يساوي ك، وكان ك كسرا عشريا"؛

أما:

ت) إذا كان "exp(e) يساوي ك، وكان ك كسرا غير عشري"، فلن يتوقف الحساب أبدا، وبالتالي لا يمكننا معرفة أي شيء انطلاقا منه مهما مر من وقت. من هنا ندرك عقم خوارزمية الحساب المشار إليها آنفا.

لا نعلم برهانا لأية قضية من القضايا الثلاث الواردة في أ) وب) وت). لذلك لا نعلم مصير حسابنا العشري السابق. ويمكن للقارئ المنتبه جيدا أن يطرح السؤال التالي: هل توجد إمكانية أخرى غير الإمكانيات الثلاثة السابقة؟ والإجابة هي: بالطبع، فقد تكون القضايا الثلاث غير قابلة للإقرار، أي لا وجود لأي برهان رياضي يقر صحة إحداها. وهنا ندخل نفق آخر في نظرية الأعداد الحقيقية، النظرية التي تشكل أساس التحليل الحقيقي. أه



النظرة المجموعاتية للاستلزام ومشاكلها

يمثل البعض بعلاقة الانتماء لتبرير حالات الاستلزام الأربعة حسب صحة قضية الانطلاق وقضية الوصول، وخاصة حالة الخطأ يستلزم الصحة معتقدين بذلك موافقتهم الحدس فما المشكل في ذلك ؟

تعريف الاحتواء يعطى بالعبارة المنطقية:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$$

بعضهم مثل بإذا كان x ينتمي للمغرب يستلزم x ينتمي لإفريقيا فقال هذه عبارة صحيحة إنطلاقا من كون المغرب محتوى في إفريقيا.



ثم شرع يدرس الحالات الأربعة:

صحيح يستلزم صحيح فالاستلزام صحيح

صحيح يستلزم خطأ فالاستلزام خاطئ

خطأ يستلزم صحيح فالاستلزام صحيح

خطأ يستلزم خطأ فالاستلزام صحيح

فمثل لحالة خطأ يستلزم صحيح بكون x من إفريقيا لكن لا ينتمي للمغرب فبرر بذلك صحة كون الخطأ يستلزم الصحة لأنه في هذه الحالة x ينتمي للمغرب قضية خاطئة لكنه مع ذلك ينتمي لإفريقيا فهي قضية صحيحة.

ومن ذلك استنبط أن هذه الحالة في الاستلزام توافق الحدس.

فدعونا نقف على أخطاء وقصور هذا الاستنتاج:

فالمشكل الأول:

الذي نلاحظه أن الاحتواء معرف بتكافؤ وهو استلزام في اتجاهين كما أننا نستعمل الاستلزام في تعريفه.

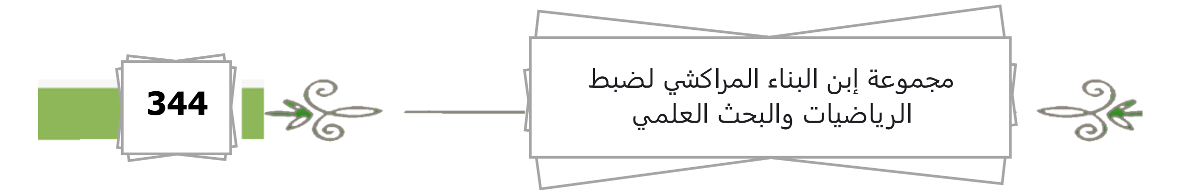
فالذي يريد أن ينظر للاستلزام من منظور مجموعاتي هو يمشي بالمقلوب ذلك أن الاحتواء معرف أصلا بالاستلزام فتبرير صحة أو خطأ الاستلزام بما يستعمل في تعريفه لا يصلح.

المشكل الثاني :

إهمال المكممات فعندما نقول مهما يكن x ف x يمكن أن نجعله أي شيء رياضي ومنه يمكننا جعل x قضية منطقية مثلا فعندها قول x ينتمي ل A أو B لا معنى له فهو خاطئ وعلى هذا الاستلزام صحيح على المنطق الشكلي رغم أنه لا نتكلم عن عناصر مجموعات.

المشكل الثالث :

حتى على المنطق الحدسي هناك مشكل في هذا التبرير فليس كل الاستلزامات يصلح تشكيلها بعلاقة بين مجموعات مثال ذلك n عدد طبيعي زوجي يستلزم n+1 عدد طبيعي فردي فهذا الاستلزام لا يمكن تمثيله باحتواء مجموعات.



المشكل الرابع:

الانطلاق من صحة الاستلزام الشمولي وهو مكون من عبارة منطقية تستعمل الاستلزام مع مكمم شمولي

$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$

فلا يمكن الحكم عليه بالصحة حتى نحكم على كل تعويض بـ x فيه أي على كل استلزام فالانطلاق من صحته لتبرير صحة الاستلزام المنطقي مشي بالمقلوب كذلك.

المشكل الخامس:

ليس كل القضايا تصلح على مجموعات مثال ذلك مبرهنة كنتور أنه يمكن مقارنة قدرة كل مجموعتين أي إذا كانت A و B مجموعتان فقدرة A أقل أو تساوي قدرة B أو العكس

فهذه لا يمكن حدها بمجموعة لأن مجموعة جميع المجموعات غير موجودة ولا يتصور جعل جميع هذه العناصر في مجموعتين مرتبتين بالاحتواء.

لذلك التمثيل بالمجموعات إن كان للتلاميذ فلما لا، فهم غير مطالبين بالضبط بمثل هذه الدقائق، لكن يبقى هذا المثيل قاصرا حتى على مستواهم إنما الأفضل التمثيل بالمنطق الحدسي كالانطلاق من $2 = 3$

ثم الضرب في صفر فنجد $0 = 0$ أو $2 < 3$ و $10 < 5$ ثم الجمع لنجد $12 < 8$

عموما إذا أردنا الضبط فالتمثيل المجموعاتي لا يصلح بل فيها مغالطات كثيرة كما تقدم شرحه.

لمزيد من الفائدة:

L'IMPLICATION. QUELQUES ASPECTS DANS LES MANUELS ET POINTS DE VUE D'ÉLÈVES-PROFESSEUR

https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/.../55x3...

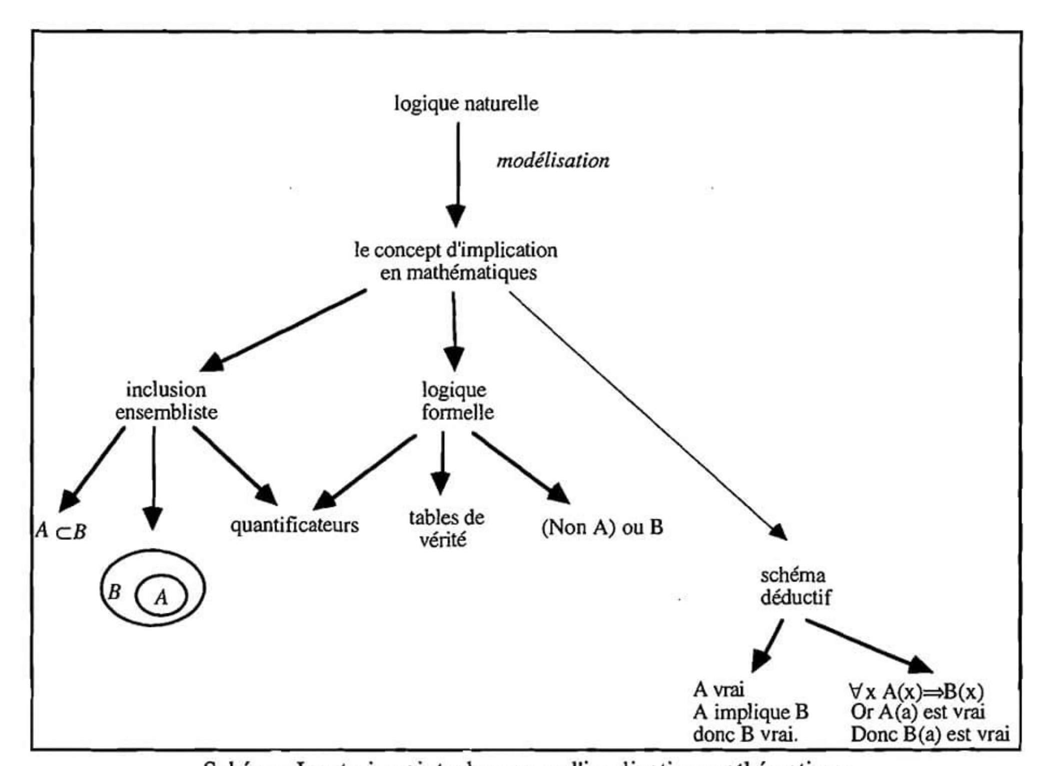


Schéma. Les trois points de vue sur l'implication mathématique

كيف نفهم عبارة أن الاستلزام (P→Q) صادق رغم أن مقدمه P كاذب وتاليه Q صادق ، بمعنى أن الكذب يستلزم الصدق ، وهذا شيء مناف للحدس الطبيعي ؟
كيف سنرفع هذا الابهام متسولين بنظرية المجموعات ، منطلقين من العبارة التضمنية الآتية:
- المغرب ضمن افريقيا (مغرب ⊇ افريقيا)
سنحاول تقييم انتماء شخص معين نسميه X إلى المغرب وافريقيا ، سنرمز إلى الانتماء بواحد وعدم الانتماء بصفر :
1-الحالة الأولى: X ينتمي إلى المغرب إذن X ينتمي إلى افريقيا (هذه العبارة صادقة لأنه لايمكن أن ينتمي إلى المغرب ولا ينتمي على افريقيا) 1 ←1
2- الحالة الثانية : X ينتمي إلى المغرب ولا ينتمي إلى افريقيا (هذه العبارة كاذبة لأنه لا يمكن أن ينتمي إلى المغرب ولا ينتمي على افريقيا ونعلم أن المغرب متضمن في افريقيا) 1 ←0
3-الحالة الثانية X لا ينتمي إلى المغرب وينتمي الى افريقيا (العبارة صادقة فيمكن أن لا ينتمي الى المغرب لكنه افريقي) 0 ←1
4-الحالة الثالثة X لا ينتمي إلى المغرب ولا ينتمي الى افريقيا (العبارة صادقة) 0 ←0
هكذا أصبحت قضيتنا التي كانت تبدو مخالفة للحدس (الكذب يستلزم الصدق) تندرج ضمن الحالة الثانية وهي قضية صادقة .

مثال عن منشور فيه خلط منطقي

المكممات المنطقية:

المكمم الكلي أو العمومي أو الشمولي $\forall$

المكمم الوجودي $\exists$

مدخل:

نحتاج في المنطق للتعبير عن قضايا متعلقة بمتغيرات كقولنا من أجل أي عدد حقيقي x القضية

$P(x) = x > 0$

قد تكون صحيحة أو خاطئة، فهذا ما نسميه بالعبارة المنطقية وهي جملة بمتغيرات تأخذ مفهوم القضية عند كل متغير أي يمكن تصديقها أو تكذيبها.

يجب أن ننتبه هنا لمسألتين:

الأولى أنه لا يمكننا أن نعرف المفاهيم المنطقية بالمنطق نفسه لأنه لا نستطيع استعمال المنطق قبل تعريفه ولذلك نلجأ للتعريفات اللغوية لنعرف ما يسمى بالمنطق من الجيل الأول.

الشيء الثاني أن المنطق سابق للمجموعات ذلك أن مسلمات نظرية المجموعات تصاغ بالمنطق.

والمنطق كما هو معلوم يهتم بالقضايا من حيث صحتها وخطئها.

لذلك عندما نتكلم عن متغير في المنطق فهو ليس بمفهوم المتغير الموجود في المجموعة ذلك أن المجموعة لم توجد إلا بعد المنطق.

ولذلك نحتاج في المنطق لطريقة لتكميم المتغير في العبارات المنطقية أو بتعبير آخر نحتاج تحديد ميدان تغيره أو ما هي القيم التي يمكنه أن يأخذها.

المكممات:

من أجل هذا نستعمل في المنطق المكممات وأولها المكمم العمومي أو الكلي أو الشمولي وهي مسميات لشيء واحد ونرمز له بـ $\forall$

وهو يعوض جملة : "من أجل أي" أو "مهما كان" أو "مهما يكن"، فإذا وضع أمام رمز فيقصد به المعنى اللغوي لهذه الجمل أي أن الرمز هو متغير يمكنه أخذ كقيمة أي شيء موجود.

فتعني هذه الكتابة

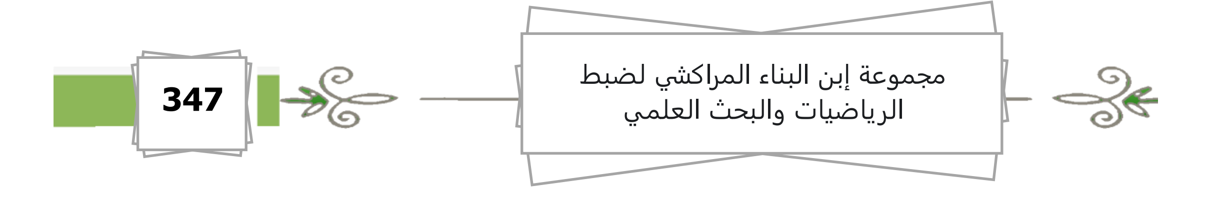
$\forall\ x :$

من أجل أي كائن نرمز له بـx

وكما تقدم المنطق من الجيل الأول تعرف مفاهيمه باللغة.

كما هو ملاحظ هنا لا نشترط أن x ينتمي لمجموعة فلو كتبنا مثلا المجموعة الخالية محتواة في أي مجموعة فسنكتب:

$\forall\ x\ (x\ \text{مجموعة} \Rightarrow \varnothing \subset x)$



ف x هنا يمكنه أن يرمز لأي كائن وليس شرطا مجموعة فإذا كان x مجموعة فالقضية الأولى في الاستلزام صحيحة ومنه النتيجة صحيحة.

وإن لم يكن x مجموعة فالقضية الأولى في الاستلزام خاطئة إذن الاستلزام صحيح كذلك ولا يهم النتيجة.

تقييد المكممات:

يمكننا تقييد المكمم الكلي بإضافة جمل فنكتب مثلا:

$\forall$ x مجموعة : $\varnothing \subset x$

أو نجعل المتغير يتغير داخل مجموعة فنكتب: $\forall x \in R : x^2 + 1 > 0$

المكمم الثاني المستعمل في الرياضيات هو المكمم الوجودي $\exists$ والذي يعوض عبارة "يوجد" وهو يوضع أمام رمز يقصد به مجهول موجود يرمز له بذاك الرمز.

مثال ذلك أن نكتب $\exists\ x : x \subset A = \{1,2\}$ أي يوجد كائن نرمز له بـ x يحقق الخاصية هو محتوى في المجموعة المكونة من 1 و 2 .

كما نلاحظ الكائن x غير وحيد فالمجموعات التالية كلها محتواة في A

$\varnothing , \{1\} , \{2\}, \{1,2\}$

فإذا أردناه وحيدا فالترميز هو: $\exists !\ x$

مثال ذلك: $\exists !\ x : x \subset \varnothing$

كما تقدم مع المكمم الكلي فيمكننا كذلك تقييد المكمم الوجودي كأن نكتب

$\exists\ x \in R : x^2 + 2x + 1 = 0$

ترتيب المكممات:

العبارة المنطقية قد تشمل أكثر من ترميز لمتغيرات ومجاهيل فنحتاج للتعبير عن ذلك لاستعمال مكمم لكل رمز مثال ذلك: $\forall x \in R, \forall y \in R : x^2+y^2 \geq xy$

والترتيب هنا بين المكممات الكلية لا يهم فيمكننا كتابة العبارة بالشكل التالي:

$\forall y \in R, \forall x \in R : x^2+y^2 \geq xy$

وهناك من يختصرها بالشكل التالي: $\forall x,y \in R : x^2+y^2 \geq xy$

وهناك من يؤخر المكمم: $x^2+y^2 \geq xy\ ,\ \forall x,y \in R$

نفي المكممات:

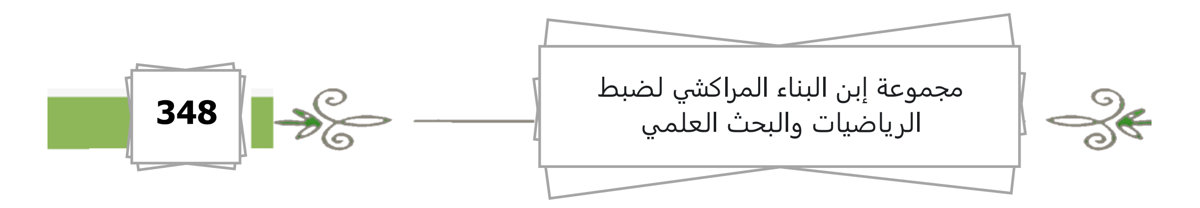
أما إذا اجتمع المكمم الكلي مع الوجودي فالترتيب مهم جدا فإذا سبق المكمم الكلي الوجودي مثل

$\forall x \in R, \exists\ y > 0 : y = x^2$

فهذا يعني أن المجهول بعد المكمم الوجودي y متعلق بـ x أي

$\forall x \in R, \exists\ y(x) > 0 : y(x) = x^2$

وهذا يعني أن y يمكن أن يأخذ قيمة مختلفة لأجل كل x مختلف.



لكن إذا سبق المكمم الوجودي الكلي مثل: $\exists\ y > 0\ ,\ \forall x \in R : x^2+2x+2 > y$

فهذا يعني أن y لا علاقة له بـ x فيجب أن لا يتغير بتغير x وهذا يعني أن عبارتنا تكتب بالشكل

$\exists\ y > 0\ (\forall x \in R : x^2+2x+2 > y)$

أي العبارة $(\forall x \in R : x^2+2x+2 > y)$ صحيحة من أجل y معين مهما غيرنا x .

إذا إلتقى مكممان وجوديان فالترتيب لا يهم مثال ذلك: $\exists\ y > 0\ ,\ \exists\ x > 0 : x^2+y^2= 1$

فهذه نفسها: $\exists\ x > 0\ ,\ \exists\ y > 0 : x^2+y^2= 1$

كتلخيص لما سبق عندما نكتب $\forall x : P(x)$ فنحن نعنى أن P صحيحة مهما تغيرx

وعندما نكتب $\exists\ x : P(x)$ فنحن نعني أنه يوجد x يجعل P صحيحة.

ننبه هنا إلى أن المكمم الكلي لا يعني الوجود حتما مثال ذلك: $\forall x\ (x \in\varnothing \Rightarrow x \in R)$

فهذه العبارة صحيحة لكن هذا لا يعني أنه يوجد عنصر x في المجموعة الخالية.

إذا أردنا نفي عبارة منطقية بالمكممات فالمكمم الكلي يتحول لوجودي أي: $\neg\ (\forall x : P(x))$

يعطينا $\exists\ x\ \neg\ P(x)$ أي نفي من أجل كل x العبارة P صحيحة هو يكفي أن نجد x من أجله تكون P خاطئة (على المنطق الكلاسيكي) .

وكذلك نفي المكمم الوجودي يعطينا المكمم الكلي $\neg\ (\exists x : P(x))$ يعطينا $\forall\ x\ \neg\ P(x)$

أي نفي يوجد x يجعل P صحيحة هو أن أي x كان سيجعل P خاطئة.

بالنسبة للوجود مع الوحدانية $\exists !x : P(x)$ فهذه يمكن كتابتها بالمكممات الأخرى على الشكل

$(\exists x : P(x)) \wedge (\forall x,\ \forall y : (P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow x=y)$

أي يوجد x يحقق P وإذا وجدنا x و y يحققان P فهما واحد.

الشطر الثاني هو من يعطي الوحدانية.



وعليه النفي يعطينا:

$\neg(\exists !x : P(x))$:

العبارة

$(\forall x : \neg P(x)) \vee (\exists x, \exists y : P(x) \wedge P(y) \wedge \neg(x = y))$

أي إما أنه لا يوجد x يحقق P أو أنه يوجد x و y يحققانها لكن مختلفان.

فالشطر الأول هنا هو نفي الوجود: $\forall x : \neg P(x)$

والشطر الثاني هو نفي الوحدانية: $\exists x, \exists y : P(x) \wedge P(y) \wedge \neg(x = y)$

اي نفي يوجد و وحيد هو لا يوجد أو ليس وحيد.



المنطق كأنك تراه

هل كل استدلال صحيح ينتج قضية صحيحة ؟

لو أخذنا قضية P و تأملنا الاستلزام $P \Rightarrow P$ سنجد أنه يمثل قضية صحيحة بل لدينا $P \Leftrightarrow P$
لكن هذه لا تفيدنا شيئا عن صحة P .

في استعمال الاستلزام نحتاج أن ننطلق من قضية صحيحة باستلزام صحيح أي

$$(H \wedge (H \Rightarrow P)) \Rightarrow P$$

لنستنتج صحة P .

فإذا أخذنا كمثال الاستدلال:

$$L = \lim 2^n \Rightarrow 2L = 2 \lim 2^n$$
$$\Rightarrow 2L = \lim 2^{(n+1)}$$
$$\Rightarrow 2L = L$$
$$\Rightarrow L = 0$$

فهو من الناحية المنطقية صحيح إذ بينا أن

$$L = \lim 2^n \Rightarrow \lim 2^n = 0$$

لكنه من نوع $H \Rightarrow P$

أي النهاية موجودة تستلزم النهاية تساوي الصفر لكن نحتاج لنتثبت صحة P أن ننطلق من H صحيحة أي

$$(H \wedge (H \Rightarrow P)) \Rightarrow P$$

فإذا أكملنا الاستدلال بصحة H كانت P صحيحة وإلا فلا نعرف صحة P والتي نعلم في حالتنا هذه أنها خاطئة.

كمثال آخر يمكننا أخذ

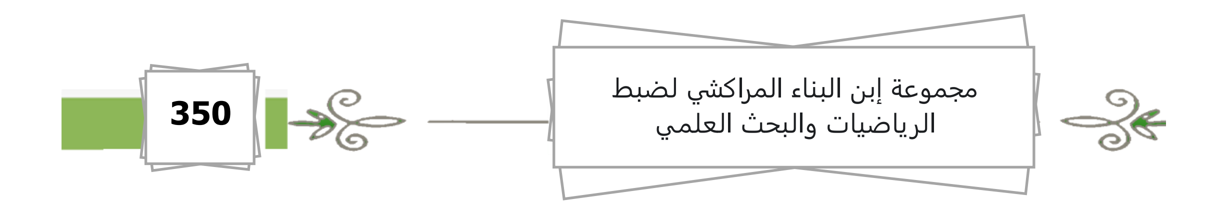
$$L = \lim 2^{(-n)} \Rightarrow 2 L = 2 \lim 2^{(-n)}$$
$$\Rightarrow 2 L = \lim 2^{(-n+1)}$$
$$\Rightarrow 2L = L$$
$$\Rightarrow L = 0$$

ونضيف عليه أن $2^{(-n)}$ متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالصفر فهي تقبل نهاية حسب خاصية الحد الأعلى في R فنكون هنا بينا أن $(\mathbf{H} : L = \lim 2^{(-n)})$ صحيحة و$P \Rightarrow H$ صحيح بحيث

$$(\mathbf{P} : \lim 2^{(-n)} = 0)$$

ومنه $(H \wedge (H \Rightarrow P)) \Rightarrow P$

إذن نستنتج صحة P أي: $\lim 2^{-n} = 0$



إذن المنطق نفسه لا يصنع الصحة والصواب إنما يحول قضايا لقضايا فليس كل استدلال منطقي صحيح ينتج قضايا صحيحة بل لابد من الانطلاق من قضايا صحيحة.

فعندما نقول

$$\text{Lim } x^2 = 0^2 \mid x \to 0$$

فنحن نستعمل استلزاما صحيحا انطلاقا من عبارة صحيحة أصلها أن كثيرات الحدود مستمرة على R أي كون f مستمرة على مجموعة تعريفها يكتب منطقيا

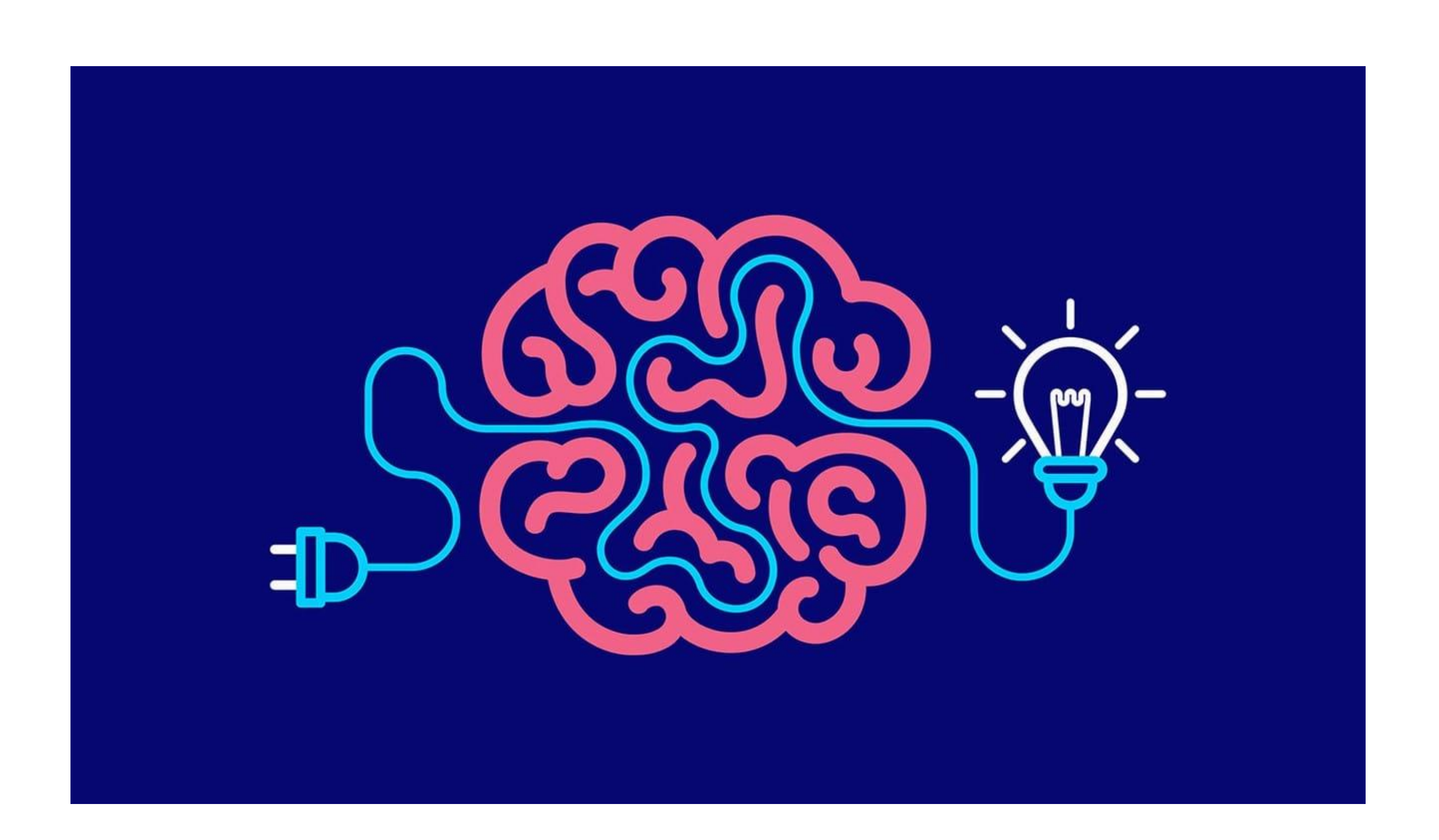
$$\forall\ t : t \in Df \Rightarrow \lim f(x) = f(t) \mid x \to t$$

فنحن هنا نستدل بصحة العبارة

$$H(t) : t \in Df \Rightarrow \lim f(x) = f(t) \mid x \to t$$

عند كل t أي عند $t=0$ يكون لدينا

$$(\forall\ t : H(t)) \Rightarrow H(0)$$



النفي اللغوي والنفي الرياضي: في هذا الموضوع سنتطرق لبعض الفواق بين النفي في اللغة والنفي في الرياضيات والمقصود بالنفي في اللغة.

النفي في اللغة يأتي لمعان عديدة:

نفي وجود كقوله عليه الصلاة : لا نبي بعدي. فالنفي هنا يقتضي إنتفاء وجود نبوة بعده عليه الصلاة والسلام.

وقد يأتي النفي لعدم الصحة كقوله عليه الصلاة والسلام : لاَ صَلاَةَ لِمَنْ لَمْ يَقْرَأْ بِفَاتِحَةِ الْكِتَاب.

فالصلاة قد توجد إلا أنه من لم يقرأ فيها بأم الكتاب فهي غير صحيحة.

وقد يأت النفي لعدم الكمال كقوله عليه الصلاة والسلام : لا صلاة بحضرة الطعام ولا وهو يدافعه الأخبثان .

فإذا جاء،بالصلاة مع حضرة الطعام فهي صحيحة إلا أنها غير كاملة لإشتغال قلبه بتشهي الطعام.

وليس المقصود الخوض هنا في التفريعات الأصولية التي خالف فيها البعض الجمهور في هذه المسائل كمذهب الإمام ابن حزم في نفي صحة صلاة الدافع للأخبثين وذهاب الحنفية لصحة الصلاة بلا فاتحة وحمل النفي هنا على الكمال.

المقصود أن النفي في اللغة يأتي لمعان متعددة نفي وجود، نفي صحة، ونفي كمال.

أما في الرياضيات فالنفي يدخل على قضية لنفي صحتها فهو مقتصر على هذه الحيثية فقط على خلاف النفي اللغوي.

وهل نفي صحة قضية إذا كان خطأ يقتضي صحة القضية ؟

هذا ما نسميه مبدأ الثالث المرفوع ففي المنطق الكلاسيكي القضية إما صحيحة أو خاطئة أما في المنطق الحدسي فخطأ قضية لا يقتضي صحة نفيها.

وحسب المنطق المستعمل قد تقبل براهين دون أخرى فمبرهنة القيم المتوسطة مثلا لا تقبل في المنطق الحدسي ذاك أنها مبنية على مبدا الثالث المرفوع.

أما في اللغة فهل نفي مسألة يقتضي صحة غيرها ؟ الجواب لا، مثال ذلك قول تعالى : فَلَا تَقُل لَّهُمَا أُفٍّ.

وهذا لا يعني أنه يمكنك أن تشتم والديك لأن الشتم غير داخل لغة في الأف.

إلا أنه هنا مفهوم الموافقة يقتضي أن النهي على أف نهي لما هو أكبر منها كالشتم والضرب.

فالملاحظ هنا أن النفي الرياضي مؤطر مضبوط يدخل على القضايا صحة أو خطأ ولا يدل على غير ذلك ما عدا الخلاف الموجود في مبدا الثالث المرفوع.

أما النفي اللغوي فخاضع للسياق اللغوي ولمقصود المتكلم لذلك تختلف معانيه.

وهنا نشير لمسألة مهمة في الرياضيات وهي أنها تفصل بين المسائل فمتى أخذنا قضية فقد عزلناها عن ما سواها من حيث المعنى وكذلك عولناها عن ذوق الدارس لها، بعكس اللغة التي لا يمكن عزلها عن مقصود المتكلم بها وعن سياق الكلام ذكرا وعدم ذكر.



بين المنطق الرياضي والواقع البشري

قالت الأم : يا بنات ضعن الأكواب الخضراء فوق الطاولة.

أما البنت **الرياضياتية** فقالت المقصود أن نضع جميع الأكواب الخضراء فوق الطاولة لكن نفعل ما نشاء مع الاكواب الحمراء نضعها أو لا نضعها فوق الطاولة دليل ذلك أن القضية رياضيا مهما كان الكوب الأخضر فهو فوق الطاولة صحيحة صحيحة وإن كان كوب أحمر فوقها.

أما البنت اللغوية فقالت ما دامت أمنا حددت الأكواب بالخضراء فهي لا تريد غيرها فوق الطاولة وإلا ما فائدة تحديد اللون بالاخضر.

وجهة نظر **البنت اللغوية** أن معنى الجملة تأثر بقائله البشري فالرياضيات علم يفصل الخواص لكن الواقع غير ذلك فلا يمكن فصل الخواص عن الاشياء.

فكون الجملة بشرية نتج منها أنها ذات معنى بجميع ألفاظها فإن كانت الرياضيات تجيز القضايا كيفما كانت فالبشر لا، إنما كل زيادة في القضية فهي تحمل معنى وإلا كانت لغوا.

لذلك رياضيا أمكن وجود أكواب خضراء وحمراء فوق الطاولة لكن عمليا لا يمكن ذلك إذ لو وضعت أكواب ذات ألوان اخرى لما كان لقيد الإخضرار من معنى.

قد يبدو الأمر سهلا لكن لو تمعنا جيدا لوجدنا مناظرة أينشتاين مع بور من هذا النوع فأينشتاين يرى الفيزياء توقعية تصف الواقع بغض النظر عن المراقب اما بور فيرى أن الفيزياء تصف تفاعلنا مع الواقع لذلك هي احتمالية.

الواقع معقد فوصفه بمجرد قضايا محلية منفصلة لا يعطي نتيجة دقيقة وهذا الذي حصل مع فيزياء الكم وعجائبها.

بالطبع أترككم تستنتجون لمن كان نصيب فردات النعال من البنتين😂

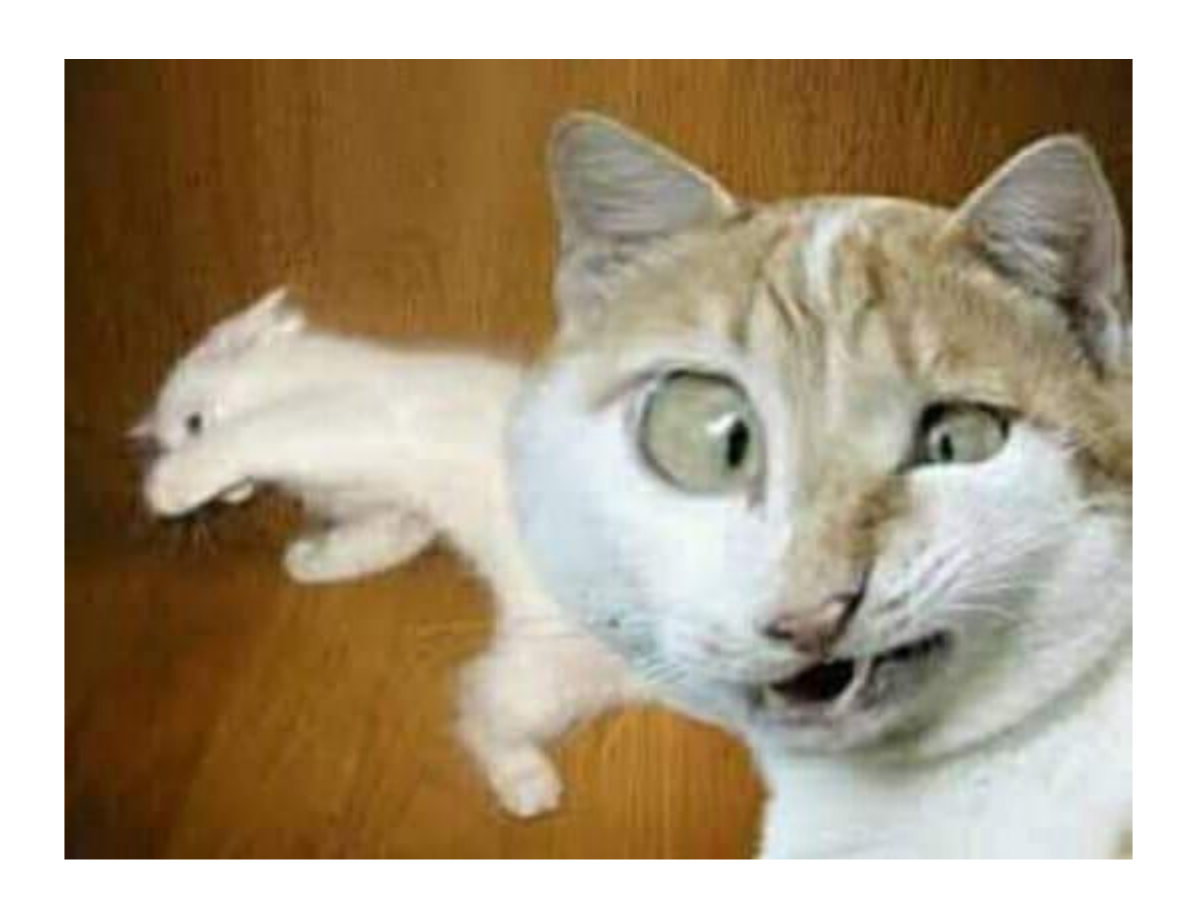


المشاغب والقط المتشغشبرودنجر

القط : ما معنى قضية غير قابلة للتقرير ؟

المشاغب : هي قضية لا يمكن إثبات صحتها أو خطئها في نظام مسلماتي فهي منفصلة عنه إذا فرضناها صحيحة فهي لا تتعارض معه وإن فرضناها خاطئة فلا تتعارض كذلك.

القط : حتى أنتم عندكم قط شرودنجر🙀



متتالية غودشطاين : هي متتالية عددية في الأعداد الطبيعة معرفه بطريقة خوارزمية تنعدم ابتداء من رتبة معينة إلا أن إنعدامها ابتداء من رتبة قضية غير قابلة للتقرير في مسلمات بيانو أي مجموعة الأعداد الطبيعية البدائية ، لبرهنتها لابد من الاستعانة بالترتيبات ordinaux

https://fr.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Goodstein

Définition d'une suite de Goodstein [modifier | modifier le code]

Avant de définir une suite de Goodstein, définissons d'abord la *notation héréditaire en base n*. Pour écrire un entier naturel avec une telle notation, on l'écrit d'abord sous la forme :

$$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0$$

où chaque a_i est un entier compris entre 0 et *n-1*. Ensuite, on applique le même traitement aux exposants *k*, *k-1*, … itérativement, jusqu'à obtenir une expression constituée uniquement d'entiers entre 0 et *n-1*.

Par exemple, 35 s'écrit en base 2 : $2^5 + 2 + 1$ et en notation héréditaire (on parle aussi de notation *itérée*) en base 2 : $2^{2^2+1} + 2^1 + 1$.

La **suite de Goodstein** d'un entier *m*, notée *G*(*m*), est définie comme suit : le premier élément de la suite est *m*. Pour obtenir l'élément suivant, on écrit *m* en notation héréditaire en base 2, puis on change chaque 2 en 3, et enfin on soustrait 1 du résultat. On a alors le deuxième élément de la suite. Pour obtenir le troisième, on écrit l'élément précédemment calculé en notation héréditaire en base 3, on change les 3 en 4, et on retranche 1. On continue ainsi jusqu'à obtenir 0 (ce qui se produit toujours, comme démontré plus bas).

Plus formellement, la suite *G*(*m*)(*n*) est définie par l'itération des deux opérations suivantes : à l'étape *n* (en posant *G*(*m*)(*1*) = *m*) :

1. Écrire l'entier *G*(*m*)(*n*) en notation héréditaire en base *n* + 1, et remplacer *n* + 1 par *n* + 2 ;
2. Soustraire 1 ; on obtient ainsi *G*(*m*)(*n+1*).

Exemples de suites de Goodstein ; énoncé du théorème [modifier | modifier le code]

Les toutes premières suites de Goodstein se terminent rapidement. Par exemple *G*(3) :

Base	Notation héréditaire	Valeur	Notes
2	$2^1 + 1$	3	Le 1 représente 2^0 (dans les étapes suivantes, il reste inchangé, puisque $b^0 = 1$ pour tout *b*).
3	$3^1 + 1 - 1 = 3$	3	On change 2 en 3, puis on soustrait 1
4	$4^1 - 1 = 3$	3	On change 3 en 4 puis on soustrait 1
5	3 − 1 = 2	2	Puisque la base utilisée est supérieure aux chiffres de la décomposition, les changements de base ultérieurs sont sans effet.
6	2 − 1 = 1	1	
7	1 − 1 = 0	0	

بعض النصائح في تحرير البراهين

الأولى : ربط الكائنات ببعضها

عندما يأتي المكمم الوجودي لكائن رياضي بعد المكمم الكلي لكائن آخر ذلك يعني أن الكائن الوجودي متعلق بالكائن الكلي ، مثال ذلك تعريف النهايات:

مهما كان ابسيلون اكبر تماما من الصفر فيوجد n_0 من N بحيث....

فهنا n_0 متعلق بالابسيلون لذلك الافضل كتابته $n_{epsilon}$

انظر العبارة الأولى في الصورة

الثانية : تغيير المتغير في النهايات

لتسهيل الكتابة يمكن وضع تغيير المتغير تحت رمز النهاية كما في الصورة العبارة الثانية.

الثالثة : تكبير الأقواس عند تعددها

انظر العبارة الثالثة في الصورة

استعمال الألفاظ اللغوية في تحرير البراهين يكون **بقيدين**: في شرح البرهان : هنا لك أن تستعمل ما تشاء.
أما في البرهنة نفسها فلا يحق لك أن تستعمل إلا ما هو مصطلح عليه كأن تعوض الاستلزام بلفظ منه او إذن.

خطأ يقع فيه الكثير من التلاميذ : يقفزون في خطوات الحسابات و يهملون كتابة ما يفكرون فيه من الحلول بحروفه ونقاطه فيكتب الحرف أو الحرفين فإن لم يظهر له الحل يتوقف...

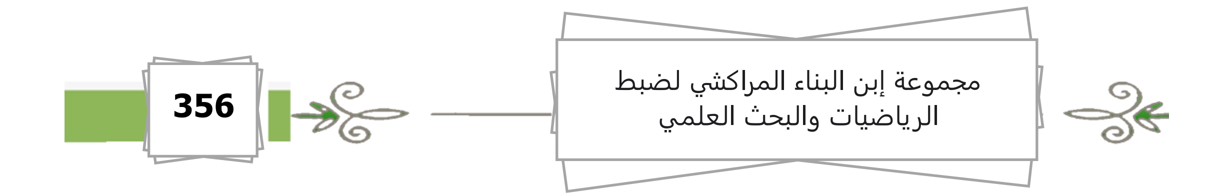
ليكن تفكيرك بالكتابة و لا تهمل منها شيئا و لا تقفز الخطوات و أكتب كتابة رياضية متقنة بالرموز و بحذافيرها وحتى إن كان الحل لم يظهر لك في تفكيرك فأكتب ما تفكر فيه فسيظهر الجواب لوحده.

$$1)\ \forall\epsilon>0, \exists n_\epsilon\in\mathbb{N}, \forall n>n_\epsilon : |U_n-l|<\epsilon$$

$$2)\ \lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{y=\frac{1}{x}\to0^+}\frac{e^y-1}{y}=1$$

$$3)\ \lim_{x\to+\infty}\left(1+ln(\frac{x+1}{x})\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+ln(\frac{x+1}{x})\right)^{\frac{1}{ln(\frac{x+1}{x})}}\right)^{xln(\frac{x+1}{x})}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty} xln(\frac{x+1}{x})}=e^{\lim\limits_{z=\frac{1}{x}\to0^+}\frac{ln(1+z)}{z}}=e$$



مشكلة القفز عند تحرير البرهان الرياضي

الكثير عندما يكتب برهانا يقفز المراحل ظنا منه أنها واضحة لكن عند التمحيص نجد خطأ البرهان فيما كان يظن أنه واضح.

لابد من تحرير البرهان خطوة خطوة بحيث يصبح البرهان متكلم عن نفسه دون ترك جزء منه في رأس الكاتب ذلك أن كل ما لم يُخضعه الكاتب للضبط المنطقي هو مصدر محتمل للخطأ.

فعندما نبرهن لابد من كتابة كل صغيرة وكبيرة ولنبدأ بكتابة ما نظنه واضحا فعند الكتابة ما يُظن واضحا يتضح أنه غير واضح وأنه مصدر خطأ يحطم البرهان كله



مبرهنة عدم الاكتمال لغودل حطمت أحلام هلبرت بصناعة رياضيات مكتملة مبنية على أسس سليمة.

النظريات الرياضية تبنى على مسلمات مستقلة فيما بينها منطقيا وعليها تبنى البراهين بواسطة مؤثرات منطقية.

في نهاية القرن التاسع عشر وقع ما يعرف بأزمة الأساسيات أين اكتشف العلماء تناقضات في رياضيات عصرهم والتي كانت تبنى على الحدسيات كاعتبارهم أن أي خاصية مفهومة قادرة على صناعة مجموعة.

هذه الحدسية مكنت راسل من وضع متناقضة عن طريق فرض وجود مجموعة جميع المجموعات والتي لا يمكنها أن تكون لأنها تنتمي لنفسها.

دفعت هذه الأزمة الرياضياتيين إلى صناعة رياضيات حديثة مضبوطة قائمة على مسلمات متينة أو ما يعرف بنظرية المجموعات ZFC ومن مسلماتها التسليم بوجود المجموعة الخالية، بناء مجموعة انطلاقا من عنصر و مسلمة الاختيار.

يبقى هذا النظام ليس محل اتفاق في جميع حيثياته من المناطقة لكنه ساهم في ضبط الرياضيات خاصة بعد قيام مجموعة بورباكي باستعماله لإعادة كتابة الرياضيات.

قام هلبرت في بداية القرن العشرين بإطلاق مشروع عملاق لإعادة كتابة المبرهنات الرياضية في هذا النظام الجديد مما دفعه ومن سار على نهجه لإنشاء الفضاءات الطبولوجية والهلبرتية.

سار هذا البرنامج في طريق سليمة إلى أن حضرت مبرهنة غودل التي أنهت حلم هلبرت...

استطاع غودل سنة 1931 أن يبرهن عدم اكتمال هذا النظام بل عدم اكتمال أي نظام خوارزمي وتنص مبرهنة غودل على قسمين:

الأول أن كل نظام مسلماتي متطور كفاية لإنتاج الخوارزميات العددية فهو غير مكتمل أي توجد فيه قضايا غير قابلة للتقرير أي لا يمكن الحكم عليها بالصحة أو الخطأ.

الثاني أنه لا يمكن برهنة عدم تناقض مسلمات نظام مسلماتي خوارزمي إلا في نظام مسلماتي أكبر منه وبتعبير آخر لا يمكن برهنة عدم تناقض نظام مسلماتي من الداخل بل لابد من نظام أكبر منه يثبت صحته.

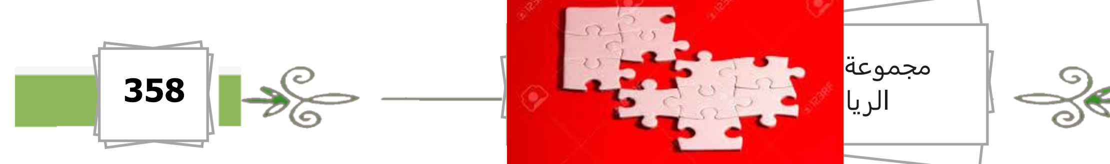
إذن حسب مبرهنة غودل لا يمكننا إنطلاقا من ZFC بناء رياضيات مكتملة بل أكثر من ذلك لا يمكننا إثبات عدم تناقضها..... لكن يبقى بناء رياضيات غير خوارزمية ممكن للخروج من هذا المأزق...

مبرهنة غودل كانت كالصدمة لهلبرت وتلامذته، لكن على عكس المتوقع نتج عنها نظرية الحسابيات والتي مهدت لظهور الإعلام الآلي: https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9orie_de_la...

للمزيد: مبرهنة عدم الإكتمال لغودل (فرنسي):

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8mes_d...

أزمة الأساسيات (فرنسي): https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Crise_des_fondements



مبرهنة عدم الاكتمال لغودل : (Kurt Gödel en 1931) لكن ماذا يفعل القط هنا ؟

لو سألت نفسك لماذا دخلت هذا المنشور ؟ هل بسبب العنوان أو لرؤيتك للقط ؟

كيفما كان الجواب سأطرح سؤالا أهم منه:

هل القط موجود لأنه موجود ؟ ستجيب نعم لأنه موجود فأنا أراه.

في الحقيقة جوابك خاطئ إذ لو لم تكن أنت كمراقب تراه موجودا فلن تستطيع الحكم عليه بالوجود...

رياضيا إذا قلنا أن وجود القط هي القضية P فالسؤال هل القط موجود لأنه موجود يترجم كالتالي:

$P \Rightarrow P$

أي لنثبت صحة P اعتمدنا على P نفسها فنحن لم نبرهن شيئا.

لكن الذي فعلناه أدخلنا قضية جديدة Q وهي أنا أرى القط موجود فأصبحت

$Q \Rightarrow P$

فلجأنا لقضية خارجية لنثبت P .

فهذه هي إحدى مبرهنتي غودل والتي تنص على أنه لا يمكننا أن نبرهن على عدم تناقض نظام مسلماتي إلا من الخارج فلابد من إضافة مسلمات جديدة.

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8mes_d...

قد تبدو المسألة غريبة لكن يبدو أن الكون يتوافق مع الرياضيات في هذه الحيثية فحسب ميكانيك الكم لا يمكننا مراقبة الإلكترون إلا بالتجربة أي بالتفاعل معه عن طريق إدخال إلكترون آخر فلا يمكننا وصف الجزيئات إلا بإدخال المراقب فالذي نصفه ليس الواقع لكن ما نراه في الواقع.

مسلمة غودل الثانية نتائجها أكثر صعوبة من الأولى ذلك أنها تنص على عدم اكتمال الرياضيات فكل نظام مسلماتي مبني على منطق خوارزمي توجد بداخله قضايا غير قابلة للتقرير أي يمكن صناعة قضايا لا يمكن الحكم عليها بالصحة أو الصواب.

قد يقول قائل لكن كيف هذا فلابد للقضية أن تكون صحيحة أو خاطئة ؟

في الحقيقة لا، لأن الصحة والخطأ في الرياضيات تبنى على مسلمات فالصحة والخطأ المطلقتين غير موجودتين في الرياضيات إنما هي صحة وخطأ بالنسبة للمسلمات.

من أشهر القضايا غير القابلة للتقرير في نظرية المجموعات ZFC هي فرضية المستمر والتي تنص على التالي :

هل توجد مجموعة قدرتها أكبر من قدرة N وأقل من قدرة R ؟

فهذه القضية منفصلة عن النظام المسلماتي ZFC فهي غير قابلة للتقرير.

استعمل غودل في برهانه طريقة شبيهة بقطر كنتور إذ حول القضايا لنظام عد مكتوب بالصفر والواحد ثم صنع منها قضية غير قابلة للتقرير.



نتائج مبرهنة غودل تتعدى الرياضيات إلى العلوم الأخرى لأن السؤال يطرح نفسه هل نستطيع صياغة نظرية جميع النظريات التي تصف الواقع ؟

لكن إن كانت كذاك فهل تستطيع وصف نفسها ؟

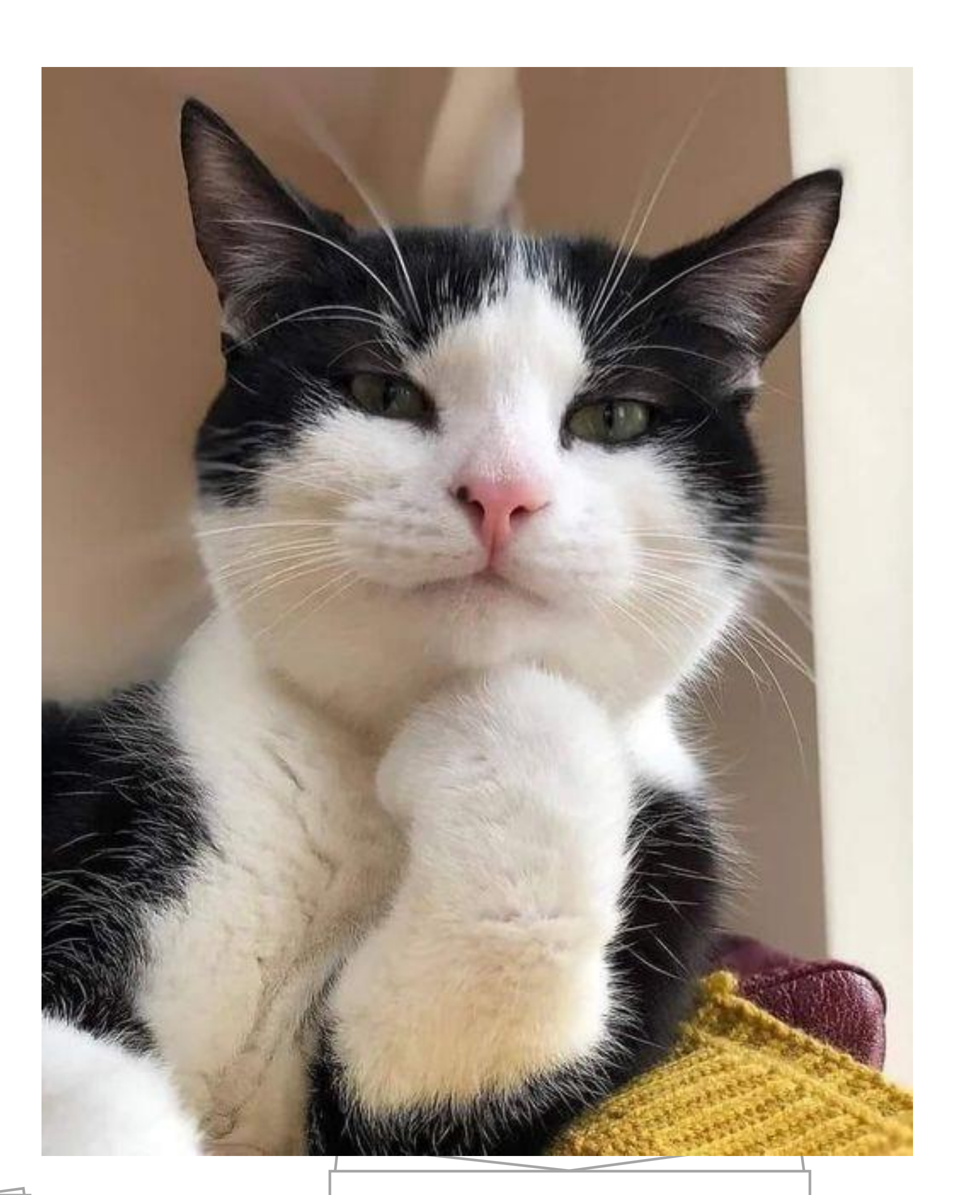
وهل نستطيع وصف واقعنا من داخله.....

كل هذه الأسئلة تبقى مفتوحة....

مبرهنة غودل جاءت بأسئلة أكثر منها من أجوبة لكن العلم عودنا أن مفاهيمه تتطور بالأزمات فهكذا صنعت الرياضيات الحديثة من أزمة الأساسيات وظهرت النسبية من أزمة ثبوت سرعة الضوء.

فلعل هناك رياضيات جديدة قادمة تجيب على أسئلة غودل ذلك أن مبرهنتي غودل تعتمدان على المنطق الخوارزمي فربما الرياضيات المستقبلية تتخلص من الخوارزميات لكن مشكلة ذلك أننا لا نستطيع وصف الكون حاليا إلا بالكميات والكميات أعداد والعدد يحتاج لخوارزمية.

المستقبل الوحيد الذي يمكنه الجواب على هذا لكن من الواضح أننا نحتاج لتغيير جذري في كيفية صناعة الرياضيات.



هل يمكن إدراك الحقيقة المطلقة ونحن جزء منها ؟ مبرهنة عدم الإكتمال لغودل، إنهيار التطابق الكمي

مبرهنة عدم الإكتمال لغودل لها شطران شطر يقول أنه مهما كان النظام المسلماتي الخوارزمي فهناك قضايا لا يمكن الحكم عليها بالصحة والخطأ فيه أو ما يسمى بالقضايا غير قابلة للتقرير.

والثاني أنه لا يمكن الحكم على صحة نظام مسلماتي أي عدم تناقض المسلمات من الداخل أي نحتاج لنظام أكبر منه للحكم عليه وعليه النظام الأكبر يحتاج لما هو أكبر منه للحكم عليه وهكذا فالمسالة لا تنتهي.

لفهم هذه المبرهنات سنفرض أنه وجدنا برهانا يثبت عدم تناقض نظام مسلماتي لكن السؤال كيف نبرهن رياضيا أن هذا البرهان صحيح ؟

سيجيب احدهم اننا ننظر إليه من حيث البناء الرياضي لكن الإشكال هنا أن النظرة البشرية لا تعتبر برهانا.

إذن نحتاج وضع أسس منطقية للبرهنة على صحة هذا البرهان أي برهان على صحة البرهان.

لكن هذا البرهان الثاني يحتاج برهانا لبرهنة أنه صحيح !!! وهكذا فالمسالة لا تنتهي.

هذا بالضبط الذي صنعه غودل هو طرح القضية الجديدة على المسلمات فهل هي لا تتناقض فقد استعمل ما يسمى الميتا منطق أي قضايا منطقية متعلقة بالمنطق ذاته فبطرح هذه القضية الجديدة أمكنه أن يقول انه لا يمكننا برهنتها من الداخل إذ تحتاج برهانا جديدا والذي هو بدوره يحتاج برهانا جديدا فالمسألة لا تنتهي.

ولو تأملنا جيدا وجدنا أن المشكلة قائمة من كون الحاكم على صحة البرهان من خطئه هو العقل البشري فمتى أراد الخروج من المسألة لم يمكنه الحكم عليه وإذا أراد مراقبتها من الخارج كان حكمه عليها متعلق بها فأصبح من الداخل أي لا يمكن فصل المراقب عن الرياضيات من حيث الحكم بالصحة والخطأ.

وهذا يقودنا لمثالين : الأول منطقي فالمسألة شبيهة بسؤال الحلاق في القرية الذي لا يحلق إلا شعر كل من لا يحلق لنفسه فمن سيحلق شعر الحلاق ؟

إن لم يكن هو فهو لا يحلق نفسه إذن سيحلق شعره لكنه هكذا يحلق لنفسه وهذا تناقض وإن مان سيحلق لنفسه فهو لا يحلق لمن يحلق لنفسه وهذا تناقض.

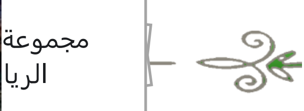
وهذا شبيه جدا بمتناقضة راسل في المجموعات فمجموعة كل المجموعات لا يمكن أن تكون موجودة لأنها لو وجدت لكانت تنتمي لنفسها وهذا تناقض.

فمتى تعلق الكائن الرياضي من حيث الوجود بنفسه وصلنا لتناقض ذلك أن الرياضيات تجريد للسببية فلا يمكن للحادث أن يكون سببا في مسببه.

والمثال الثاني فيزيائي من ميكانيك الكم فمتى راقبنا جزيئا تساقط التطابق الكمي وأشهر مثال عن هذا المفهوم هو قط شرودنغر ففي فيزياء الكم لا يمكن فصل المراقب عن التجربة.

كل هذا يقودنا لسؤال صعب جدا وهو هل بإمكاننا الوصول إلى حقيقة مطلقة ونحن جزء منها ؟

السؤال مطروح لحد اليوم







البرهان بالتنازل المنته :

هل فعلا $5 - 7$ غير ممكنة في الإبتدائي ثم أصبحت ممكنة في المتوسط، هي غير ممكنة حتى في الجامعة.

لكن قبل أن تتهاطل الاستغرابات واصل قراءة هذا المقال فلندقق في المسألة قليلا.

هل سمعت بالبرهان بالتنازل المنته ؟ قد استعملته في الثانوي وفي الجامعة فهو يستعمل بكثرة في مجموعة الأعداد الطبيعية.

عرفه فيرما كالتالي : لا توجد متتالية متناقصة تماما غير منتهية من الأعداد الطبيعية.

https://fr.m.wikipedia.org/…/M%C3%A9thode_de_descente…

من بين استعمالاته برهنة خوارزمية حساب باقي القسمة عن طريق الطرح المتكرر أي إذا كان لدينا عددان طبيعيان غير معدومين $n > m$

فيمكننا القيام بهذه الخوارزمية لحساب باقي القسمة:

$a = n - m$

$a = a - m$

....

إلى أن نصل ل $a < m$

فتكون العملية $a - m$

مستحيلة في N فباقي القسمة هو a الأخير

نعم هذه هي نفس القاعدة المدرسة لتلاميذ الإبتدائي فهي لم تتغير فعندما ذكر لهم أن $5 - 7$ غير ممكنة إنما ذكر لهم ذلك في N فهذا ليس من الخطأ.

وعندما ذكر لتلاميذ المتوسط أن

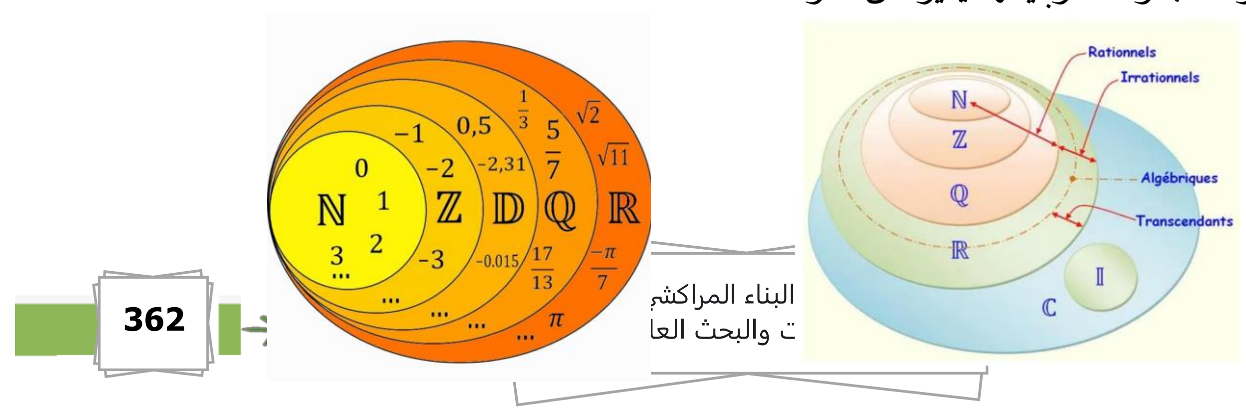
$5 - 7 = -2$

إنما كان ذلك في Z فهي ليست نفس العملية.

بل لا توجد عملية بدون بنية جبرية.

الرياضيات التي تدرس في المناهج تقتصر على الحالات الخاصة ليستوعب التلميذ لكن مفاهيمها عادة صحيحة والتشويه فيها قليل فمتى وضعت في إطارها وافقت الرياضيات الحديثة.

المثال المذكور في المنشور يبين أهمية تحديد المجموعة قبل الدراسة فلا توجد كائنات من غير مجموعات وتغيير المجموعات وبنياتها يغير من سلوك الكائنات.



لنضبط الرياضيات معا : المكمم العمومي عندما يطبق على المجموعة الخالية.

البعض يستشكل عليهم صحة القضية من نوع:

$$\forall x\ (x \in A \Rightarrow P(x))$$

حيث P قضية معينة، عندنا تكون A المجموعة الخالية،

مثال ذلك تعريف الاحتواء:

$$A \subset B \Rightarrow \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

فالكثير يستشكل الأمر عندما تكون A مجموعة خالية فكيف نجزم بصحة هذه الصيغة

$$\forall x\ (x \in \varnothing \Rightarrow x \in B)$$

مع أنه لا يوجد عنصر في المجموعة الخالية ؟

قد يظن البعض أن صحة القضية هنا ترجع لكون

$$x \in \varnothing$$

خاطئة إذن الاستلزام صحيح وهذا خطأ.

بل القضية صحيحة من تعريف المكمم الكلي فهو شمولي فمتى شمل جميع عناصر المجموعة وكانت القضايا صحيحة من أجل أي عنصر منها فالقضية العامة صحيحة.

فالمكمم الكلي لا يفرض الوجود فمتى لم يوجد عنصر فقد أدى دوره فهو لا يشترط عددا في العناصر.

ولتقريب ذلك للفهم سنضرب مثالا من الواقع فلو طلبت من أجير أن يجلس في محل ساعة كل ما جاءه مشتري باعه شيئا بدينار فجلس ساعة لكنه لم يأته أحد فالأجير قد أدى عمله مستحق لأجره كما لو جاءه مشتري أو إثنين أو ثلاث فعدد الوافدين لا يفرق إنما دوره القيام بالمهمة المطلوبة كلما جاءه أحد وقد قام بها. وهذا الحاصل مع المكمم العمومي فهو يقوم بمهمته كلما وجد عنصرا لكنه لا يفرض عددا على العناصر ولذلك كل القضايا من نوع

$$\forall x\ (x \in \varnothing \Rightarrow P(x))$$

صحيحة وكحالة خاصة قضية احتواء المجموعة الخالية في جميع المجموعات

$$\varnothing \subset B \Rightarrow \forall x\ (x \in \varnothing \Rightarrow x \in B)$$



أين الخطأ ؟

سنبرهن أن مجموعة الأعداد الطبيعية منتهية بالتراجع.

من أجل المجموعة $\{0\}$ هي منتهية لأن عدد عناصرها 1 .

الآن ننطلق من المجموعة $\{0,1,....,n\}$ التي نعتبرها منتهية ونبرهن أن $\{0,1,...,n,n+1\}$ منتهية.

لدينا $\{0,1,...,n,n+1\} = \{0,1,..,n\} \cup \{n+1\}$ فإذا كان عدد عناصر $\{0,1,..,n\}$ هو a فإن عدد عناصر $\{0,1,...,n,n+1\}$ هو $a+1$ ومنه المطلوب.

أين الخطأ ؟

أول شيء نقوم به هنا هو كتابة تعريف البرهان بالتراجع وهو:

إذا كانت عندنا متتالية قضايا $P(n)$ بحيث $P(0)$ صحيحة والاستلزام $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ صحيح فإن القضية $\forall\ n \in N : P(n)$ صحيحة.

الآن بعد كتابة التعريف ننظر في مسألة المنشور

القضية هي:

محدودة $P(n) = \{0,...,n\}$

إذن حسب تعريف البرهان بالتراجع برهنا صحة $\forall\ n \in N : P(n)$ أي $\forall\ n \in N : \{0,...,n\}$ محدودة.



لكن المطلوب برهنته كان:

محدودة N

فهذه القضية تختلف عن القضية:

محدودة $\forall\ n \in N : \{0,...,n\}$

وكذلك تختلف عن جميع القضايا $P(n)$ لأن N لا تساوي مجموعة من الشكل $\{0,1,...,n\}$

سبب الخطأ:

السبب هنا هو الخلط بين القضية ومجموعة رتب القضايا N .

كما أن البرهان بالتراجع صحته تأتي من هذه الاستلزامات

$$P(0) \Rightarrow P(1) \Rightarrow ... \Rightarrow P(n)$$

فعددها منته ولا يقبل في المنطق الخوارزمي عدد غير منته من تركيبات المؤثرات المنطقية.

ولفهم الخطأ جيدا وإذا رمزنا ل $A_n = \{0,...,n\}$ فلدينا $A_0 \subset A_1 \subset ... \subset A_n$

فنحن برهنا قضايا من الشكل $P(A_n)$ لكن كون جميع عناصر N موجودة في المجموعات من الشكل A_n لا علاقة له بالقضية P فهنا يوجد خلط بين استعمال القضية P للمجموعة ككائن وبين عناصر هذه المجموعة.

تناقض واحد يهدم الرياضيات....

في الرياضيات يكفي أن نجد قضية واحدة صحيحة وخاطئة في آن واحد لهدم جميع المبرهنات إذ يمكننا أن نبرهن أن أي قضية ستكون صحيحة وخاطئة في آن واحد.

لكن ماذا يعني وجود قضية صحيحة وخاطئة في آن واحد ؟

هذا يعني تناقض المسلمات التي انطلقنا منه.

وقد يسأل البعض كيف يمكن أن نبرهن عدم تناقض المسلمات الرياضياتية ؟ والجواب أن ذلك مستحيل فقد أجاب على هذا السؤال غودل في مبرهنته الشهيرة بمبرهنة عدم الإكتمال.

مبرهنة عدم الإكتمال لغودل حطمت أحلام هلبرت بصناعة رياضيات مكتملة مبنية على أسس سليمة.

تنص مبرهنة غودل على **قسمين:**

الاول أن كل نظام مسلماتي متطور كفاية لإنتاج الخوارزميات العددية فهو غير مكتمل أي توجد فيه قضايا غير قابلة للتقرير أي لا يمكن الحكم عليها بالصحة او الخطأ بل يمكن اضافتها كمسلمة جديدة لتوسيع النظام الاصلي.

الثاني انه لا يمكن برهنة عدم تناقض مسلمات نظام مسلماتي خوارزمي إلا في نظام مسلماتي أكبر منه.



قانون ديمورغان والمنطق الحدسي والقضايا غير القابلة للتقرير

قانون ديمورغان كما هو في الصورة يبين التكافؤ بين نفي الربط و فصل النفيين والتكافؤ بين نفي الفصل ووصل النفيين.

من السهل برهنة هاذين التكافؤين باستعمال الجدول المنطقي وفصل الحالات.

إلا ان الإشكال الذي يطرح هو في الاستلزام التالي:

هل نفي الوصل يستلزم فصل النفيين ؟

$\neg (P \wedge Q) \Rightarrow (\neg P) \vee (\neg Q) \quad ?$

هذه القضية غير صحيحة في المنطق الحدسي لأنه لا يأخذ بمبدأ الثالث المرفوع أي نفي نفي القضية لا يكافئ القضية فاستعمال جدول منطقي يقابل فيه نفي القضية الصحيحة بصفر أو العكس غير صحيح.

المسألة الأخرى التي تطرح وهي القضايا غير قابلة للتقرير فإذا كان وصل النفيين قابلا للتقرير فالأمر غير مضمون لكل قضية لوحدها فالجدول المنطقي المستعمل في قانون ديمورغان يفرض أن القضية قابلة للتقرير.

قانون ديمورغان صحيح بفرضيات أولها إستعماله في المنطق الكلاسيكي والثاني أن تكون القضايا قابلة للتقرير.

بل حتى في المنطق الكلاسيكي ما يظنه البعض أن صحة فصل قضيتين تقتضي صحة احد منهما على الأقل غير صحيح إنما الصحيح هو استلزام في اتجاه واحد أي:

P صحيحة $\vee$ Q صحيحة $\Rightarrow (P \vee Q)$ صحيحة

أي إذا كانت P صحيحة أو Q صحيحة ف P أو Q صحيحة لكن لا نعلم شيئا عن الحالة العكسية.

ولعل البعض يصعب عليه تصور ذلك لكن الجواب على ذلك سهل أن تفكير البعض يصب نحو كون القضية لا تتجزأ وأنها إما صحيحة أو خاطئة وهذا خطأ.

أليس في مجموعة الأعداد الحقيقية إذا كان لدينا مجموعتين قابلتين للقياس فاتحادهما قابل للقياس لكن العكس ليس دوما صحيح!

فالمسألة نفسها فقد يكون الوصل بين قضيتين قابلا للتقرير لكن لو أخذت كلا مفردة لا نستطيع ذلك.

رؤية القضية كصحيح أو خطأ هو تبسيط كبير لمفهوم صعب الإحاطة به.

لمزيد من الفائدة يمكنكم الرجوع إلى مقال أستاذنا الفاضل الدكتور ناحي هرماس

(عن مقال من الأخطاء الخطيرة جدا والشائعة جدا بين أساتذة ومدرسي الرياضيات ما يلي: لنفترض مؤقتا أن لدينا قضيتين 'R' و'S' من الرياضيات....)

https://m.facebook.com/groups/1821825877897150?view=permalink&id=1903800613033009



وهذا المقال كذلك (عن مقال الرابط الفصل المنطقي"$\vee$")

https://m.facebook.com/story.php?story_fbid=4361056710648537&id=100002327528675

حول قانون ديمورغان

https://stringfixer.com/fr/De_Morgan's_law

وحول المنطق الحدسي هذا المقال:

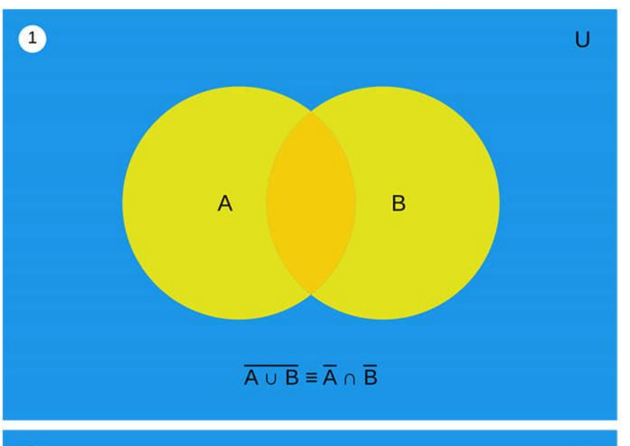
https://www.quirin.science/Logique…/logic_int.pdf

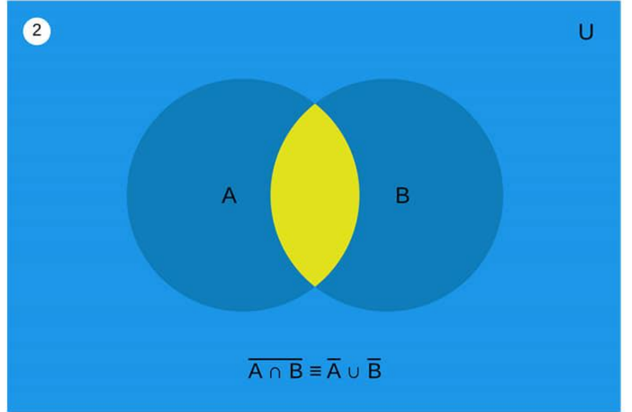
- $\overline{(A \wedge B)} \leftrightarrow (\bar{A}) \vee (\bar{B})$
- $\overline{(A \vee B)} \leftrightarrow (\bar{A}) \wedge (\bar{B})$

$$\overline{(A \wedge B)} \rightarrow (\bar{A}) \vee (\bar{B})$$

$\overline{(A \wedge B)} \leftrightarrow (\bar{A}) \vee (\bar{B})$						
A	B	$A \wedge B$	$\overline{(A \wedge B)}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$(\bar{A}) \vee (\bar{B})$
0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	0	**1**	1	0	**1**
1	0	0	**1**	0	1	**1**
1	1	1	**0**	0	0	**0**

$\overline{(A \vee B)} \leftrightarrow (\bar{A}) \wedge (\bar{B})$						
A	B	$A \vee B$	$\overline{(A \vee B)}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$(\bar{A}) \wedge (\bar{B})$
0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	1	**0**	1	0	**0**
1	0	1	**0**	0	1	**0**
1	1	1	**0**	0	0	**0**





Dans la logique intuitionniste

Trois des quatre implications des lois de de Morgan tiennent dans la logique intuitionniste . Concrètement, nous avons

$$\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q),$$

et

$$(P \vee Q) \rightarrow \neg((\neg P) \wedge (\neg Q)),$$
$$(P \wedge Q) \rightarrow \neg((\neg P) \vee (\neg Q)),$$
$$(\neg P) \vee (\neg Q) \rightarrow \neg(P \wedge Q)$$

alors que la réciproque de la dernière implication ne tient pas en logique intuitionniste pure et serait équivalente à la loi du tiers exclu faible

$$\neg P \vee \neg\neg P$$



البرهان بالتراجع ؟ ما تركيبته الجينية ؟

البرهان بالتراجع مبني على فكرة نقل الخصائص مع الإستغراق،

فلو نظرنا إلى شرط البرهان بالتراجع على مجموعة الأعداد الطبيعية نجدها:

أن يحقق العنصر الأول الخاصية

إذا حقق عنصر خاصية فالذي يليه يحققها كذلك.

في الحقيقة هذان الشرطان يخفيان مفهوما أبسط من ذلك وهو أن مجموعة الأعداد الطبيعية مرتبة بالتتابع بحيث تبدأ من الصفر وأينما كان عدد فما قبله عدد منته من العناصر أي إذا انطلقنا من الصفر فسنصل إلى أي عدد نريد بعد عدد منته من التنقلات وإن كانت مجموعة الأعداد الطبيعية غير منتهية.

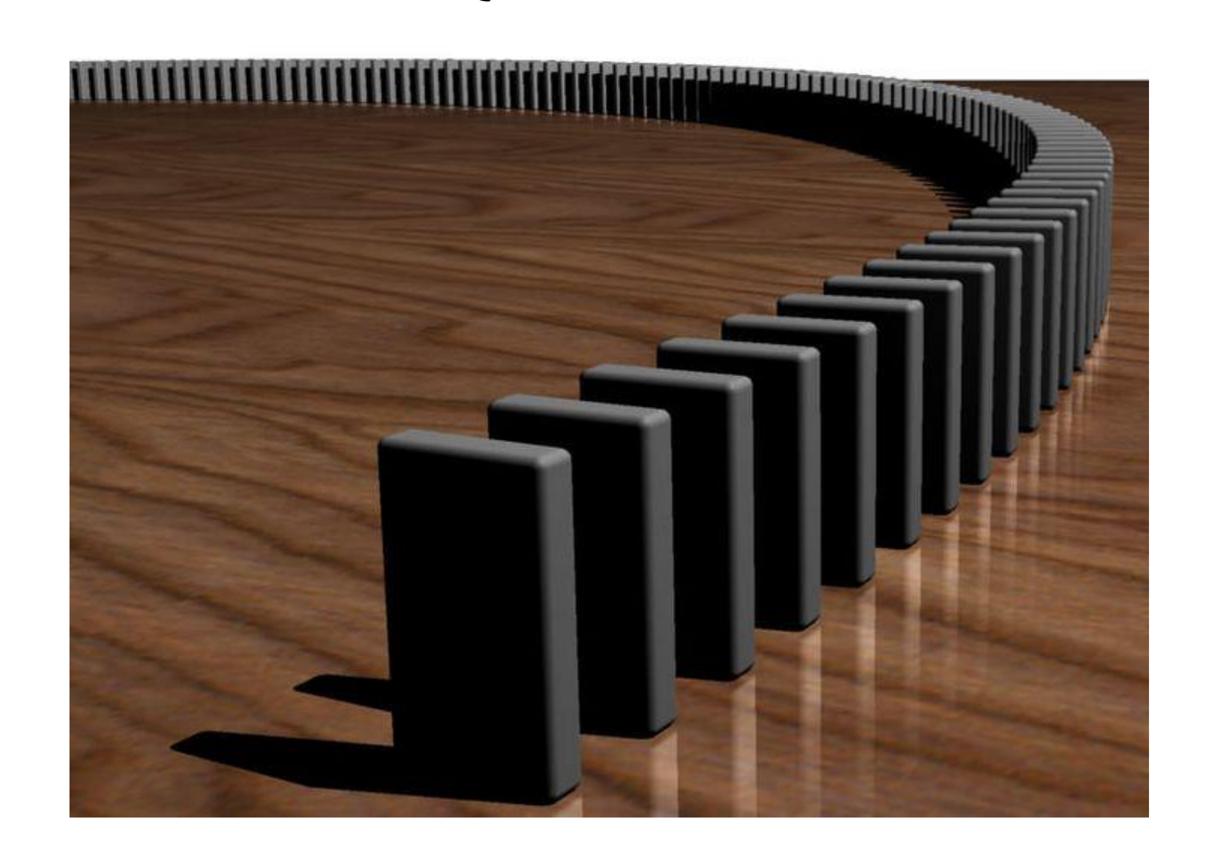
فخاصية الوصول هذه نسميها الإستغراق وهي تحتاج لشرطين:

ترتيب جيد أي كل مجموعة جزئية لها عنصر اصغري.

أي عنصر ما قبله يوجد عدد منته من العناصر.

ثم يأتي البرهان بالتراجع فيقول إذا كانت خاصيتي التي اريد برهنتها محققة عند العنصر الأول وتحقق شرط التعدي أي إذا كانت محققة لعنصر فهي محققة للذي يليه فالخاصية ستتعدى من العنصر الأول للذي يليه ثم للذي يليه ولا يوجد عنصر وإلا وسنصل إليه بعد عدد منته من التنقلات فإستغراق التعدي مضمون.

فيمكن أن نقول البرهان بالتراجع مبني على خاصية جينية موجودة في الأعداد الطبيعية بل هي من تصنعها فإذا أردنا تعميمه فإما نقيده بهذه الخصائص الجينية أو نعدلها مع الحفاظ على مضمونها.



تبرير البرهان بالتراجع

من جدول الحقيقة يمكننا التأكد بسهولة أن

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow H)) \Rightarrow (P \Rightarrow H)$$

البرهان بالتراجع البسيط يعتمد على أطروحتين:

برهنة صحة الخاصية من أجل n_0

$$P(n_0) \text{ صحيحة}$$

وبرهنة صحة الاستلزام:

$$\forall n > n_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

للتبسيط سنأخذ $n_0 = 0$

من صحة الاستلزام يمكننا كتابة

$$((P(0) \Rightarrow P(1)) \wedge (P(1) \Rightarrow P(2))) \Rightarrow (P(0) \Rightarrow P(2))$$

يمكننا تكرار العملية عشر مرات مثلا للوصول إلى صحة الاستلزام

$$P(0) \Rightarrow P(10)$$

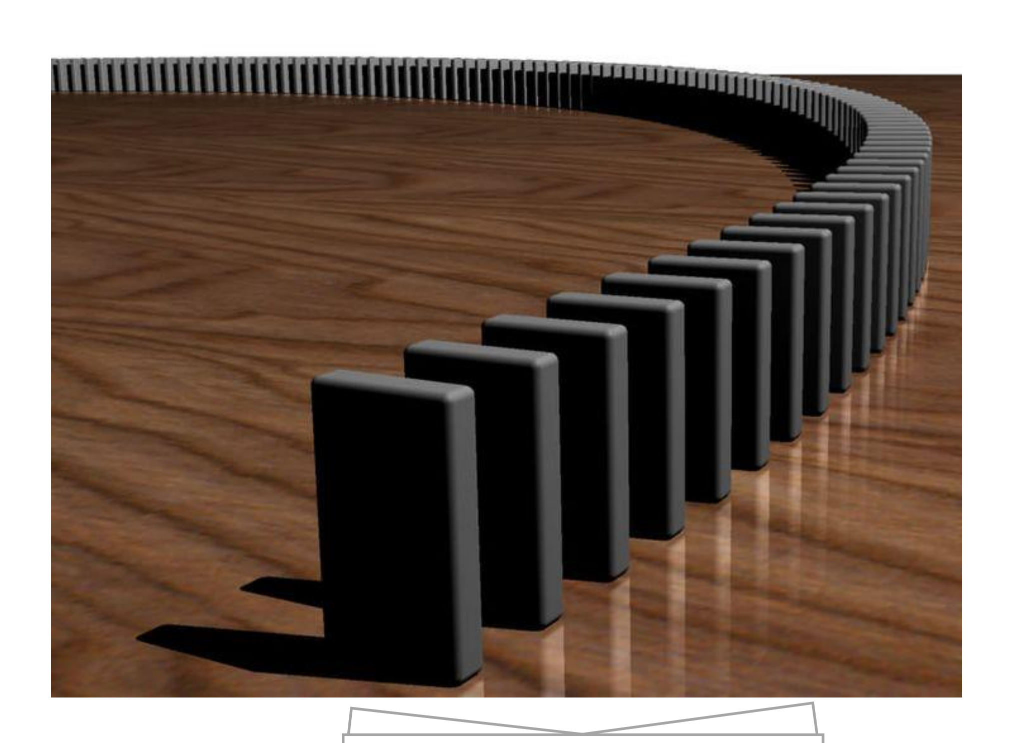
لكن كيف نحصل على

$$\forall n : P(0) \Rightarrow P(n)$$

نحتاج لذلك تكرارا لا نهائيا وهذه نأخذها كمكنة بالتسليم أو نستنتجها من مسلمات أخرى كالترتيب الجيد ل N مع مبدأ الثالث المرفوع.

وبما أننا بينا صحة $P(0)$ سيكون

$$(\forall n : P(0) \wedge (P(0) \Rightarrow P(n))) \Rightarrow (\forall n : P(n))$$



خطأ شائع في البرهان التراجع.

فرض صحة $P(n)$ خطأ شائع في البرهان التراجع.

لا تحتاج الكلام عن صحة $P(n)$ لأنك تبحث عنها.

الأفضل كتابة نبرهن صحة الاستلزام $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ من أجل كل n .

هكذا يتعود التلاميذ على الكتابة الصحيحة

إذا فرضت صحة $P(n)$ فقد فرضت صحة $P(n+1)$ لأنه واحد من إثنين إما أنك تجاوزت فقصدت القضية: $\forall\ n : P(n)$ وهنا تكون فرضت صحة $P(n+1)$ لأن المتغير لا يهم أو انك تقصد الصيغة $P(n)$ وهنا فرض صحتها لا معنى له لأنها صيغة ويبقى قول نفرض صحة $P(n)$ كلام زائد لا نحتاجه عند البرهنة

الذي يطلب برهنته هو القضية: $\forall\ n : P(n) \Rightarrow P(n+1)$

لا نحتاج أن نقول نفرض $P(n)$ قل ليكن n طبيعي و لننطلق من $P(n)$ (ننطلق من عبارة $P(n)$ وليس نفرض صحة $P(n)$) حتى نجد $P(n+1)$

في البرهان بالتراجع على صحة عبارة يجب التفريق بين هدف البرهان وطريقة البرهان فالهدف هو برهنة العبارة $\forall\ n \in N : P(n)$ والطريقة هي:

برهنة صحة: $P(0)$

وبرهنة صحة الاستلزام: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

أي:

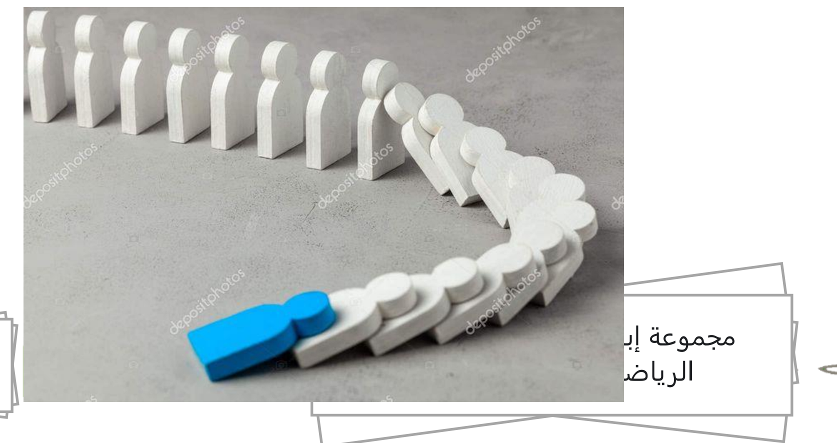
$$(P(0) \wedge (\forall\ n \in N : P(n) \Rightarrow P(n+1))) \Rightarrow (\forall\ n \in N : P(n))$$

تنبيه

البرهان بالتراجع نتأكد من صحة P_0 وصحة الاستلزام $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

ولا يوجد فيه نفرض صحة P_n إنما هي صحة الاستلزام السابق.

الذي يفرض صحة P_n فقد فرض صحة P_{n+1} لأن المتغير لا يهم لذلك لا نفرض هذا إنما نبرهن صحة الاستلزام $P(n) \Rightarrow P(n+1)$



برهان البرهان بالتراجع:

عبد الحكيم بن شعبانة

برهان البرهان بالتراجع

البرهان بالخلف

لنفرض أنها توجد مجموعة متقابلة مع الأعداد الطبيعية وخاصية تحقق شروط البرهان بالتراجع

$$A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots.\}$$

$P(x_0)$ صحيحة

$\forall n \in \mathbb{N} : \ P(x_n) => P(x_{n+1})$ صحيح

ولنفرض أنه توجد قيم طبيعية عندها الخاصية P غير صحيحة، أي أن

مجموعة هذه القيم غير خالية $M = \{n \in \mathbb{N} : P(x_n)$ خاطئة $\} \neq \emptyset$

بما أن مجموعة الأعداد الطبيعية مرتبة ترتيبا جيدا فلنأخذ العنصر الأصغر من هذه المجموعة

$$m = min(M)$$

بفصل الحالات: إذا كان $m = 0$ فهذا تناقض لأن $P(x_0)$ صحيحة

إذا كان $m > 0$ فلدينا $P(x_m)$ خاطئة

و $P(x_{m-1}) \Longrightarrow P(x_m)$ صحيح

إذن $P(x_{m-1})$ خاطئة ومنه $m - 1 \in M$

وهذا تناقض لأن m أصغر عنصر في M

ومنه المطلوب : **صحة البرهان بالتراجع**

تعميم البرهان بالتراجع على مجموعات كيفية منها المجموعات غير القابلة للعد.

الاستقراء الموغل(recurrence transfinie)

التعميم الأول:

لتكن المجموعة E غير الخالية والمرتبة جيدا بعلاقة الترتيب $\leq$

وتحقق كشرط زائد وهو أن كل مجموعة جزئية منها محدودة من الأعلى وغير خالية تقبل عنصرا أعظميا.

نلاحظ أن N تحقق هذه الشروط.

بما أن E غير خالية فهي تقبل عنصرا أصغريا سنرمز له بـ m_0

نلاحظ أنه من أجل كل x من E إن كان يختلف عن m_0 فستكون المجموعة

$$A(x) = \{a \in E \mid a < x\}$$

محدودة وغير خالية فهي تقبل عنصرا أعظميا سنسميه بسابق x ونرمز له بـ x-1

و إذا لم يكن x أعظميا فسيكون للمجموعة

$$B(x) = \{a \in E \mid a > x\}$$

عنصر أصغري بسبب الترتيب الجيد فسنسميه بلاحق x ونرمز له بـ x+1

نلاحظ أن $x-1 < x < x+1$ وأنها لا توجد عناصر أخرى بين x-1 و x+1 غير x .

لنفرض الآن لدينا خاصية P(x) معرفة على E فإذا كان لدينا

$P(m_0)$ صحيحة

و الاستلزام

$$\forall x \in E : P(x) \Rightarrow P(x+1)$$

صحيح

فالخاصية محققة من أجل كل x

$$\forall x \in E : P(x)$$

البرهان:

نصطلح بمجموعة جيدة كل مجموعة جزئية من E غير خالية نرمز لها بـ M تحقق ثلاث شروط

$$m_0 \in M$$

$$\forall (x, y) \in M\times E : y < x \Rightarrow y \in M$$

$\forall x \in M : P(x)$ صحيحة

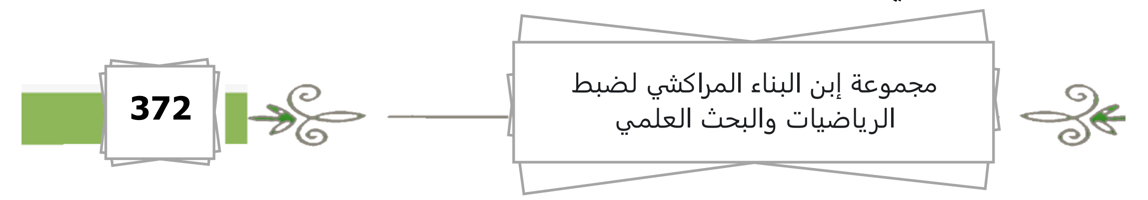
مجموعة المجموعات الجيدة ولنرمز لها بـ H غير خالية لأنها على الأقل تشتمل على المجموعة الأحادية

$\{m_0\}$

مجموعات M مرتبة بالاحتواء:

لتكن مجموعتين A و B منH

لنفرض أنه يوجد x من A لا ينتمي لـ B وليكن y من B .



فإما $x < y$ أو $y < x$ فإذا كان $x < y$ فحسب الخاصية الثانية للمجموعة الجيدة A ف $y \in A$

وإذا كان $y < x$ فحسب الخاصية الثانية للمجموعة الجيدة B ف $x \in B$

لكن هذه غير ممكنة لأنه افترضنا أن x لا ينتمي ل B ومنه مهما كان y من B فهو أقل من x وهو في A

أي $B \subset A$ وهو المطلوب.

سنبين الآن أن اتحاد مجموعات H هو مجموعة من H ولنسمهG .

لدينا

واضح $m_0 \in G$

لدينا كذلك $\forall(x, y) \in U\times E$ فإنه توجد M من H بحيث $x \in M$ ومنه

$\forall(x, y) \in M\times E : y < x \Rightarrow y \in M \Rightarrow y \in G$

وكذلك بما أن $x \in M$ فإن

صحيحة $P(x)$

إذن G مجموعة جيدة بقي أن نبرهن أن $E = G$

لنفرض أنه يوجد z من E لا ينتمي لG

ومنه كل عناصر G أصغر من z لأنه لو كان هناك عنصر من G أكبر من z ف z في G لكونها مجموعة جيدة.

بما أن E تتمتع بخاصية أن كل جزء محدود منها وغير خالي يقبل عنصرا أعظميا فسنسمي a العنصر الأعظمي ل G .

فحسب الخاصية

$\forall x \in E : P(x) \Rightarrow P(x+1)$

ولدينا a من G ف $P(a)$ صحيحة ومنه نستنتج أن $P(a+1)$ صحيحة ومنه يمكننا صناعة مجموعة جيدة جديدة $G \cup \{a+1\}$ وهذا تناقض لأن G هي اتحاد جميع المجموعات الجيدة.

ومنه $E = G$ ومنه $\forall x \in E : P(x)$ وهو المطلوب.

التعميم الثاني:

يمكننا كذلك تعميم البرهان بالتراجع بما يسمى بالتراجع غير المحدود

أو الاستقراء الموغل(recurrence transfinie)

ويعطى بهذه الصيغة إذا كانت مجموعة E مرتبة جيدا:

$\forall x \in E ((\forall y < x : P(y)) \Rightarrow P(x)$

ولا نحتاج هنا فرض $P(m_0)$ ولا فرض وجود عنصر أعظمي للمجموعات المحدودة.

من تعريف هذا النوع من الاستقراء وبوضع العنصر الأصغري m_0 نجد :

$P(m_0)$



محققة لأن

$\forall x \in E ((\forall y < m0 : P(y)) \Rightarrow P(m0))$

ثم نستعمل نفس البرهان السابق لكن نعوض القسم الأخير بما يلي:

لنفرض أنه يوجد z من E لا ينتمي لG

ومنه كل عناصر G أصغر من z لأنه لو كان هناك عنصر من G أكبر من z ف z في G لكونها مجموعة جيدة.

بما أن

$\forall x \in E ((\forall y < x : P(y)) \Rightarrow P(x))$

بوضع x = z نجد

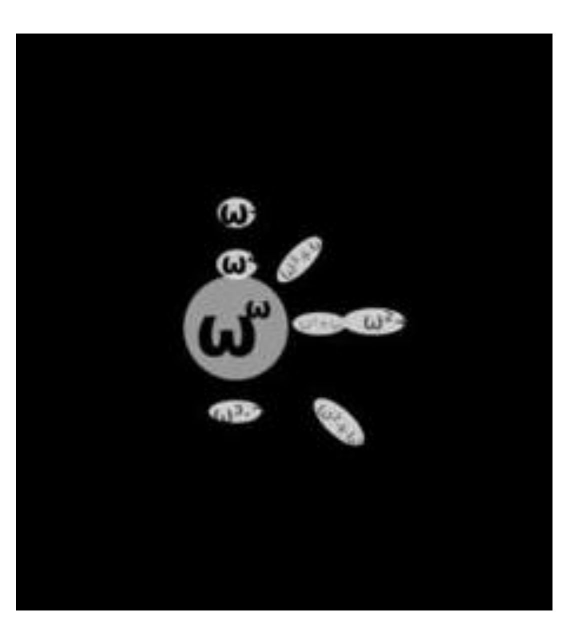
$\forall y < z : y \in G$

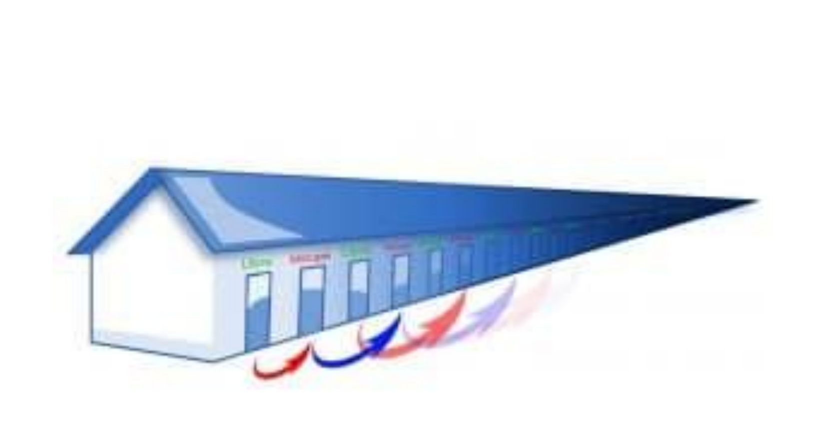
إذن

P(y) صحيحة

ومنه P(z) صحيحة ثم نواصل بنفس البرهان السابق.

نلاحظ في التعميمين أننا لم نلجأ لمسلمة الاختيار مما يجعلهما صالحين في نظرية المجموعاتZF





كيف أبرهن أن

$$\forall\ (a,b) \in R^{2}+ : (a+b)/2 \geq \sqrt{(a.b)}$$

عندما نرى مثل هذه العلاقة فيستحسن التخلص من الكسور والجذر التربيعي فيمكننا كتابة

$$(a+b)/2 \geq \sqrt{(a.b)} \Leftrightarrow a + b \geq 2 \sqrt{(a.b)}$$

ثم نربع للتخلص من الجذر التربيعي

$$\Leftrightarrow a^{2} + b^{2} + 2\ a.b \geq 4a.b$$

مع التنبه للإشارة لأنها قد تؤثر على علاقة الترتيب والتكافؤ لكن بما أنها أعداد موجبة فالتكافؤ صحيح والتربيع صالح مع الترتيب فلم يبقى إلا الحسابات للتخلص من الحدود المتشابهة فننقل $4a.b$ للطرف الآخر

$$\Leftrightarrow a^{2} + b^{2} - 2\ a.b \geq 0$$

وهنا سننتبه إلى أننا وصلنا لجداء شهير

$$\Leftrightarrow (a - b)^{2} \geq 0$$

وهي قضية صحيحة وبما أنه استعملنا التكافؤ نكون قد برهنا

$$\forall\ (a,b) \in R^{2}+ : (a - b) \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)/2 \geq \sqrt{(a.b)}$$

وهو المطلوب

التمثيل في صناعة البرهان : نموذج كتابة دالة عن طريق جمع دالتين رتيبتين.

كل دالة حقيقية قابلة للإشتقاق يمكننا كتابتها على شكل مجموع دالتين رتيبتين كما هو في الصورة لكن السؤال كيف توصلنا لهذه النتيجة ؟ هل هو وحي أو هناك طريقة ؟

لنقم بتمثيل منحنى دالتنا ولنسمها f كما هو في الشكل ولنختر نقطة من المنحنى كما هو ممثل بالنقطة الحمراء الأولى.

فنلاحظ أنه يمكننا إختيار نقطة أعلى المنحنى x_1 ترتيبها موجب على محور العينات ونقطة أسفل المنحنى y_1 بحيث ترتيبها سالب وهكذا عندما نجمع بينهما ننتج النقطة الحمراء الأولى من منحنى f .

فيمكن أن نعتبر النقطة x_1 كبداية لمنحنى دالة موجبة متزايدة والنقطة y_1 كبداية لمنحنى دالة سالبة متناقصة. لكن ماذا يحدث لو أخذنا نقطة حمراء ثانية بعد الاولى فهنا إذا أردنا إنتاجها بمجموع نقطتين من دالتين رتيبتين نحتاج إختيار نقطة x_2 أعلى من x_1 و نقطة y_2 أسفل من y_1 .

نلاحظ ان هذا ممكن فإذا إخترنا نقطة بعد نقطة يمكننا دائما إختيار نقطة مرتفعة على ما سبق لصناعة دالتنا الموجبة المتزايدة ونقطة سالبة أسفل ما سبق لصناعة دالتنا السالبة.

لكن المشكل أن دالتنا معرفة على R و R لا يمكننا ترتيبها نقطة نقطة فكيف نصنع ؟

نحن نحتاج هنا إنتاج الدالة f بطريقة بناء نقطة بعد نقطة حتى نختار لكل نقطة نقطة عليا موجبة ونقطة أسفل منها سالبة فكيف نصنع ؟

لا ننسى أن دالتنا قابلة للإشتقاق فإذا أردنا بناء لدالتنا نقطة بعد نقطة فالتكامل يفي بالغرض إذ لدينا

$$f(x) - f(a) = \int_{[a,x]} f'(x)\,dx$$

والتكامل هو جمع يبنى الدالة نقطة على نقطة لذلك لدينا

$$f(x)- f(a) = \int_{[a,x_1]} f'(x)\,dx + \int_{[x_1,x_2]} f'(x)\,dx + \int_{[x_2,x_3]} f'(x)\,dx + \int_{[x_3,x]} f'(x)\,dx$$

فمثل هذه الخاصية ما نحتاج لأننا نريد ان نضيف على كل نقطة سابقة ما هو أعلى منها وما هو أسفل منها. لكن كيف نختار ما هو أعلى من دالتنا وما هو أسفل منها ؟

الأمر سهل يكفي إستعمال القيمة المطلقة فنحن نعلم أن

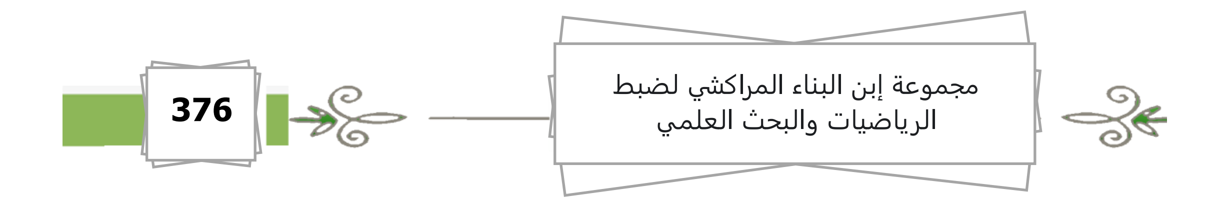
$$\int_{[a,x]} -|f'(x)|\,dx \le f(x) - f(a) = \int_{[a,x]} f'(x)\,dx \le \int_{[a,x]} |f'(x)|\,dx$$

ونحن نعلم أنه يمكننا كتابة أي قيمة حقيقية كجمع بين قيمة موجبة وقيمة سالبة إنطلاقا من القيمة المطلقة

$$b = (|b| + b)/2 - (|b| - b)/2$$

إذا تنبهنا لذلك تنبهنا إلى أن تكاملنا السابق يمكن فصله لتكامل دالة موجبة وتكامل دالة سالبة.

$$f(x) - f(a) = \int_{[a,x]} f'(x)\,dx =$$
$$\int_{[a,x]} (|f'(x)| +|f'(x)|)/2\,dx - \int_{[a,x]} (|f'(x)| - |f'(x)|)/2\,dx$$



بما أن ما داخل التكامل موجب فالتكامل متزايد فقد صنعنا هنا دالة متزايدة

$$F(X) = \int_{[a,x]} \left(|f'(x)| + |f'(x)| \right)/2 \, dx$$

ودالة متناقصة

$$G(X) = - \int_{[a,x]} \left(|f'(x)| - |f'(x)| \right)/2 \, dx$$

وصلنا تقريبا للمطلوب إلا أنه يبقي هناك مشكل

$$f(x) - f(a) = F(x) + G(x)$$

فهنا يجب أن نتخلص من $f(a)$ وهذا سهل لأنه يمكننا كذلك كتابته كمجموعة قيمة موجبة وقيمة سالبة

$$f(x) = (|f(a)| + f(a))/2 + F(x)$$
$$- (|f(a)| - f(a))/2 + G(x)$$

وهنا صنعنا دالتين رتيبتين $f(x) = F1(x) + G1(x)$ بحيث

$$F_1(x) = (|f(a)| + f(a))/2 + F(x)$$
$$G_1(x) = - (|f(a)| - f(a))/2 + G(x)$$

وهو المطلوب

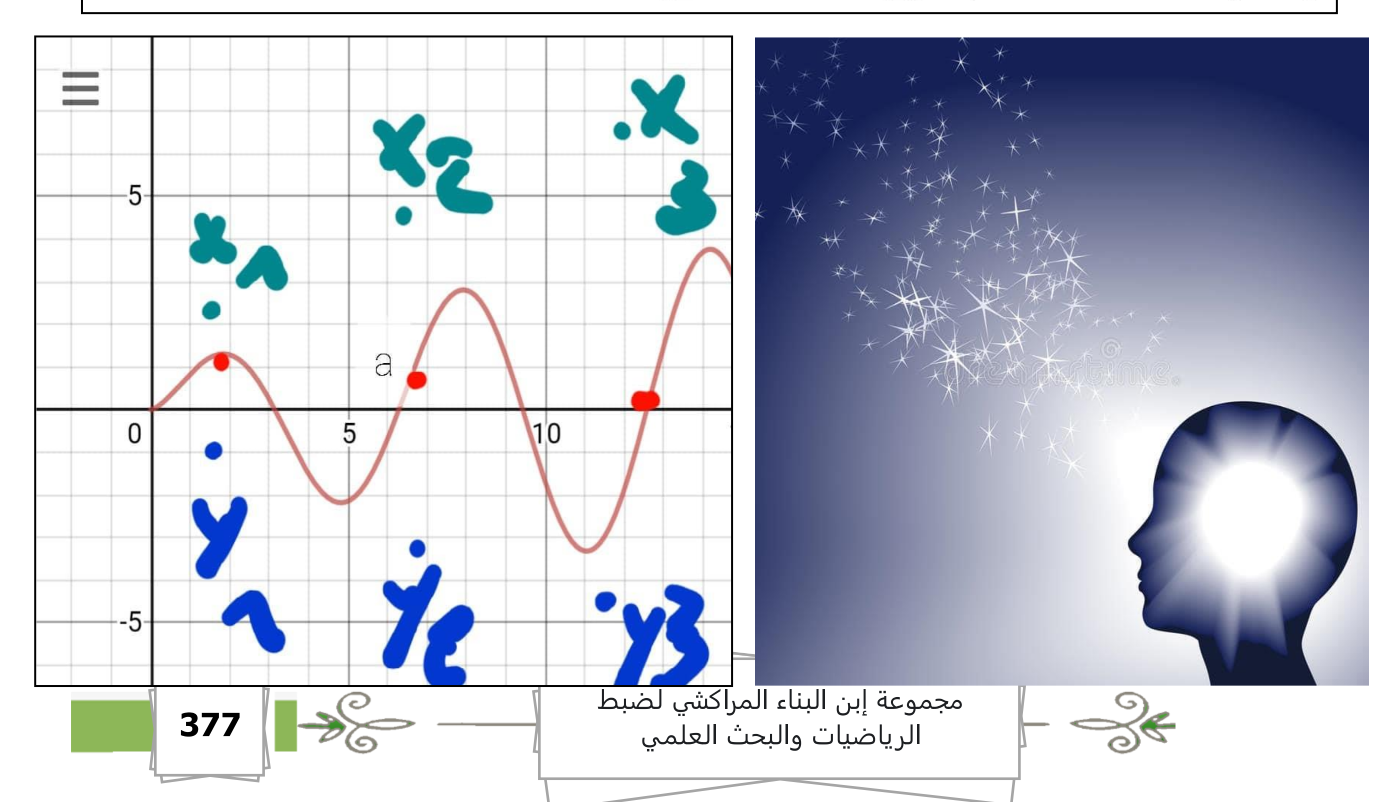
$$f'(x) = \frac{|f'(x)| + f'(x)}{2} - \frac{|f'(x)| - f'(x)}{2} \implies$$

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(x)\,dx$$

$$= \int_a^x \left(\frac{|f'(x)| + f'(x)}{2} \right) dx - \int_a^x \left(\frac{|f'(x)| - f'(x)}{2} \right) dx$$

$$\implies f(x) = \left[\frac{|f(a)| + f(a)}{2} + \int_a^x \left(\frac{|f'(x)| + f'(x)}{2} \right) dx \right]$$

$$+ \left[-\frac{|a| - a}{2} - \int_a^x \left(\frac{|f'(x)| - f'(x)}{2} \right) dx \right]$$



برهان مقترح لعدم ناطقية الجذر التربيعي ل 2

سنستعمل الخلف مع القسمة على 3 .

لنفرض أن $\sqrt{2} \in Q$ إذن يمكن كتابته كعدد ناطق $\sqrt{2} = p/q$ حيث p و q أوليان فيما بينهما

ومنه $p^2 - 2q^2 = 0$ نعلم أن باقي قسمة مربع عدد صحيح على 3 هو 0 إذا كان يقبل القسمة على 3 أو 1 إذا لم يقبل القسمة عليها.

بما أن p و q أوليان فيما بينهما فلا يمكنهما أن يقبلا القسمة على 3 سويا ومنه حسب الحالات:

$$p^2 \equiv 0\ [3] \wedge q^2 \equiv 1\ [3] \Rightarrow p^2 - 2q^2 \equiv -2\ [3]$$

او

$$p^2 \equiv 1\ [3] \wedge q^2 \equiv 0\ [3] \Rightarrow p^2 - 2q^2 \equiv 1\ [3]$$

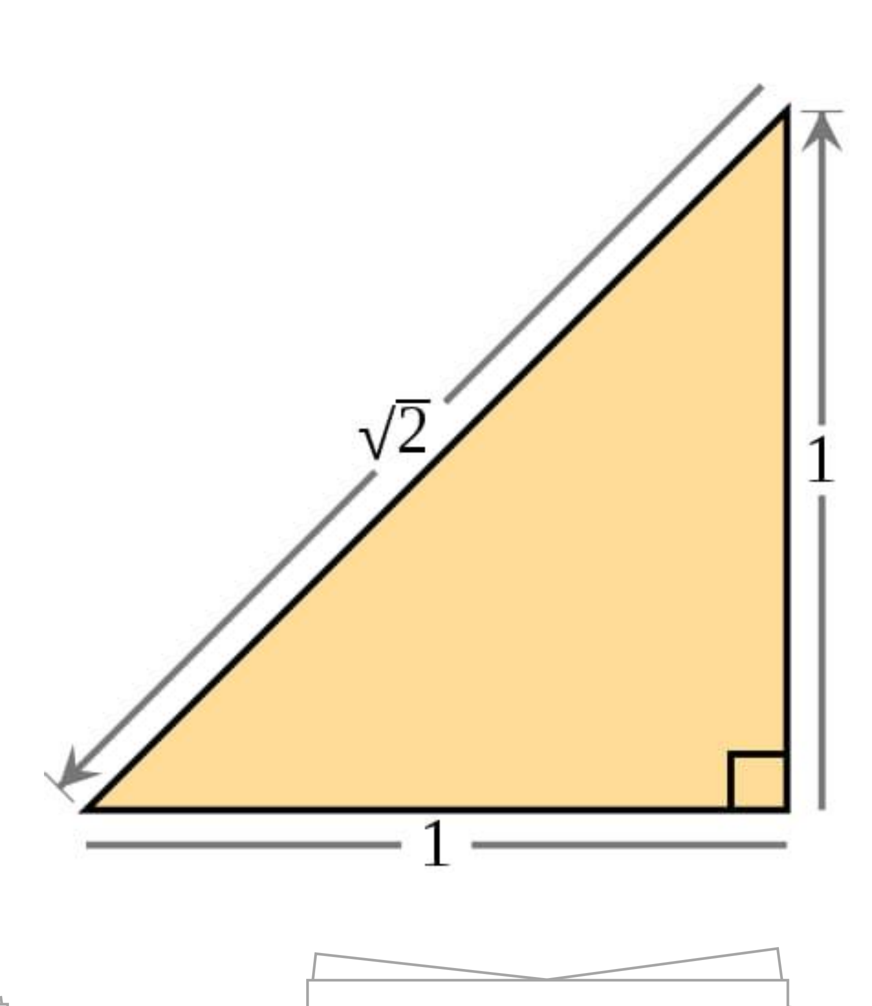
أو

$$p^2 \equiv 1\ [3] \wedge q^2 \equiv 1\ [3] \Rightarrow p^2 - 2q^2 \equiv -1\ [3]$$

وكلها تؤدي إلى تناقض مع

$$p^2 - 2q^2 = 0$$

ومنه المطلوب.



كيف نبرهن أن الجذر التربيعي ل 2 غير ناطق ؟

البرهان الشهير لهذه القضية يستعمل الخلف فهو يفرض وجود عدد ناطق كتابته القانونية p/q يحقق $(p/q)^2 = 2$ ثم يصل لتناقض عن طريق استحالة القسمة على غير مربع ل 2 .

لنحاول أن ننظر للمسألة بطرق أخرى:

الجذر التربيعي لعدد ناطق a هو حل للمعادلة $x^2=a$ إذن إثبات أنه لا يوجد عدد ناطق هو جذر تربيعي ل 2 يعود لإثبات أن المعادلة التالية لا تقبل حلا في Q

$$x^2 = 2$$

أو بالكتابة القانونية $p^2/q^2 = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2 q^2$

الطريقة الأولى:

$$p^2 = 2 q^2 \Leftrightarrow p^2 - q^2 = q^2$$

فإذا مررنا للموافقات بالقسمة على q سنجد

$$\Rightarrow p^2 - q^2 \equiv q^2 [q]$$

$$\Rightarrow p^2 \equiv 0 [q]$$

وهذه قضية خاطئة ذلك أن p أولي مع q مع استثناء حالة $q=1$ لأننا نعلم أن 2 ليس مربع عدد طبيعي.

إذن حسب تعريف الإستلزام لابد أن تكون القضية

$$x^2=2$$

خاطئة وهو المطلوب.

الطريقة الثانية:

$$p^2 = 2 q^2 \Leftrightarrow p^2 - 2 q^2 = 0$$

بالمرور إلى الموافقات بترديد 3 نجد

$$p^2 - 2 q^2 \equiv 0 [3]$$

نحن نعلم أن كون p و q أوليان فيما بينهما فلا يمكنهما أن يقبلا كليهما القسمة على ثلاثة كما نعلم أنه إذا كان n لا يقبل القسمة على 3 فإن باقي قسمة مربعه على 3 هو 1 ومنه الحالات الممكنة لدينا هي

$$p^2 \equiv 0 [3] \wedge q^2 \equiv 1 [3] \Rightarrow p^2 - 2 q^2 \equiv 1 [3]$$

$$p^2 \equiv 1 [3] \wedge q^2 \equiv 0 [3] \Rightarrow p^2 - 2 q^2 \equiv 1 [3]$$

$$p^2 \equiv 1 [3] \wedge q^2 \equiv 1 [3] \Rightarrow p^2 - 2 q^2 \equiv 2 [3]$$

وكل هذه الحالات تناقض مع

$$p^2 - 2 q^2 \equiv 0 [3]$$

وهو المطلوب.



سؤال طرح في المجموعة:

لدينا تطبيقان من N نحو نفسها f و g بحيث f متباين و g غامر ويحققا الخاصية التالية :

$$\forall\ n \in N : g(n) \geq f(n)$$

برهان مقترح:

توطئة:

إذا كان f تطبيق متباين من N نحو N فيوجد تطبيق تقابلي h من N نحو N بحيث foh متزايد تماما.

البرهان:

بما أن f متباين فهو تقابلي من N نحو f(N)

سنقوم ببناء تطبيق h عن طريق ترتيب رتب f بحيث صورها تكون مرتبا تصاعديا.

فنعرف h بالتراجع كالتالي

$$h(0) = f^{-1}(\min(\{f(k) : f(k) \geq 0, k \in N\}))$$

أي h عند 0 هو السابقة m التي يأخذ عندها f أصغر صورة.

$$h(1) = f^{-1}(\min(\{f(k) : f(k) > f(h(0)), k \in N\}))$$

أي h عند 1 هي السابقة التي يأخذ عندها f القيمة الموالية

وهكذا

$$h(n+1) = f^{-1}(\min(\{f(k) : f(k) > f(h(n)), k \in N\}))$$

من تكوين h هو تقابلي لأننا نأخذ سوابق h حسب ترتيب صورها والسوابق تغطي N والصور لا تتساوي لأن f متباين.

ولدينا حسب البناء

$$\begin{aligned} f(h(n+1)) &= f(f^{-1}(\min(\{f(k) : f(k) > f(h(n)), k \in N\}))) \\ &= \min(\{f(k) : f(k) > f(h(n)), k \in N\}) \\ &> f(h(n)) \end{aligned}$$

فهو متزايد تماما ومنه المطلوب.

توطئة 2 :

كل تطبيق متزايد t تماما على N فهو يحقق:

$$\forall\ n \in N : t(n) \geq n$$

البرهان بالتراجع:

$$n = 0 : t(0) \geq 0$$

واضح لأن صور t في N .

ننطلق الآن من n كيفي فإذا كان $t(n) \geq n$ ثم نضيف كون t متزايد تماما: $t(n+1) > t(n) \geq n$

ومنه $t(n+1) > n$ ومنه $t(n+1) \geq n+1$ وهو المطلوب.



برهان السؤال:

لدينا f متباين على N و g غامر بحيث:

$$\forall\ n \in N : g(n) \geq f(n)$$

كون f متباين وحسب التوطئة السابقة يوجد h بحيث foh متزايد تماما وحسب التوطئة 2 يكون من أجل كل n

$$f(h(n)) \geq n$$

ومنه $g(h(n)) \geq f(h(n)) \geq n$ نضع

$$G = goh$$
$$F = foh$$

فلدينا $n \geq F(n) \geq G(n) : \forall\ n \in N$ كون G تركيب تطبيق تقابلي وتطبيق غامر يجعله تطبيق غامر.

سنبرهن بالخلف أن $\forall\ n \in N : G(n) = n$

لنفرض أنه يوجد قيم n بحيث $G(n) > n$

فيمكننا أن نختار m هي أصغر قيمة تحقق ذلك أي $m = \min(\{n \in N : G(n) > n\})$

ومنه كل القيم التي هي أصغر من m لا تحقق ذلك أي $\forall\ n < m : G(n) \leq n$

مع خاصية $G(n) \geq n$ نستنتج أنها مساواة اي: $\forall\ n < m : G(n) = n$

و بما أن n هنا أصغر من m نستنتج

$$\forall\ n < m : G(n) < m \quad (1)$$

من جهة أخرى تعريف m لدينا

$$G(m) > m \quad (2)$$

و كذلك من خاصية G

$$\forall\ n > m : G(n) \geq n > m \quad (3)$$

من 1 و 2 و 3 نستنتج $\forall\ n \in N : G(n) \neq m$ وهو تناقض لأن G غمر ومنه

$$\forall\ n \in N : G(n) = n$$

وبما أن $n = G(n) \geq F(n) \geq n$ نجد $G(n) = F(n) = n$ ومنه $g(h(n)) = f(h(n)) = n$

أي $g(n) = f(n) = h^{-1}(n)$ إذن $f=g$ وهما تقابل.



لنضبط الرياضيات معا، مجموعة صحة قضية : رتابة دالة عددية على اتحاد مجالات كمثال

سأتطرق في هذا الموضوع لمسألة مهمة في الضبط الرياضي وهي التدقيق في القضايا المنطقية.

رأيت الكثيرين يعترضون على مسألة رتابة دالة عددية على مجالين مستعملين كمثال الدالة مقلوب x فهي رتيبة على $\mathbb{R}^*_+$ و رتيبة على $\mathbb{R}^*_-$ لكنها ليست رتيبة على اتحادهما وكأنهم يستدلون بالقضية المنطقية:

إذا كان قضية A صحيحة على مجموعة I وصحيحة على مجموعة J فهي صحيحة على اتحاديهما.

دعنا ندقق في تعريف الرتابة ولنأخذ حالة التزايد فالتعريف يقول نقول عن دالة f أنها متزايدة على مجموعة M إذا حققت: $\forall\ x,y \in M : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

فهل قضية الرتابة كقضية منطقية معرفة فعلا على المجموعة M ؟

الجواب لا، القضية معرفة على الجداء الديكارتي $M\times M$ أي

$$\forall\ (x,y) \in M\times M : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

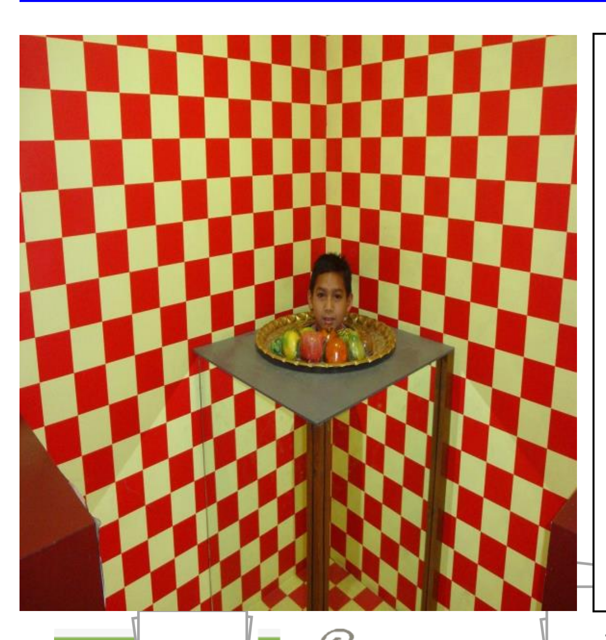
ومنه عندما نقول عن دالة أنها مثلا متزايدة على المجال I ومتزايدة على المجال J ففي الحقيقة نحن نقول: القضية صحيحة على $I\times I$ و صحيحة على $J\text{x}J$

النتيجة أن القضية صحيحة على اتحاد المجموعتين $I\times I \cup J\text{x}J$ وهذا لا يكافئ قطعا قولهم أن الدالة رتيبة على اتحاد المجالين $I \cup J$ فلكي تكون كذلك لابد أن تكون القضية صحيحة على $(I \cup J) \times (I \cup J)$ فالخلل المنطقي هنا نابع من عدم التدقيق وتطبيق القضايا المنطقية على غير مجموعاتها.

فخاصية الترتيب خاصية معرفة على الجداء الديكارتي فإذا كانت صحيحة على كل مجال على حدى فلا نوحد المجالات لنحكم بالصحة على اتحاديهما إنما لابد من توحيد مجموعات من الجداء الديكارتي والقضية صحيحة على ذلك كما هو مقرر في المنطق.

في المرفقات صورة لتعريف الرتابة من كتاب التحليل لتيرانس تاو أين لا يحدد طبيعة للمجموعة.

https://lms.umb.sk/…/TerenceTao_Analysis.I.Third…



9.8. Monotonic functions 241

as a *fixed point* of f, and this result is a basic example of a *fixed point theorem*, which play an important rôle in certain types of analysis.

9.8 Monotonic functions

We now discuss a class of functions which is distinct from the class of continuous functions, but has somewhat similar properties: the class of monotone (or monotonic) functions.

Definition 9.8.1 (Monotonic functions)**.** Let X be a subset of $\mathbf{R}$, and let $f : X \to \mathbf{R}$ be a function. We say that f is *monotone increasing* iff $f(y) \geq f(x)$ whenever $x, y \in X$ and $y > x$. We say that f is *strictly monotone increasing* iff $f(y) > f(x)$ whenever $x, y \in X$ and $y > x$. Similarly, we say f is *monotone decreasing* iff $f(y) \leq f(x)$ whenever $x, y \in X$ and $y > x$, and *strictly monotone decreasing* iff $f(y) < f(x)$ whenever $x, y \in X$ and $y > x$. We say that f is *monotone* if it is monotone increasing or monotone decreasing, and *strictly monotone* if it is strictly monotone increasing or strictly monotone decreasing.



برهان مبرهنة نهاية المتتالية الرتيبة المحدودة.

لتكن المتتالية المتزايدة U_n والمحدودة من الأعلى بـ M .

لنفرض أنها ليست كوشية إذن من نقيض تعريف المتتالية الكوشية نستنتج أنه يوجد epsilon موجب تماما ومتتاليتين مستخرجتين من متتاليتنا بحيث $V_n - W_n > epsilon$ مهما كان n اذن

$$V_0 - W_0 > epsilon$$

ومنه

$$V_0 > W_0 + epsilon$$

بما ان هذه المتتاليتين متزايدتين فيمكننا اختيار n_1 بحيث، $W_{n_1} \geq V_0$ ومنه

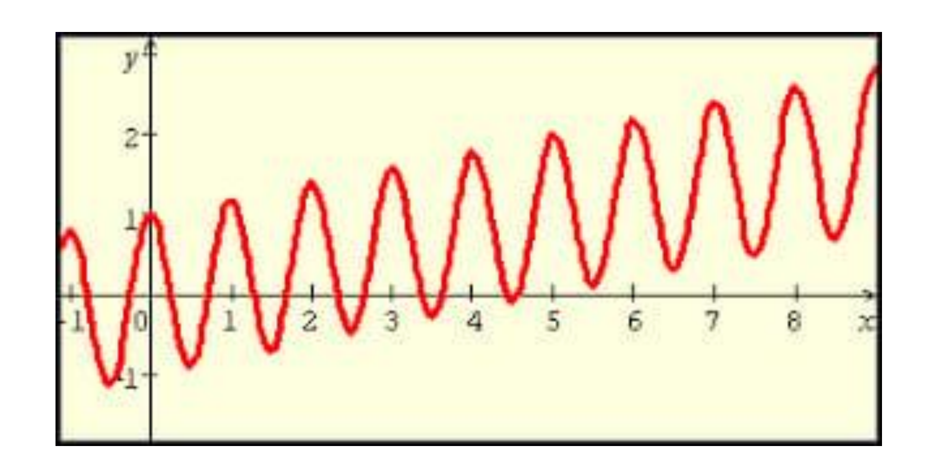
$$V_{n_1} > W_1 + epsilon \geq V_0 + epsilon > W_0 + 2\ epsilon$$

نواصل بنفس الطريقة مع n_2 , n_3 .... فنتحصل على

$$V_{n_k} > W_0 + (k+1)\ epsilon$$

من الواضح أن نهاية هذه المتتالية الجديدة هي زائد مالا نهاية لكن هذا يناقض كون المتتالية محدودة من الأعلى ومنه هي كوشية ومنه تقبل نهاية.

وبنفس الطريقة نبرهن حالة المتتالية المتناقصة.



تمرين وضع في المجموعة:

لدينا a و b عددان حقيقيان موجبان غير معدومين.

برهن أن الدالة المعرفة على R^* بـ $f(x) = (a^x + b^x)^{(1/x)}$ متباينة تماما.

حل مقترح:

نلاحظ أن حالة $a = b$ ترجعنا لحالة دالة أسية: $f(x) = a \cdot 2^{(1/x)}$ وهي متناقصة تماما على كل مجال (يمكن التأكد بالاشتقاق) فهي متناقصة تماما على R^*_- ومتناقصة تماما على R^*_+

أما حالة b يختلف عن a فيمكننا فرض $a < b$ سنقوم أولا بدراسة الدالة من أجل $x > 0$

يمكننا كتابة الدالة

$$f(x) = (a^x + b^x)^{(1/x)}$$
$$= (a^x (1 + (b/a)^x))^{(1/x)}$$
$$= a (1 + (b/a)x)^{(1/x)}$$

بوضع $c = (b/a) > 1$ نجد $a (1 + c^x)^{(1/x)}$ بما أن a لا يؤثر في الرتابة فيمكننا دراسة الدالة

$$g(x) = (1 + c^x)^{(1/x)} \mid c > 1$$

ثم بوضع تغيير متغير بالتقابل المتزايد تماما

$y = c^x$ أي $x = \ln(y)/\ln(c)$

نجد $y > 1$ و $h(y) = (1 + y)^{(\ln(c)/\ln(y))}$ بإدخال اللوغارتم على h وهو دالة متزايدة تماما

نجد $k(y) = \ln(h(y)) = \ln(c) \ln(1+y)/\ln(y)$ وهذه دالة متناقصة تماما من أجل $y > 1$ يمكننا استنتاج ذلك من إشارة المشتقة

$$k'(y) = \ln(c) [1/(1+y) * \ln(y) - 1/y \ln(1+y)]/\ln(y)^2$$
$$= \ln(c) [y \ln(y) - (1+y) \ln(1+y)]/[y (1+y) \ln(y)^2]$$

وهي ذو إشارة سالبة بسبب

$$0 < y \ln(y) < (1+y) \ln(1+y)$$

ومنه نستنتج أن f متناقصة تماما على x من $]0, +\infty[$ من أجل $x < 0$ بالتعويض بـ $x = -t$ نجد مقلوب الحالة الموجبة تماما بالشكل: $1/((1/a)^t + (1/b)^t)^{(1/t)}$

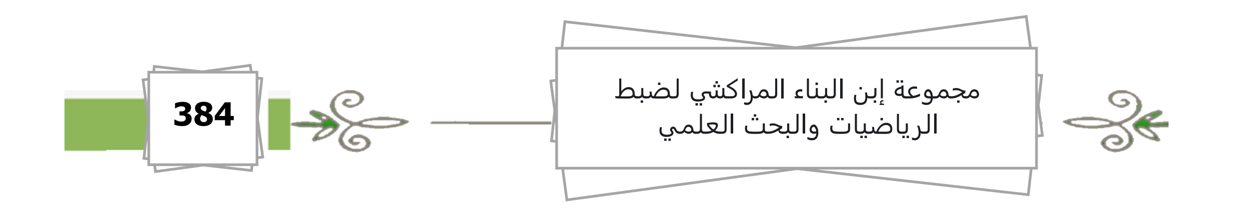
وبما أننا برهنا أن الحالة الموجبة تماما متناقصة تماما فهذه الحالة مقلوبها فهي متزايدة تماما من أجل t وبما أننا استعملنا $-t$ وهي متناقصة تماما فنستنتج أن الدالة متناقصة تماما على x من $]-\infty , 0[$

الآن بقي أن نبين أن قيم الدالة على R^*_- أقل تماما من قيم الدالة على R^*_+ ومنه نستنتج التباين.

سنستعمل الصيغة: $f(x) = a (1 + c^x)^{(1/x)} \mid c > 1$

بما أن f متناقصة تماما على R^*_- فحدها الأكبر عند نهايتها بجوار الناقص مالانهاية

$$\text{Lim } f(x) = a (1 + 0)^0 = a$$



بما أن f متناقصة تماما على R^*_+ فحدها الأصغر عند نهايتها بجوار زائد مالانهاية، لحساب النهاية سنستعمل اللوغارتم

$$\text{Lim } \ln(f(x)) = \ln(a) + \lim \ln(1+c^x)/x$$

ثم قاعدة لوبيتال

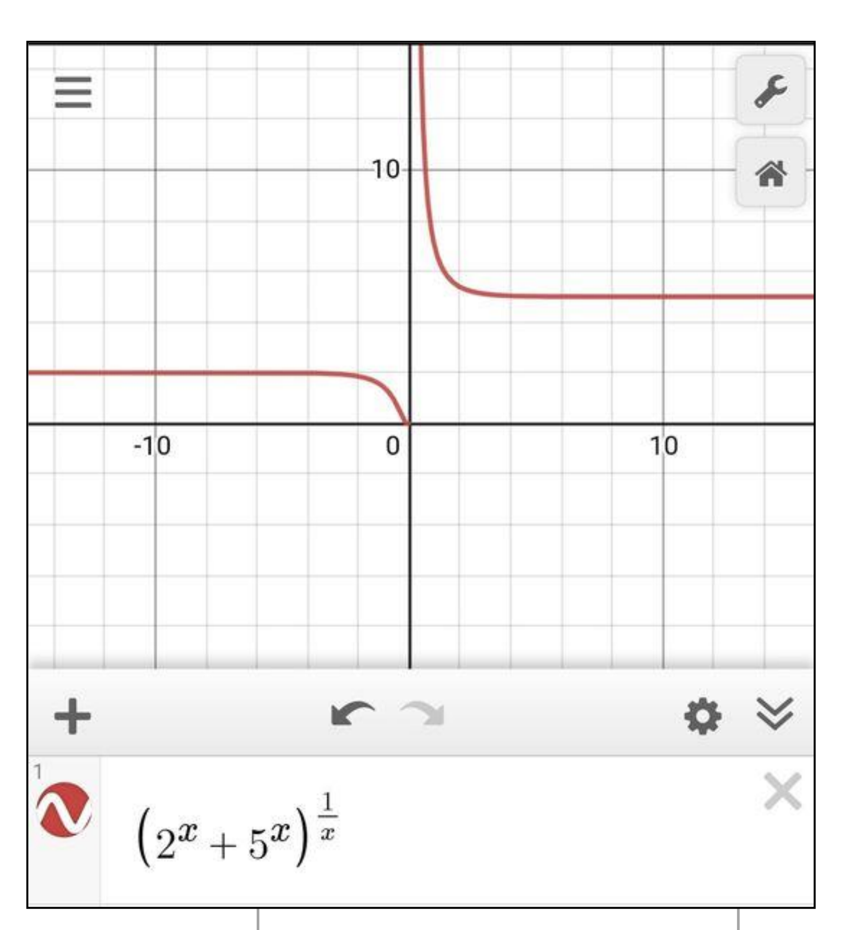
$$\text{Lim } \ln(f(x)) = \ln(a) + \lim (\ln(c)\, c^x)/(1+c^x))$$
$$= \ln(a) + \ln(c)$$

ومنه

$$\text{Lim } f(x) = a * c > a$$

ومنه المطلوب فالدالة f تباين.

حالة $a = b$ نجد نفس النهاية وهي a بجوار زائد وناقص مالانهاية لكن بما أن f لا تبلغ هذين الحدين فنستنتج كذلك أن صور f على R^*_+ لا تتقاطع مع صورها على R^*_- ومنه التباين كذلك.



عبد الحكيم بن شعبانة

مدخل إلى القياس
برهان عدم قابلية مجموعة الأعداد الحقيقية للعد بإستعمال البرهان بالتراجع

مدخل

لو أخذنا ثلاث مجالات حقيقية بحيث $H \subset I \cup J$ ، $I=[a_I,b_I], J=[a_J,b_J], H=[a_H,b_H]$

فلدينا طول المجال H أصغر أو يساوى مجموع طولي المجال J ، I ، لنرمز لطول المجال ب σ

إذن لدينا $\sigma([a,b])=\sigma(]a,b[)=b-a$

وبحساب بسيط نجد $H \subset I \cup J \implies \sigma(H) \leq \sigma(I)+\sigma(J)$

هذه الخاصية يمكن تعميمها بالتراجع إلى عدد كيفي من المجالات $H \subset \bigcup_{0\leq i\leq n} I_i \implies \sigma(H) \leq \sum_{0\leq i\leq n}\sigma(I_i)$

أي طول المجال أقل من مجموع أطوال المجالات التي تغطيه فكما ترون هذه بداية تعريف للقياس وهذا الذي قام به كنتور في برهانه الأول عن عدم قابلية العد لمجموعة الأعداد الحقيقية

البرهان

الفكرة هي أن نبرهن بالتراجع أن الأعداد الحقيقية إن كانت قابلة للعد فيمكن حصرها في مجالات مجموع أطوالها محدود وهذا تناقض

لنفرض أن المجال $[0,5]$ قابل للعد و منه نجد متتالية U_n بحيث $[0,5]=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{U_n\}$

يمكننا وضع كل عنصر من المتتالية داخل مجال كيفي ، سنبرهن بالتراجع أنه يمكننا وضع جميع أفراد المتتالية في مجالات مجموع أطوالها أقل من أي عدد موجب تماما δ

لدينا من أجل $n=0$ $U_0 \in]U_0-\frac{\delta}{4},U_0+\frac{\delta}{4}[$ الذي طوله هو $\delta > \frac{\delta}{2}$

من أجل $n+1$

إذا فرضنا أن هناك مجالات $I_0,I_1,\dots,I_n$ تغطي المتتالية من 0 إلى n بحيث $\forall i\in\mathbb{N}, 0\leq i\leq n : U_i\in I_i$

ومجموع أطوالها أقل من δ أي $l=\sum_{0\leq i\leq n}\sigma(I_i)<\delta$ فيكفي أن نختار المجال

$$U_{n+1}\in]U_{n+1}-\frac{\delta-l}{4},U_{n+1}+\frac{\delta-l}{4}[$$

ومنه $\sum_{0\leq i\leq n+1}\sigma(I_i)<\delta$

يكفي أن نمر إلى النهاية لنجد $\sum_{n\in\mathbb{N}}\sigma(I_n)\leq\delta$

لكن نلاحظ أن $[0,5]\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \implies \sigma([0,5])=5\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\sigma(I_n)\leq\delta$

لكن هذا تناقض إذ هذه المتراجحة غير متحققة دائما مثل حالة $\delta=1$ ومنه $\mathbb{R}$ غير قابلة للعد

البرهان مستوحي من برهان كنتور، الذي بعد نشره بسنوات دفع بورال إلى تعريف عشائره و مفهوم المجموعة ذات قياس معدوم، ثم عرف تلميذه لوبيغ القياس و تكامله

إذن في الحقيقية نظرية القياس ما هي إلا نتيجة لمحاولة كنتور لتكميم عدد عناصر مجموعة و التي أتمها بورال و لوبيغ،

فإن كنا غير قادرين على عد عناصر مجموعة فيمكن تعويض ذلك بوزن مجموعاتها ، في حالتنا هي قياس أطوالها

إذا لم تكن قادرا على عد حبات الباطاطا المنتجة من حقلك فانت قادر على وزنها





الجبر

حلقة بواقي القسمة Z/nZ

عند دراسة بواقي القسمة لأعداد صحيحة على عدد غير معدوم n سنلاحظ **أمرين:**

الأول أن مجموعة البواقي عددها n وتبدأ من الصفر وتنتهي بـ $n - 1$

والثاني أنه يمكن تصنيف عناصر Z حسب باقي القسمة على N .

مثال ذلك 1 , 4 , 7 باقي قسمتها على 3 هو 1.

هذه العلاقة بين العناصر هي علاقة تكافؤ ويمكن أن نعرفها عن طريق أن عددين k و j لهما نفس باقي القسمة إذا كان الفرق بينهما يقبل القسمة على n .

فعلى هذا يمكننا تجزئة Z على مجموعات أصناف تكافؤ كل صنف منها يمثل أعدادا لها نفس باق القسمة.

فيمكننا تمثيل كل مجموعة بباقيها.

مثال ذلك لو أخذنا $n = 3$ فسنجد أنه توجد ثلاث بواق يمكن الترميز لكل صنف منها بـ

$\overline{0}$

$\overline{1}$

$\overline{2}$

والتي نضعها في مجموعة

$$\{\overline{0} , \overline{1} , \overline{2}\}$$

ونرمز لها بـ $Z/3Z$

يمكننا كذلك ملاحظة أن بواقي القسمة دورية فمن أجل $n = 3$ سنجد البواقي التالية

$0 \to 0$

$1 \to 1$

$2 \to 2$

$3 \to 0$

$4 \to 1$

$5 \to 2$

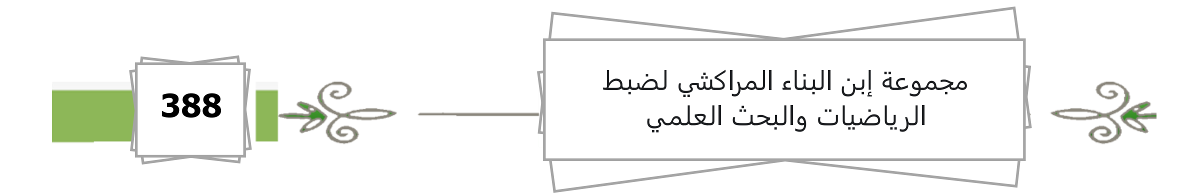
...

نلاحظ كذلك أن باقي مجموع عددين هو باقي مجموع الباقيين وكذلك الضرب مع الضرب فلو أخذنا $a = 5 , b = 7$ سنجد

$$\overline{a} = \overline{5} = \overline{2}$$

$$\overline{b} = \overline{7} = \overline{1}$$

وهذه المساواة تعني أنه نفس صنف التكافؤ لأن 5 و 2 من مجموعة واحدة لأن باقي قسمتهما على 3 هو 2



لدينا

$$\overline{(a+b)} = \overline{12} = \overline{0}$$

$$(\overline{a} + \overline{b}) = \overline{2} + \overline{1} = \overline{3} = \overline{0}$$

وكذلك يمكننا حساب الضرب.

فيمكننا نقل العمليات المألوفة من جمع وضرب لمجموعة أصناف بواق القسمة لنصنع حلقة تبديلية والتي نرمز لها بـ Z/nZ

هذه الحلقة يمكن تمثيلها بسهولة على دائرة نضع فيها نقاطا مرقمة بشكل منتظم بعدد n وأشهر هذه الدوائر هي ساعة العقارب التي نضع فيها الأعداد من 1 ل 12

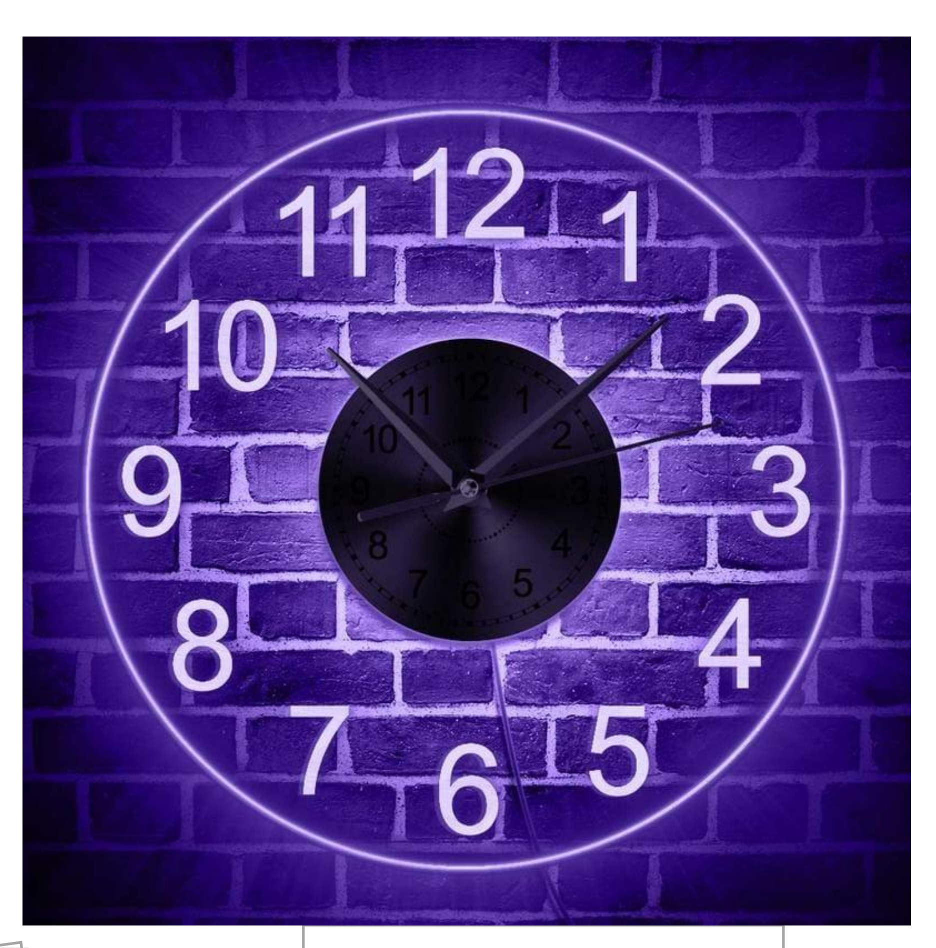
فنلاحظ أنه يمكننا تعريف عملية جمع وضرب على هذه الأعداد بشكل دائري.

وهذا الذي نفعله مع الزمن فالساعة هي حلقة مكونة من 60 دقيقة والسنة هي حلقة مكونة من 12 شهرا.

فالحساب الدوري نستعمله يوميا.

ولو تأملنا جيدا الدائرة سنجد أننا نعرف حلقة أخرى تشبه Z/nZ عندما نستعمل الدائرة المثلثية مع الدور 2π وهي حلقة غير منتهية.

ملاحظة : الحلقة Z/nZ تكون حقلا إذا كان n عدد أولي.



يا أيها الكثير حدود ذو الدرجة الفردية لماذا تقبل جذرا ؟

لو تأملنا الكثيرات الحدود الحقيقية وجدناها خليطا من الأعداد الحقيقية مع عمليتي الجمع و الضرب بخاصية توزيعية.

فإذا نظرنا إليه نظرة جبرية من حيث كون المجموعة الحقيقية حقلا فهو مجرد جداء بين كثيرات حدود من الدرجة الثانية و الأولى.

كثيرات الحدود مولدة بعملة الضرب بين كثيرات حدود أولية درجتها 1 أو 2 فإذا وجد في هذا الجداء كثير حدود ذو درجة واحد فهي تقبل جذرا و إذا لم يوجد فلا تقبل جذرا.

فإذا تأملنا كثير الحدود ذو درجة فردية وبما أنه جداء كثيرات حدود درجتها واحد أو إثنين فلا بد أن يكون في جدائه كثير حدود درجته واحد لأن الدرجة النهائية فردية فلا يمكن تقسيمها على أزواج و هذا ما يفسر قبوله لجذر.

إذن قابلته لجذر جبريا ناتجة من بنية كثيرات الحدود و التي تعيدها إلى كثيرات حدود بسيطة.

من الناحية التحليلية لو تأملنا كثير الحدود كدالة على مجموعة الأعداد الحقيقية نجد الحد المسيطر فيه هو الحد الأكبر درجة أما الباقي فما هو إلا زيادة قيم مشوشة محليا على الحد الأكبر و التي لا تستطيع إلا تشويه منحناه محليا دون التغلب على خاصيات الحد الأكبر القوية عدديا في جوار المالانهاية.

وحيد حد ذو درجة غير معدومة هو إما ذو درجة زوجية أو فردية:

أما الزوجية فهو جداء لوحيدات حد ذو درجة 2 و التي تعود إلى x^2

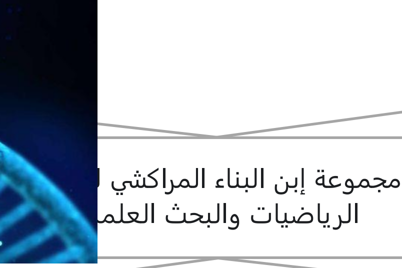
الذي هو موجب بطبيعة الضرب أما إنعدامه فهو صفة محلية ناتجة عن مجاورة الصفر للأعداد الموجبة.

أما إذا تأملنا وحيد الحد الفردي فهو جداء لوحيدات حد ذو درجة 2 و يبقى واحد ذو درجة واحدة x

هذا الأخير خاصيته أنه لابد أن يمر بجميع الأعداد الحقيقية و منها الصفر فمروره من الناقص مالانهاية إلى الزائد مالانهاية في بنيته وبما أنه تقوى بوحيدات حد ذو درجة 2 وهي موجبة بقيت هذه الخاصية فيه فتغلبت بقوتها على غيرها.

وهذا الذي نجده عند تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة فهي تعتمد على كون وحيد الحد هذا قوي بحيث يلغي تأثير المشوشات بجوار المالانهاية و لذلك لو عوضناها بأي مشوش مستمر محدود فالنتيجة تبقى نفسها وجود الجذر.

إذا لاحظنا التفسير الجبري و التحليلي نجدهما وجهان لعملة واحدة فالأمر راجع لبنية كثير الحدود نفسه والذي ترجعه لكثيرات حدود بسيطة ذو درجة 1 أو 2.





الصفر، النقطة الشاذة في الحلقة...

لماذا لا يقبل الصفر مقلوبا ؟

عندما كنت أدرس في السنة الثالثة ثانوي وحين درسنا مجموعة الأعداد المركبة ورأيت كيف استطعنا بتخيل العدد التخيلي إيجاد جذر لناقص واحد، قلت في نفسي لما لا أصنع نفس الشيء مع الصفر ، لما لا أفرض أن له مقلوبا .... لم أكن أدرك وقتها أن الصفر نقطة شاذة في حلقة.

لا يمكن للصفر أن يحصل على مقلوبه ذلك أنه نقطة شاذة نتج شذوذها من قانونين : الأول أنه حيادي بالنسبة لعملية الجمع و الثاني أن الضرب توزيعي على الجمع فنتج عن ذلك أنه أصبح عنصرا ماصا و كأنه الثقب الأسود في الزمرة.

فخاصية الماصية للصفر نتيجة حتمية في حلقة بل هي في تركيبتها وكأنها مبرمجة في حمضها النووي بكون الصفر حياديا بالنسبة للجمع و الضرب توزيعي على الجمع.

$$a\,(0+0) = a\,0 \Rightarrow a\,0 + a\,0 = a\,0 \Rightarrow a\,0 = 0$$

ومتى كان عنصرا ماصا فماذا سيحدث مع مقلوبه إن وجد ؟ هل يمتصه أو يلغي نفسه معه لتوليد الواحد ؟

$$0^{-1} \times 0 = 1 \quad *** \quad 0^{-1} \times 0 = 0$$

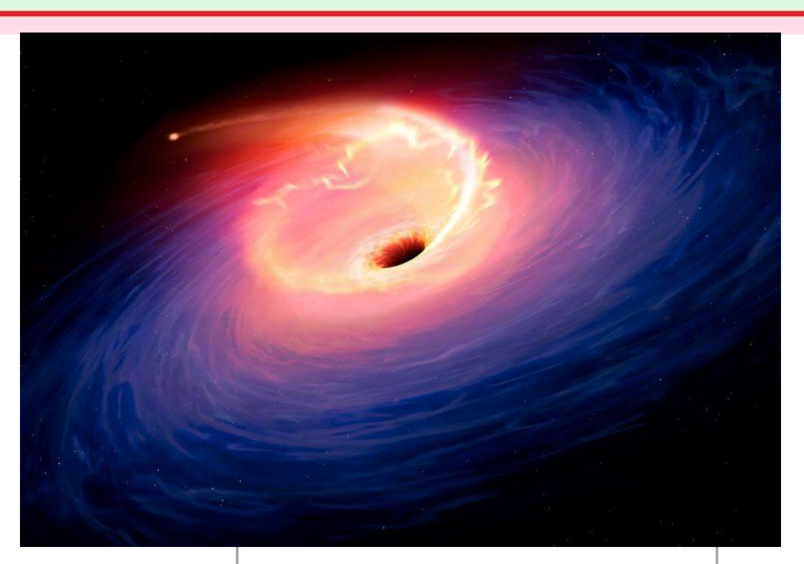
بين الخيارين إنه من الواضح أن الحفاظ على خاصية توزيع الضرب على الجمع أولى من اعطائه قرينه العكسي لعملية الضرب.

الصفر عنصر ماص

$$a \cdot (0+0) = a \cdot 0 \implies a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 \implies a \cdot 0 = 0$$

ماذا نختار إذا وجد مقلوب الصفر ؟ أنه يمصه أو يلغي نفسه معه لتوليد الواحد ؟

$$0 \cdot 0^{-1} = 0 \vee 0 \cdot 0^{-1} = 1$$



لماذا القاسم المشترك الأكبر للصفر والصفر يساوي الصفر ؟ $PGCD(0,0) = 0$

لفهم الجواب لابد أن نفهم أصل تعريف القاسم المشترك الأكبر وعلى ماذا بني.

أول ما قابل البشر كبنية جبرية في تاريخ الرياضيات هي مجموعة الأعداد الطبيعية مع عملتي الجمع والضرب.

في بداية الدراسة يتطرق التلميذ لعمليتين إضافيتين الطرح والقسمة.

ثم مع المراحل يتعلم أن هناك عمليتان فقط الجمع والضرب أما الطرح والقسمة فهي ناتجة من تزاوج كل عملية مع النظير بالنسبة إليها.

لكن تبقى مجموعة الأعداد الطبيعية ذات بنية خاصة ذلك أن عملياتها متجانسة مع عملية الترتيب الاعتيادية ولذلك نتكلم فيها عن ما يسمى بالقسمة الإقليدية التي تعتمد بشكل كبير على عملية الترتيب العددية والتي تظهر في باقي القسمة الذي هو أصغر تماما من القاسم.

لو ذهبنا لمفهوم قاسم عدد طبيعي سنجد أنه يمكننا تعريفه بعملية الضرب فقط فنقول k يقسم n إذا وجد j بحيث $n = j \times k$ من الواضح أنه إذا كان n معدوم فجميع الأعداد الطبيعية غير المعدومة أكبر قاسم لها هي نفسها.

لكن هنا لابد أن ننتبه **لأمور**:

الأمر الأول : أننا أدخلنا في التعريف السابق علاقة الترتيب الاعتيادية للحديث عن مفهوم أكبر قاسم والأصل أن علاقة الترتيب العددية مفهوم دخيل على العمليات الجبرية.

الثاني : أن الصفر يحدث مشكلة من حيث التسمية فمن جهة نتكلم عن قواسم عدد بواسطة هذا التعريف ثم نجد أن $0 \times 0 = 0$ فهل الصفر قاسم لنفسه ؟

لا مشكلة أنه كذلك من حيث التعريف، لكن المشكلة تظهر عند التسمية بالقاسم فالقسمة على الصفر غير ممكنة.

في الحقيقة هذا لا يشكل إذ التسميات التاريخية قد توسع ليدخل فيها ما لا ينطبق عليها كتسمية الحلقة مثلا فالأصل أنها تطلق على حلقات دورية لكن هناك حلقات غير دورية كمجموعة الأعداد الصحيحة لكن تاريخيا بدأنا بحلقات منتهية.

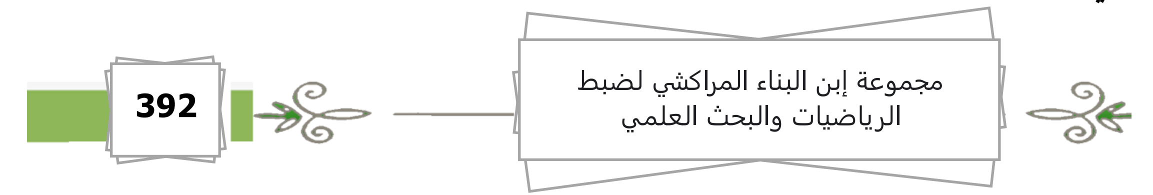
وكذلك المجموعة الخالية نسميها مجموعة رغم أنها لا تجمع في طياتها شيئا

الأمر الثالث : يزداد الأمر تعقيدا عند البحث عن أكبر قاسم للصفر من **ناحيتين**:

الأولى أن جميع الأعداد الطبيعية قاسمة له $0 = j \times 0$ فلا يوجد حد أكبر لها.

والثانية أن هذا لا يتناسب مع كون أكبر قاسم لعدد طبيعي غير معدوم n هو n.

تبقى هذه التساؤلات في هذا الموضع لا تحتاج كثير جواب لأن أكبر قاسم لعدد سواء كان نفسه أو غير ذلك فلا حاجة لنا به في مسائل أخرى.



لكن متى تكلمنا عن القواسم المشتركة لعددين فالأمر مختلف.

فلو أخذنا عددين n و m غير معدومين معا فمن الواضح أن تقاطع مجموعة قواسمهما منتهية وأكبر عدد فيها هو القاسم المشترك الأكبر لهما.

لكن ماذا لو أردنا أن يتناسب الصفر والصفر مع الباقي في هذا التعريف إذ تقاطع مجموعتيهما لا حد له ؟

لو تأملنا جيدا نجد أن أصل المشكلة أننا نستعمل عملية الترتيب العددية وهو مفهوم دخيل على البنى الجبرية إذ في حلقة نتكلم عن الجمع والضرب فقط وربما عن علاقة الترتيب المجموعاتية كالحلقات الجزئية من حلقة لذلك نحن نحتاج إعادة نظر في تعريف القاسم المشترك الأكبر بمفهوم جبري وهذا ممكن بالتأمل في خصائص القاسم المشترك الأكبر:

1)القاسم المشترك الأكبر $PGCD(n,m)$ هو قاسم لكل من n و m

2)أي قاسم ل n و m هو قاسم ل $PGCD(n,m)$

إذ علاقة القسمة التي تهمنا لا كونه أكبر أو أصغر.

فبهذا التعريف نكون قد تخلصنا من عملية الترتيب العددية بل أكثر من ذلك سنجد أنهما مهما كان العدد الطبيعي n فإن $PGCD(n,n) = n$ وبما في ذلك الصفر $PGCD(0,0) = 0$

إذ الصفر هو الوحيد الذي يحقق أن كل قاسم للصفر والصفر يقسم الصفر.

بقيت مشكلة وهي أنه في مجموعة الأعداد الصحيحة Z سنجد مثلا أن القاسم المشترك الأكبر ل 6 و 9 هو 3 و -3 حسب التعريف السابق.

يمكننا التخلص من ذلك بإضافة شرط وهو $PGCD(n,m) \geq 0$

فيصبح تعريف القاسم المشترك الأكبر في Z هو:

عدد صحيح موجب قاسم لكل من n و m وكل قاسم آخر هو قاسم له.

لكن علاقة الترتيب العددية كما قلنا سابقا دخيلة على الجبر ثم سواء كان k هو القاسم المشترك الأكبر ل n و m أو $-k$ فهذا غير مشكل ويمكننا حل هذه المشكلة بالنظر للتعريف بشكل أعم.

فبدل الكلام عن k يقسم n يمكننا الكلام عن حلقة جزئية محتواة في أخرى فنحن نعلم أن جميع الحلقات الجزئية في Z هي من الشكل kZ فكل عدد يمثل حلقة وكل حلقة تمثل عدد أو نظيره فيكون لدينا كون k قاسم ل n يحقق:

$$n Z \subset k Z = -k Z$$

فنلاحظ أن قولنا 6 يقسم 12 يعود لقولنا كل مضاعف ل 12 هو مضاعف ل 6 أي $12 Z \subset 6 Z$

وأن القاسم المشترك الأكبر ل 12 و 18 هو 6 وسنكتب $12Z \cup 18Z \subset 6Z$

وأن كل قاسم ل 12 و 18 يمثل حلقة تحوي حلقة 6

$$12Z \cup 18Z \subset 6Z \subset 3Z$$



$12Z \cup 18Z \subset 6Z \subset 2Z$

$12Z \cup 18Z \subset 6Z \subset 1Z = Z$

وعلى هذا يكون القاسم المشترك الأكبر ل n و m يمثل بعدد p حلقته هي أصغر حلقة تشمل حلقتي n و mوالأصغر هنا بمفهوم المجموعات فيصبح:

تعريف k كقاسم مشترك ل n و m باحتواء حلقتي n و m في حلقة k :

$nZ \cup mZ \subset kZ$

و كون $p = PGCD(n,m)$ هو أكبر قاسم لهما أن كل قاسم ل n و mهو قاسم له أي

$\forall\ k \in Z : nZ \cup mZ \subset kZ \Rightarrow pZ \subset kZ$

نلاحظ هنا أن الصفر لم يعد مشكلة في التعريف

$PGCD(0,0) = 0$

$\forall\ k \in Z : 0Z \cup 0Z =\{0\} \subset kZ \Rightarrow 0Z = \{0\} \subset kZ$

وأن p و -p كقاسم مشترك أكبر ليس بمشكلة مادام يمثلان نفس الحلقة pZ

لو لخصنا ما سبق سنجد أننا توصلنا لتعريف القاسم المشترك الأكبر في الحلقة Z عن طريق احتواء الحلقات الجزئية

$p = PGCD(n,m) \Leftrightarrow$

$nZ \cup mZ \subset pZ$

$\wedge$

$\forall\ k \in Z : nZ \cup mZ \subset kZ \Rightarrow pZ \subset kZ$

وهذا يعني أن pZ هو تقاطع جميع الحلقات المولدة بقواسم n و m

$pZ = \cap\ kZ : nZ \cup mZ \subset kZ$

يمكننا أن نبرهن بسهولة أن$pZ = nZ + mZ$ تعريف القاسم المشترك الأكبر بهذه الطريقة يمكننا تعميمه على أي حلقة تبديلية بالكلام عن حلقاتها الجزئية ففي حلقة تبديلية A نرمز للحلقة المولدة بعنصر x منها بالرمز (x) ونسميها الحلقة المثالية الرئيسية ل x أو المثالي الرئيسي ل x فيكون p القاسم المشترك الأكبر ل n و m من A إذا وفقط إذا:

كانت المثالي الرئيسي ل p هو أصغر حلقة مثالية تشمل كل من مثالي n و مثالي m أي

$p = PGCD(n,m) \Leftrightarrow$

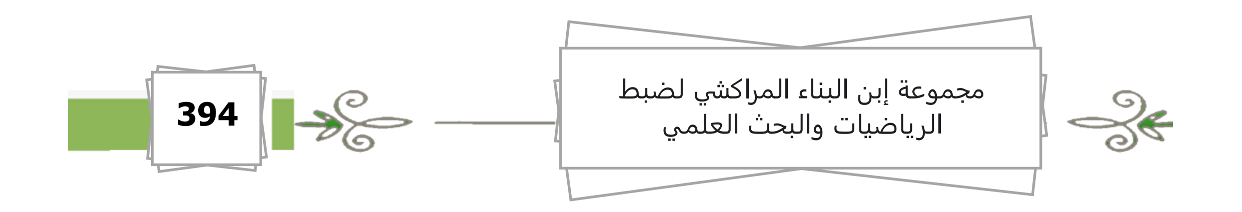
$(\ n\ ) \cup (m) \subset (d)$

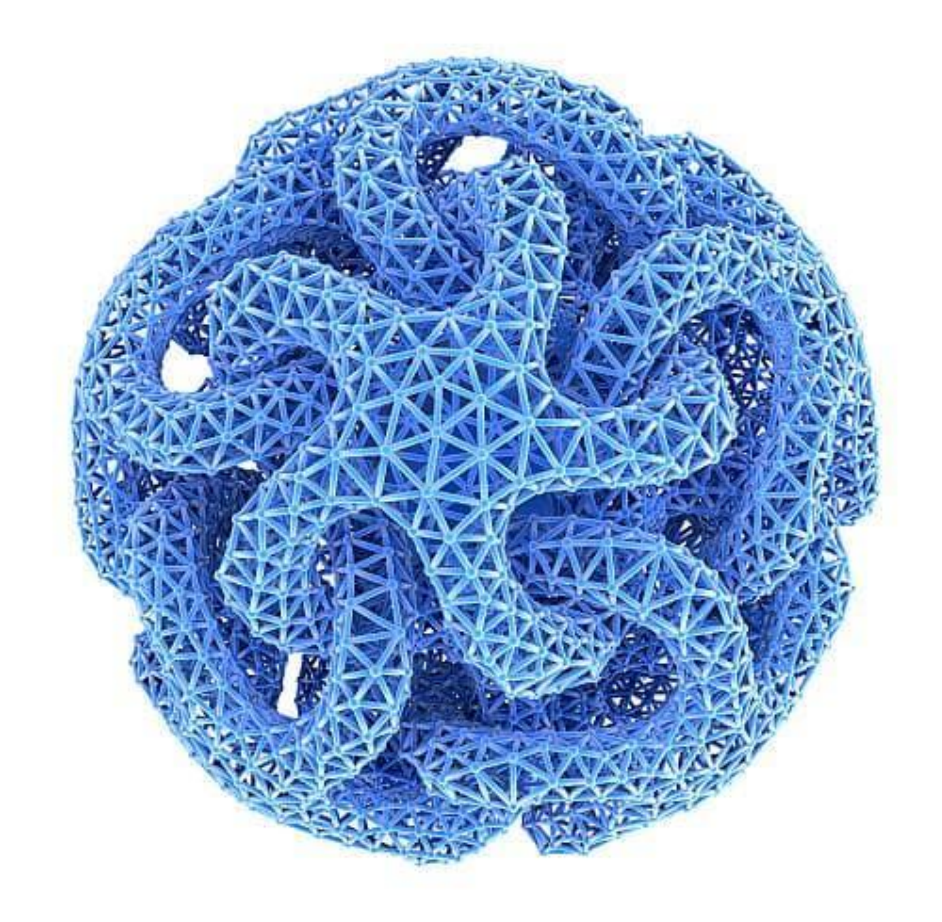
$\wedge$

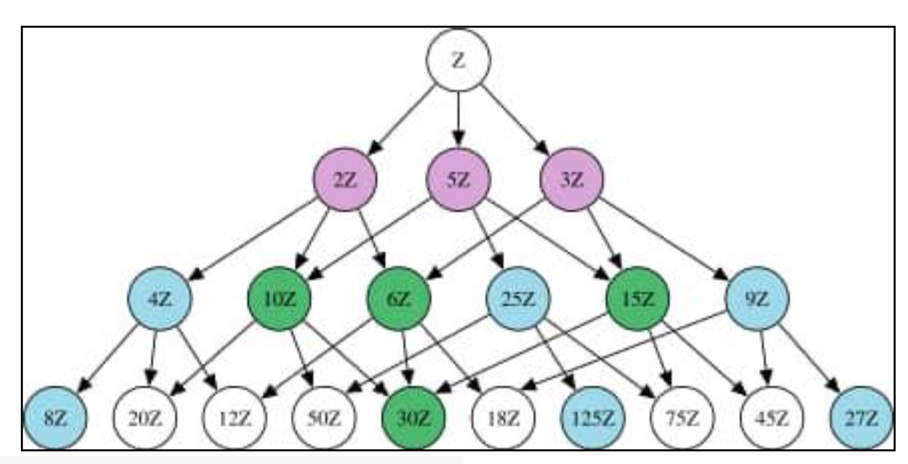
$\forall\ k \in A : (\ n\ ) \cup (m) \subset (k) \Rightarrow (p) \subset (k)$

مراجع

https://fr.m.wikipedia.org/.../Plus_grand_commun_diviseur...






Z
2Z
5Z
3Z
4Z
10Z
6Z
25Z
15Z
9Z
8Z
20Z
12Z
50Z
30Z
18Z
125Z
75Z
45Z
27Z





خربشات : بين الدوال الجيبية والزمرة والحلقة وكثيرات الحدود

لماذا صنعنا الزمرة بعمليتها ؟

لنصنع بنية سهلة التفكيك يمكن تمثيلها بعناصر بسيطة

لذلك صنعوا الزمرة ثم أضافوا الضرب وصنعوا الحلقة ليسهل الحساب.

وبعدها صنعوا كثيرات الحدود وهي كائنات تجمع بين الجمع والضرب فصنعوا بها دوال بسيطة.

الاصل ان الدالة هي علاقة بين مجموعتين فهي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي لكن كتابة مجموعة باسرها صعب فكان من الطبيعي البحث عن كتابة الدوال بطرق سهلة ولا يوجد اسهل من كثير الحدود.

فدالة كثير الحدود تمثل طريقة سهلة للربط بين مفهوم الدالة والبنية الجبرية للحلقة من جمع وضرب.

لكن كل الدوال ليس لها هذه العلاقة السهلة بين عمليات الضرب والجمع وعلاقة الدالة.

الجب من هذا النوع لا توجد علاقة مباشرة لكن من حسن الحظ اكتشفوا الطبولوجيا وربطوها بالعمليات الجبرية فصنعوا طبولوجيا جبرية فربطوا بين مفهوم النهايات واشتقاق الدوال مع كثيرات الحدود وذلك بالتقريب التآلفي والنشر المحدود.

فكان من الممكن تقريب الجب والتجب بكثيرات حدود لا نهائية الدرجة

اذن هم يحاولون تبسيط مفاهيم الدول للتعبير عنها بعمليات اولية بين عناصر المجموعات وكانهم يعبرون عن العلاقة بعلاقات ابسط.

فالمسألة كلها تدور حول العلاقات بين العناصر



الكثافة الطبولوجية والكثافة الجبرية في R .

كثافة Q في R ناتجة عن الخاصية الأرخميدية لهذا الحقل وحقوله الجزئية.

وهذا يعنى أن هناك تجانسا بين العمليات الجبرية في R وعلاقة الترتيب الإعتيادية.

فالحقل K أرخميدي إذا حقق: $\forall x \in K, \exists n \in N : n > x$

مصدر هذا التجانس أن علاقة الترتيب هنا عرفت إنطلاقا من تكرار الكمية أي كلما كررت الكمية أكثر كانت أكبر.

والعمليات الجبرية نفسها في R معرفة من ضم تكرار التكميم الذي هو أصل صناعة الأعداد نفسها.

فكل هذا يولد لدينا التوافق المنشود.

وهذا ما يعطينا الكثافة الجبرية وهي كثافة متعلقة بالترتيب الذي يعني أن من أجل كل x و y بحيث $x < y$

يوجد z بحيث $x < z < y$

هذه الكثافة الجبرية تتحول إلى طبولوجية في R بسبب الطبولوجيا المولدة إنطلاقا من المجالات.

فالمجالات نفسها معرفة بعلاقة الترتيب.

فكما ترى كل من البنية الجبرية والبنية الطبولوجية وعلاقة الترتيب في R مولدة من فكرة تكرار الوجود.

نلاحظ أنه إذا أضفنا لهذه الخصائص خاصية الحد الأعلى وهي أن كل مجموعة محدودة من الأعلى تقبل حدا أعلى في المجموعة فسنصنع المجموعة R .

المجموعة R مبنية على:

تكرار الوجود وتجزئته بدون حد

الجمع والضرب بتكرار التكرار

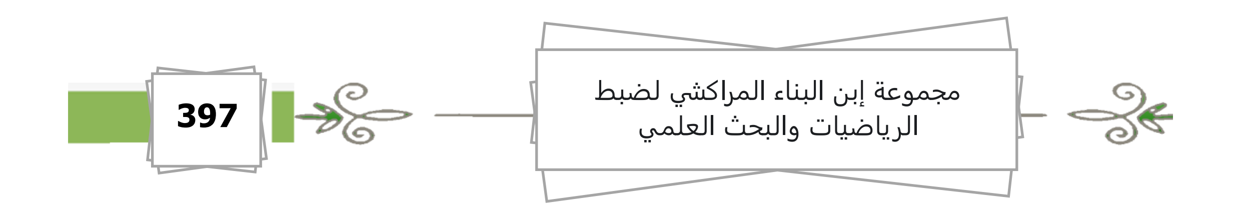
ترتيب هذا التكرار بالتضمن أي الإحتواء

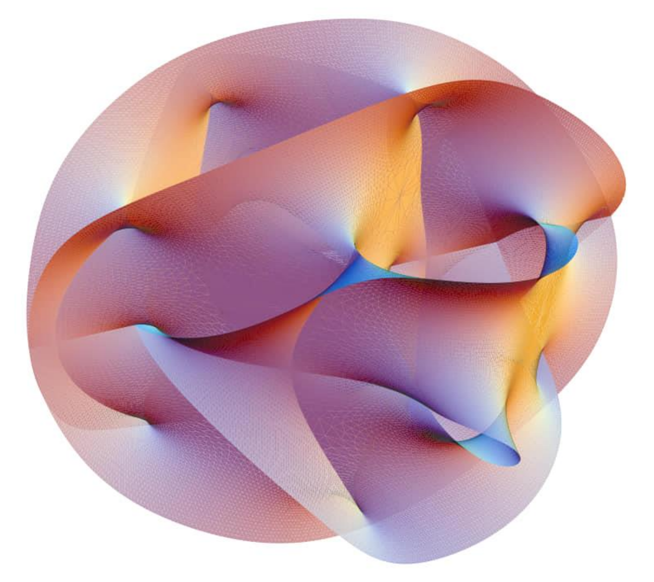
قابلية حد أعلى لكل مجموعة من التكرارات المحدودة.

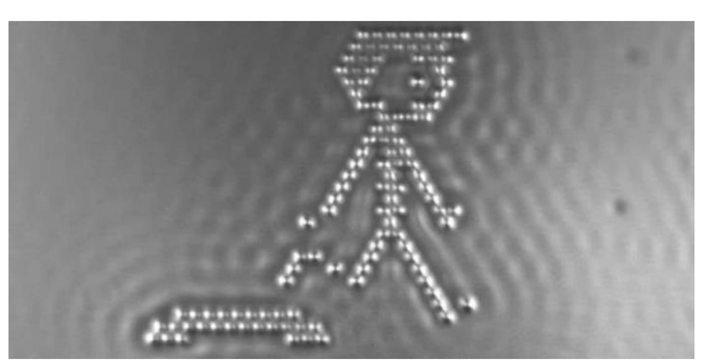
ففكرة صناعة R بسيطة توافق الكون الذي نراه أمامنا فما هو إلا جزيئات تتكرر ففكرة التكرار موجودة في الواقع وما قام به البشر هو تجريدها لإعادة صناعة الكون رياضيا وما الإعلام الآلي من ذلك ببعيد فهو يكرر الصفر والواحد لصناعة ما نراه اليوم.

الحقل R يتضمن الكثير من الخواص المتداخلة التي كل منها لو فصل على حدى يمكن تعميمه لصناعة مفاهيم جديدة.

كل المفاهيم التي نراها في الرياضيات هي تعميم لهذه الخواص من فضاءات طبولوجية ونظيمية وهلبرتية وبناخية ونظرية القياس وغير ذلك مما أنتجته الرياضيات.

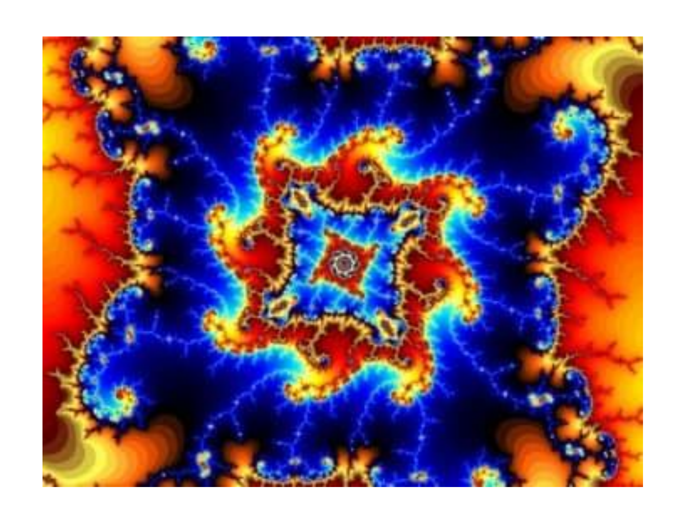














الدالة بين البنية الطبولوجية والبنية الجبرية للمجموعة

الدالة كما قلنا سابقا ما هي إلا علاقة تعيد توزيع السوابق على شكل صور في مجموعة الوصول فمتى زودنا مجموعتي البدء والوصول بطبولوجيا أمكن الكلام على توزيع هذه الصور من ناحية تلاصقها مع غيرها في المجموعة وهو ما يسمى النهاية.

فإذا كانت النهاية نفسها هي صورة من صور الدالة وكانت الملاصقة الوحيدة لما جاورها من الصور جمعت بين مفهوم التجاور المحلي في المجموعة والتجاور المحلي للدالة كصور لجوار محلي للسابقة فأصبحنا نتكلم هنا عن مفهوم أدق يسمى الاستمرار فالاستمرار ما هو إلا محافظة الدالة على التلاصق أي ما يشار إليه في الطبولوجيا في أن الدالة المستمرة هي التي لسوابق كل مفتوح تشكل مفتوحا.

لكن يبقى مفهوم النهاية والاستمرار مفهوم طبولوجي لا يأخذ بعين الاعتبار البنية الجبرية للمجموعة فالطبولوجيا تنظر للمجموعة من ناحية مقارنتها بمجموعات منها فهي نظرة تضاريسية مجملة.

أما البنى الجبرية فهي تنظر للمجموعة من ناحية تكوين عناصرها فكل عنصر هو مشكل من مجموع عناصر في زمرة وقد يشكل من مجموع وضرب في حلقة وقسمة في حقل.

فإذا كانت الدالة داخلية في نفس الحقل فهي تشكل إعادة توزيع للحقل نفسه على نفسه بالتباين أو الغمر أو كلاهما وهو التقابل فمن البديهي أن نحاول النظر إلى هذه الدالة من حيث تركيبها للعناصر وهذا ما نقوم به في التطبيقات الخطية.

فإذا أردنا تعميم هذه النظرة بمحاولة دراسة توزيع العناصر بالدالة من حيث البنية الجبرية أي كيف تشكل العناصر من بعضها فالطريقة المثلى هي محاولة كتابة الدالة كجمع وجداء عناصر التي أبسطها التطبيقات الخطية وهذا ما نسميه بكثيرات الحدود.

لكن ليس كل دالة يمكن كتابتها بهذا الشكل فإذا لم يمكننا الكتابة نلجأ للتقريب والكلام عن التقريب يقودنا للنهاية فلابد من تزويد البنية الجبرية بطبولوجيا لكن ليست أي طبولوجيا إنما يلزم البنية الجبرية طبولوجيا تتوافق مع عملياتها الداخلية فلذلك نتكلم عن الزمرة الطبولوجية وعن النظيم داخل فضاء شعاعي في محاولتنا لفهم هذه الدوال.

أول محاولة نلجأ إليها هي تقريب الدالة من تطبيق خطي عند نقطة وذلك يتم في الدوال العددية بقسمة تغير الدالة على تغير المتغير بنظرة محلية أي النهاية وهذا ما يعرف بالاشتقاق فالاشتقاق ما هو إلا محاولة للربط بين الدالة وبين عمليات البنية الجبرية للحقل بواسطة الطبولوجيا.

هذه الفكرة بدأت هندسيا عند العرب ثم انتقلت للغرب عبر محاولة تقريب الدالة من مماسها وهذا ما يسمى بالتقريب التآلفي.

ثم تطورت فإن كنا قادرين على تقريب الدالة من كثير حدود رتبته واحد فلماذا لا نقربه بكثير حدود رتبته أكبر ؟



أول طريقة تظهر لنا هي مواصلة اشتقاق المشتقة لأن الاشتقاق نفسه يعطينا دالة جديدة ترفق بكل سابقة ميل التقريب التآلفي مما يدفعنا لمحاولة تقريب الدالة الجديدة فالغرض تبسيط الدالة الأم لتحويلها من مجرد توزيع للنقاط إلى عمليات جبرية.

هذه التقريبات المتتالية تقودنا إلى صناعة النشر المحدود.

فالاشتقاق والنشر المحدود ما هي إلا محاولة لكتابة الدالة بعبارات جبرية يسهل حسابها وتدوينها وبرمجتها مما يجعلها قابلة للاستعمال على أرض الواقع.

قد يتساءل المرء عن سبب لجوئنا لهذه الطريقة ؟

الحقيقة أنه بمرورنا من مجموعات قابلة للعد إلى مجموعات غير قابلة للعد كالأعداد الحقيقية أصبح من المستحيل التعبير عن الدوال غير قابلة للحساب بعمليات جبرية ككثيرات الحدود بمجرد جداول فكان لابد من اختراع طريقة جديدة تعطينا خوارزميات يمكننا بها الاقتراب من الدالة بشكل أفضل ولحساب أفضل.

فكان الاشتقاق والنشر جوابا لهذه الحاجة بل أعطي الاشتقاق ثمارا أخرى إذ هو يعبر كذلك على توجه الدالة مقارنة بمتغيرها فأمكن إعطاء تصور عام للدالة عبر رسم منحناها فالمنحنى ما هو إلا تعبير عن كيفية تغير الدالة بتغير مجهولها.

ليس جميع الدوال قابلة لهذا التقريب بمعنى آخر قابلة للاشتقاق.

دفع ذلك العلماء إلى اختراع طرق أخرى للتقريبات كمبرهنة ويستراس وتجسيدها بكثير حدود برنشتاين.

كل هذه العمليات ما هي إلا محاولة لتبسيط سلوك الدالة في توزيع السوابق على شكل صور بحسابات جبرية أولية من جمع وطرح وضرب وقسمة على شكل تكراري على شاكلة كوننا والمتجسد في نظريتين النسبية وهي نظرة طبولوجية للكون وفيزياء الكم وهي نظرة جبرية تركيبية جزيئية للكون.



المشاغب

نظرات في الأشعة.

الشعاع هو تكرار تنوع فمثلا خمس برتقالات زائد ثلاث حبات طماطم تشكل مجموع تكرار تنوعين.

لكن التنوع قد يكون متجانسا فيكون جمع تنوعين من جنس واحد هو تنوع من نفس الجنس كمجموع شعاعين في اتجاهين مختلفين من فضاء إقليدي فهو يعطي شعاعا جديدا في اتجاه معين.

فالتنوع هنا هو تأثير موجه لذلك مجموع الشعاعين يعبر عن مجموع تأثيرين فهو يعطي تأثيرا يعبر عنهما.

قاعدة أو أساس فضاء شعاعي هي مجموعة الأنواع الأولية المتوفرة في الفضاء فمثلا في فضاء إقليدي ثلاثي الأبعاد ، الأنواع الأولية هي اتجاهات المحاور الثلاثة ومنها تنشأ جميع الإتجاهات.

الشعاع عنده تأثير خطي وعنده تأثير إسقاطي، تأثيره الإسقاطي هو تأثير بعد في بعد وهذا نعبر عليه بالجداء السلمي.

التعامد بين شعاعين ما هو إلا غياب تأثير بعديهما في بعضيهما.

كخلاصة المفهوم العام للشعاع هو عدد منوع أو تنوع أعداد.

هذا التنوع قد يكون من نفس الجنس فيكون مجموع شعاعين هو نوع جديد من نفس جنسهما.

بعد الفضاء الشعاعي هو عدد الانواع الأولية من أشعته.

هناك فضاءات شعاعية متجانسة أين يمكن لبعد أم يؤثر في آخر وهذا ما نعبر عليه بالجداء السلمي.



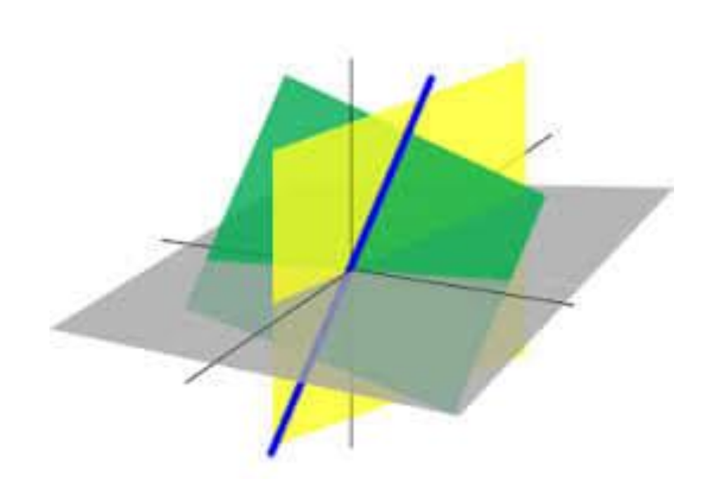
الفضاء الشعاعي ما هو إلا تكميم للتنوع والمقصود بالتكميم العدد والعدد ما هو إلا تعميم لمفهوم التكرار.

أما الشعاع هو مجرد عدد موجه أي من نوع معين وشعاعين في نفس الإتجاه هما من نفس النوع ككوبين من حليب بقهوة من نفس التركيز وأحجام مختلفة.

الطول والعرض والارتفاع ما هي إلا أنواع من الطول فالطول هو الطول لكن متى وجهته تنوع.

الفرق بين الفضاء الإقليدي والفضاء الشعاعي أن الإقليدي اضافة على التنوع فالانواع متعلقة ببعضها ومتجانسة وهذا ما نعبر عليه بالجداء السلمي أو بمبرهنة فيثاغورث.









التنوع المكمم أساس الفضاء الشعاعي:

الفضاء الشعاعي مجرد كميات متنوعة وكل نوع يسمى بعدا لذلك المستوي فضاء شعاعي ذو بعدين فهو متنوع الإتجاهات وفيه نوعين من الوجهات يمين يسار وفوق تحت وكل الباقي مكون من هاذين النوعين.

وكذلك فضاء كثرات الحدود فهو متنوع الحدود $x^0 , x^1, ..., x^{10}, ...$

فأنواعه غير منتهية وكل كثير حدود مكون من كميات متنوعة من هذه الأنواع

$$P(x)= x^5 +3x^4+ 2x^3 + 1/2\ x^2 -x +1$$

وكذلك فضاء الدوال فهو متنوع الدوال فمثلا هذه الدالة مكونة من ثلاث أنواع:

$$f(x) = 5\ e^x -3\ \ln(x) + \sin(x)$$

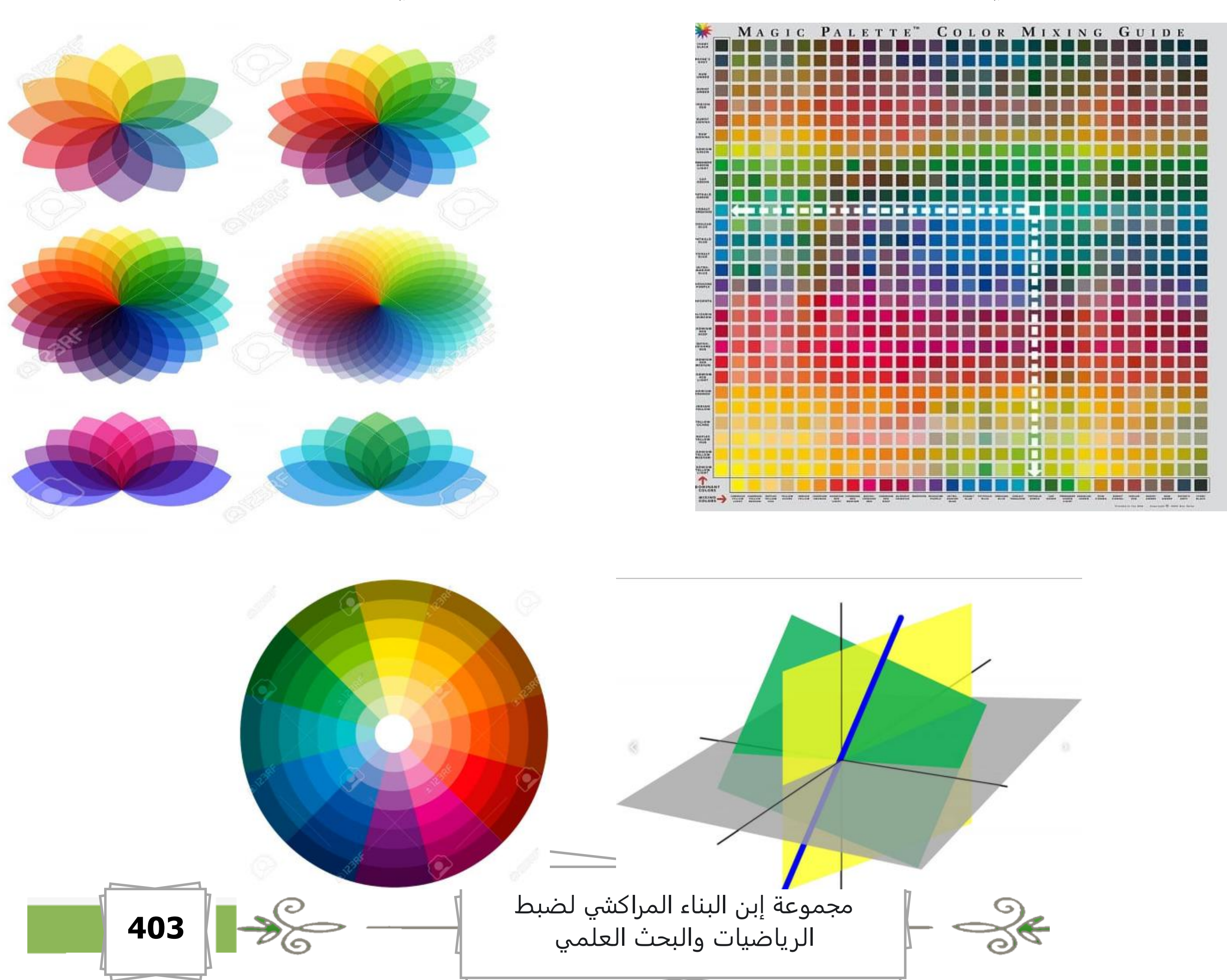
فكمية e^x هي 5 و $\ln x$ هي -3 و $\sin x$ هي 1

فالشعاع مجرد كمية منوعة وكحالة خاصة منه الأشعة في الفضاء الإقليدي فهي كميات منوعة ونوعها هو الإتجاه لكن تبقى هذه حالة خاصة فالشعاع أعم من ذلك.

فمثلا عندما نرسم منحنى تغير السرعة بالنسبة للزمن فما فعلناه هو رسمها في فضاء شعاعي ذو بعدين نوعاه هما الزمن والسرعة.

الشيء الزائد في الفضاء الإقليدي أن أنواعه متجانسة مع بعضها ومن نفس الطبيعة لذلك استطعنا تعريف علاقة فيثاغورث والجداء السلمي.

لكن الفضاء الشعاعي عموما لا يشترط فيه التجانس بين الأنواع إنما يكفي أنها موجودة وتقبل التكميم خطيا.



الشعاع يا شعاع لماذا جعلوك زورا قطعة مستقيمة موجهة!!!

جعل الشعاع قطعة مستقيمة موجهة من أشنع الأخطاء المنتشرة بين التلاميذ اليوم بل حتى بين الأساتذة والطلبة.

فلنتأمل في المفهوم الأصلي للشعاع قبل التطرق لتعريفه الرياضي.

ولنطرح السؤال التالي : ما هي السرعة ؟ فالسرعة تمثل حركة في اتجاه بمسافة معينة في زمن معين فهي مقدار يمكننا اعطاؤه قيمة عددية بقسمة المسافة على الزمن مع وجهة معينة.

فإذا تأملنا في السرعة وجدناها كمية عددية موجهة.

هذا المفهوم نجده كذلك في مواطن أخرى كالقوة فعندما تدفع جسما بقوة فأنت تدفعه بمقدار معين نحو اتجاه معين.

بل لو مشيت في اتجاه معين فأنت تحركت مسافة في اتجاه .

فكل هذه أعداد موجهة مثلها مثل الأعداد الموجبة والسالبة إلا أن الأعداد الموجبة والسالبة تتجه في اتجاهين فقط أما السرعة والقوة والانتقال فهي مقادير توجهها في أي اتجاه أردت في الفضاء.

ولو دققنا جيدا وجدنا هنا أن ما نسميه وجهة هي درجات حرية لكن هذا المفهوم أعم من ذلك.

فلو خلطت قهوة مع حليب وسكر فأنت تخلط أنوعا ثلاثة مختلفة فإذا زدت كمية القهوة فستكون وجهت ذوق الخليط إلى ذوق القهوة ولو أكثرت من السكر فقد وجهته نحو الحلاوة.

فالتوجه لا يشترط أن يكون بالانتقال والحركة بل يمكن أن يكون أي توجه كان نحو نوع معين.

فهذا ما نسميه الشعاع فالشعاع هو عدد موجه أو كمية متنوعة وكلاهما شيء واحد.

ولو نظرنا للتعريف الرياضي للفضاء الشعاعي لوجدناه زمرة جمعية مزودة بعملية خارجية تضمن الخطية.

فالعملية الخارجية إنما تأتي بالكمية فعندما نقول عدد مضروب في شعاع: $\lambda \times e$

فنحن في الحقيقة نقول كمية λ في الإتجاه e .

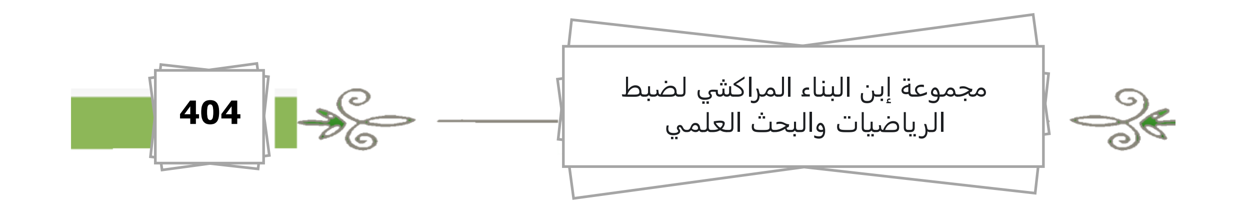
وعندما نقول قاعدة الفضاء هي e_1 , e_2 , e_3

فنحن نقول في هذا الفضاء توجد ثلاث أنواع أولية من الأشعة وكل الأشعة الأخرى تعتبر كميات مختلطة منها.

فمفهوم الشعاع يعمم مفهوم العدد إذ كيف يمكنك أن تقول عندي خمس بقرات وثلاث معزات ؟ فهذا ليس بعدد حقيقي لكنه تكميم منوع أو متعدد الأبعاد فهذا هو الشعاع.

لكن من أين أتى الخلط بين الشعاع والقطعة المستقيمة ؟

الخلط سببه هو أن الأشعة تظهر بشكل أفضل عند قطع المسافات فعند تجريد هذا المفهوم نجده انسحاب لنقطة نحو أخرى فيصنع هذا الانسحاب قطعة مستقيمة ومن هنا يظهر الإشكال فبدل تجريد مفهوم الشعاع



بأنه طول موجه البعض يسقط الطول على القطعة المستقيمة لأنه لا يفرق بين طول القطعة المستقيمة والقطعة المستقيمة.

وما يزيد الطين بلة أنه عندما يمثل الشعاع يمثله بشكل يشبه السهم فيظنه قطعة مستقيمة موجهة وأن الشعاع مكون من نقاط وأن له بداية ونهاية وكل هذا لا أساس له من الصحة.

فالخلط هنا مزدوج منشؤه الخطأ في تجريد مفهوم الشعاع مع الخلط بين تمثيله وتمثيل القطعة المستقيمة.

ولعل للطريقة المتبعة في البرامج التعليمية في شرح الأشعة نصيب من التسبب في هذا الخلط.

الشعاع ليس به نقاط ولا هو مكون منها ولا هو قطعة مستقيمة.

كل ما في الأمر أن سحب نقطة نحو نقطة يكون بشعاع من حيث التكميم و يولد قطعة مستقيمة من حيث الربط بين نقطة البدء ونقطة الوصول لكنهما أمران مختلفان.

ولذلك عند صناعة الفضاءات التآلفية نفرق بين نقاط الفضاء التآلفي وبين الفضاء الشعاعي المزود به.

ولذلك نجمع بين الأشعة لأنها أعداد وكميات ذات اتجاه لكننا لا نجمع بين النقاط ولا بين القطع المستقيمة لأنها ليست بكميات.

فالذي يخلط بين الشعاع الذي نسحب به نقطة والقطعة المستقيمة التي تنتج من ذلك مثله مثل الذي لا يفرق بين سرعة السيارة والطريق التي تسير فوقه!!!

فلا علاقة بين الأمرين ولذلك نلاحظ أنه إذا مررنا إلى فضاءات شعاعية أعم كفضاءات كثيرات الحدود والدوال فهذه لا نجد فيها أثرا للقطعة المستقيمة ولا للمستقيم.

الشعاع ببساطة كمية موجهة نحو أنواع فهو تكميم متعدد الأبعاد ويمثل حالة عامة للأعداد الحقيقية والتي تعتبر تكميما في بعد واحد.



الشعاع والمنحى : هل هو حقيقة رياضية أم إرث تاريخي ؟

ما هو الشعاع ؟ الشعاع هو تكميم منوع فعندما نقول العدد المركب $3 + i . 2$ كشعاع في R^2 فنحن نقول هذا تكميم بنوعين كميته 3 كعدد حقيقي و 2 كعدد تخيلي.

ولفهم المعنى أكثر سنأخذ كأس حليب بقهوة فالحليب مع القهوة يمكن إعتباره فضاء شعاعي كل شعاع مكون من كمية حليب وكمية قهوة فيمكننا تمثيله بسهولة في R^2 ويمكننا التعبير عن كأس قهوتك بالحليب بإحداثيتين كمية القهوة وكمية الحليب.

فإذا أضفنا نوعا ثالثا وهو السكر فسيصبح فضاء شعاعي R^3

ولو نظرنا إلى الفضاء الإقليدي الهندسي R^3 فأشعته تكميمات منوعة أنواعها الجهات لذلك نحن نعبر على الشعاع بثلاثية (x,y,z) فكل إحداثية منها هي كمية في إتجاه معين فالأنواع هنا هي إتجاهات.

إذن الشعاع تعميم لمفهوم التكميم العادي فأصبح تكميم بأنواع مختلفة.

فإن كنا نعبر عن كمية التفاح بكيلو تفاح وكمية البرتقال بكيلو برتقال فكيف نعبر على كمية تفاح وبرتقال دون أن نفقد أنواعها ؟ فسنقول عندي كيلو تفاح وكيلو برتقال فهذا شعاع طويلته 2 كيلوغرام.

إذن هذه الفضاءات الشعاعية ما هي إلا كميات منوعة فالكميات نعبر عليها بالحقل K و الأنواع بقاعدة الفضاء الشعاعي.

والطويلة هي نظيم.

لكن للوصول لهذا المفهوم إحتاج البشر لقرون.

فالأشعة في البداية رآها البشر في الإتجاهات فمن السهل أن نلاحظ أن هناك فوق وتحت وأمام وخلف ويمين وشمال.

ومن السهل ملاحظة أنه يمكننا التنقل بمسافة في أي اتجاه نريد.

فالمسافة هنا موجهة.

إن كنا نعبر على الطول بقطعة مستقيمة فإن أول ما يتبادر للذهن هو التعبير على المسافة الموجهة بقطعة مستقيمة موجهة.

كأي مفهوم رياضي تجريده من الواقع يحتاج لقرون من العمل ليصبح مفهوما رياضيا قائما بذاته.

الموجود عندنا قبل أزمة الأساسيات (حوالي 1900) هي هندسة إقليدس فكيف نستخرج مفهوم الأشعة منها ؟ المتبادر لدينا أن أي قطعة مستقيمة إذا وجهناها حصلنا على طول ووجهة فظهر مفهوم الشعاع وتوجيهها سهل إذ يكفي الإنتقال من أحد طرفيها وليكن a إلى الآخر فليكن b .

لكن نعرف أن الشعاع ليس القطعة نفسها ولا يتقيد بنقطة فهو مسافة في إتجاه فكيف نفصل هذا المفهوم من هذه القطعة المستقيمة الموجهة ؟

هنا الرياضيات تمتلك طريقة ناجعة لتجسيد الخصائص وفصلها وهي علاقة التكافؤ.



فيكفي أن نعرف علاقة تكافؤ بين قطعتين مستقيمتين عن طريق طول موحد وإتجاه موحد أما الطول فأمره سهل بل يمكننا اعطاؤه إشارة زائد أو ناقص لكن كيف نربط بين الإتجاهات أو اللفظ الأصح هنا المسارات ؟
هنا نلجأ لمفهوم التوازي فهذه القطع المستقيمة كل واحدة منها تنتمي لمستقيم فيكفي أن نعرف علاقة تكافؤ تسمى توازي لجمع كل المستقيمات المتوازية تحت مفهوم جديد نسميه ... المنحى!!
فالمنحى ما هو إلا علاقة تكافؤ تعبر على مسار معين لكن بدون طول لذلك لا يهمنا الأمام والوراء فكلاهما إتجاه واحد بالموجب أو بالسالب.
فعلى هذا الشعاع يصبح:
طول
اشارة طول وهي الوجهة
المنحى وهو مسار الشعاع.
رياضيا المنحى يعرف بعلاقة التكافؤ يوازي فهي التي تمثل مسار الشعاع.
كل هذا جميل في ظل هندسة إقليدس لكننا نعلم أن هندسة إقليدس غير مضبوطة في تعريفاتها الأساسية فما هي النقطة وما هو المستقيم ؟ وهل يصح أن نعرف النقطة بأنها كائن لا أبعاد له ؟
بل كيف يمكننا تعريف الطول إن لم نعرف الحقل والمسافات ؟
فإذا تكلمنا على الحقل فنحن نتكلم عن الأشعة قبل الكلام عن القطعة المستقيمة فندخل هنا في دوامة الدجاجة والبيضة من منهما وجد أولا ؟
هل تعرف القطعة المستقيمة في فضاء إقليدس من الأشعة أو تعرف الأشعة من القطعة المستقيمة ؟
على أنه كما سنرى أن طريقة صناعة الأشعة السابقة من هندسة إقليدس فقدت مصداقيتها بسبب التعديلات المتعددة على المناهج.
بعد أزمة الأساسيات بنيت الرياضيات على نظرية المجموعات ZFC .
في هذه النظرية من السهل تعريف الحقل والفضاء الشعاعي عن طريق البنى الجبرية والعلاقات الداخلية والخارجية.
أما هندسة إقليدس فنعرفها عن طريق الفضاء التآلفي فيكفي إضافة مبدأ للفضاء الشعاعي ليصبح فضاء تآلفي ونعمم بهذا مفهوم الفضاء الإقليدي.
أما الطول فيعرف بنظرية القياس.
لكن أين المنحى هنا ؟
لو تأملنا جيدا لوجدنا ما نسميه المنحى هو مجرد الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالشعاع فهو فضاء شعاعي بعده واحد لكن لو أردنا أن نضبط أكثر فيمكننا رؤيته كتطبيق خطي من الفضاء الشعاعي نحو R فالتطبيقات الخطية تعوض المسارات في الفضاء الشعاعي.



لكن ماذا حدث حتى وجدنا اليوم من يعرف المنحى كمجموعة مستقيمات متوازية ففقدنا بذك مفهوم المنحى وعلاقته بالمسار ؟

الذي حدث أن هندسة إقليدس تدرس اليوم في المراحل الأولى وخاصة في الثانوي لأنها تعتبر مرحلة عبور لنضج التفكير الرياضي لذى التلميذ.

فهي تجمع بين التجريد والحدس بل هي بين بين فيمكن للتلميذ التعامل معها بالرسم ويمكنه كذلك التعامل معها بالترميز والبرهنة.

هذه الهندسة تدرس منذ قرن وأكثر، لكن مع ظهور نظرية المجموعات ونشر الرياضيات المضبوطة من مجموعة بورباكي أدخلت تعديلات في الستينيات لضبط كل هذا وإكماله فلكي يكتمل برنامج التلميذ كان في الماضي القريب يدرس مع الهندسة المنطق والبني الجبرية وبعضا من نظرية المجموعات وخاصة أصناف التكافؤ.

لكن رويدا رويدا كل هذا حذف فأفرغ البرنامج من محتواه حتى أصبحت تدرس فيه تعاريف بلا معنى فأصبح الشعاع له منحى وهو مجموعة من المستقيمات المتوازية وأصبحنا نتكلم عن شعاع يوازي شعاع أو مستقيم أو حامل لشعاع وكل هذا لا معنى له.

إذ الأصل أن الشعاع في هذه الطريقة ناتج عن أصناف تكافؤ فإذا انطلقنا من القطع المستقيمة فهناك معنى رياضي لكل هذا لكن القفز من مفهوم الشعاع نحو المستقيم لم يولد إلا الخلط لذي التلميذ حتى أصبح يظن أن الشعاع قطعة مستقيمة موجهة وأنها مكونة من نقاط!!!

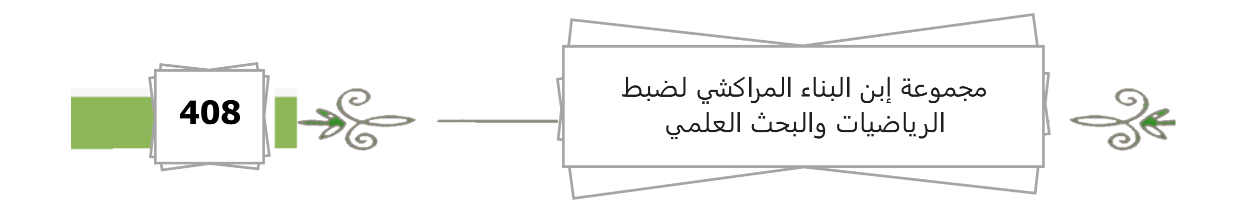
ولو شرحنا للتلميذ أن الشعاع مجردة كمية موجهة أو ذات نوع كمسافة نحو إتجاه لفهم مفهوم الشعاع بكل سهولة ولما إنشق دماغه ألما عند صعوده للجامعة بمشاهدة الفضاءات الشعاعية المجردة التي لا يمكنه تصورها كفضاءات فورييه و لوبيغ وغيرها....

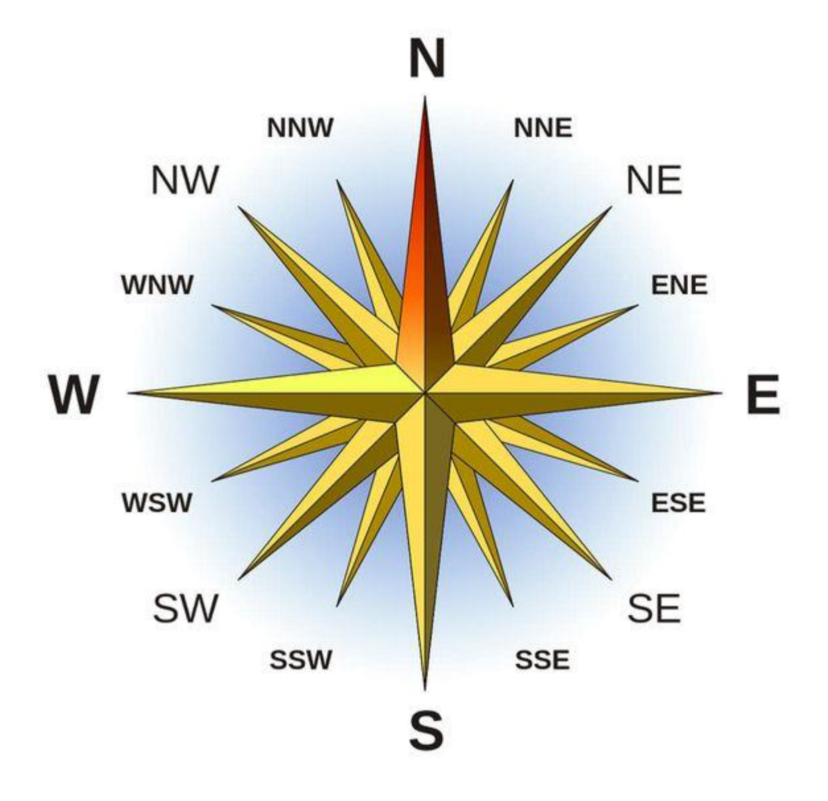
واجبنا اليوم تصفية كل هذه المفاهيم وهذا لا يعني إرتكاب نفس خطأ أفراد من مجموعة بورباكي كديودني حين نادى بالقضاء على هندسة إقليدس في التعليم الثانوي وتعويضها بالمفاهيم المجردة تحت ما يسمى بالرياضيات الحديثة فانتج من ذلك أجيالا لم تعد تفهم الرياضيات لصعوبة التجريد.

لكن تصفية المفاهيم تتم تحت تهذيبها مع مراعاة المستوى الفكري للتلميذ فهندسة إقليدس تبقى طريقة ناجعة لتعليم التلاميذ إذا روعي فيها الموازنة بين الحدس والتصور مع ضبط التعاريف والبراهين.

فلا يوهم التلميذ أن الشعاع قطعة مستقيمة موجهة بل يشرح له مفهومه أنه مسافة موجهة وأن رسمه كسهم مكون من قطعة مستقيمة مع اتجاه مجرد طريقة ترميز هندسية.

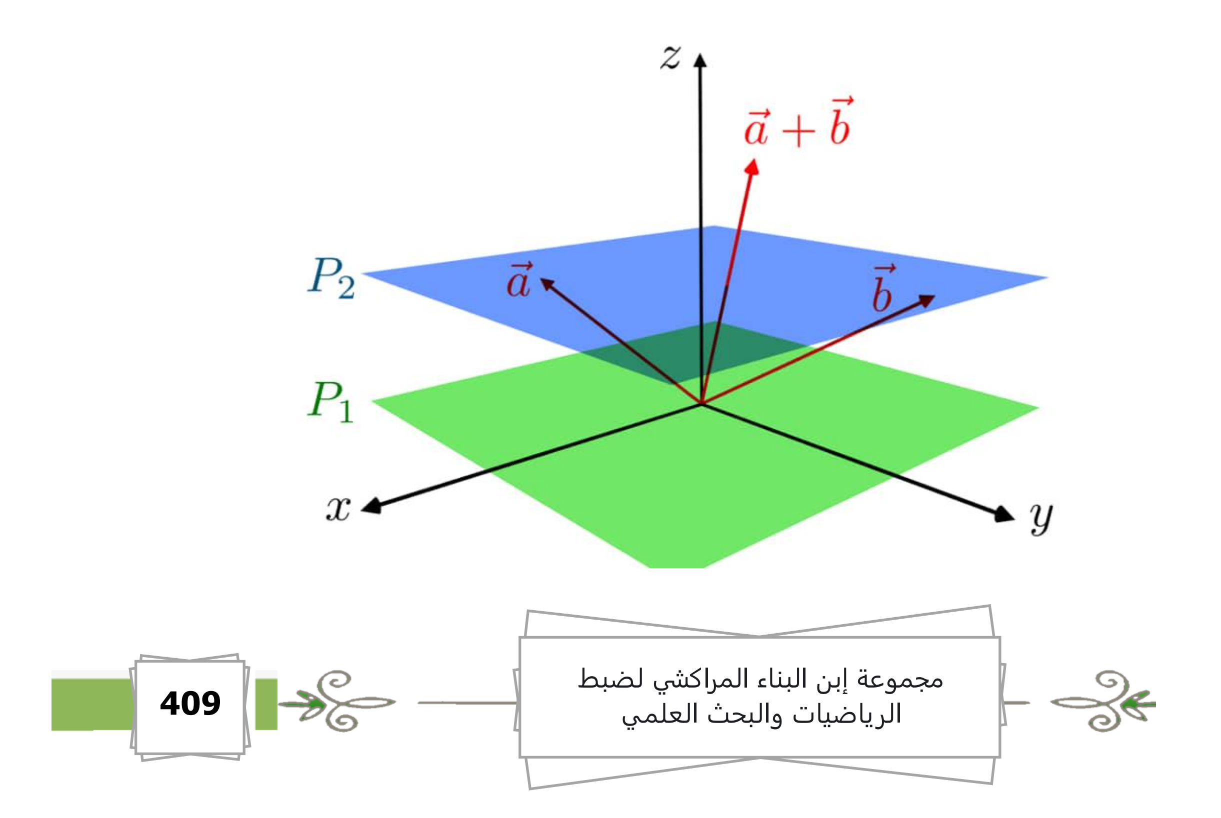
ولا يوهم أن الشعاع يحتاج من يحمله وغير ذلك من الإيهامات والإيحاءات اللغوية التي تجعل التلميذ في النهاية لا يفرق بين القطعة المستقيمة وبين الشعاع إلا برسم رأس السهم....




N
NNW
NNE
NW
NE
WNW
ENE
W
E
WSW
ESE
SW
SE
SSW
SSE
S






z
$\vec{a}+\vec{b}$
P_2
$\vec{a}$
$\vec{b}$
P_1
x
y

الشعاع في الفضاء الإقليدي : مثال حي على قوة التجريد

الشعاع تكميم منوع فالتكميم يعبر عليه رياضيا بالعدد أي الحقل R أو C أو حقل كيفي K والتنوع هي الكتابة الخطية بأنواع أي بقاعدة الفضاء فالتعبير الرياضي لشعاع V كتكميم منوع أي مكون من انواع هو

$$V = a_1 \times e_1 + a_2 \times e_2 \dots + a_n \times e_n$$

وبالمناسبة أشير هنا إلى أن المفهوم الرياضي يعرف بخلو الذوق البشري منه ودليل ذلك أننا ننتقل من الألفاظ إلى المفاهيم الرياضية بالمقابلة بسهولة:

تكميم نحو عدد نحو R

منوع نحو كتابة خطية بقاعدة

فإذا أردت معرفة أن ما تقوله أو تقرؤه صحيح رياضيا إذا كتب لغويا فقابله بالمصطلحات الرياضية فإن تم ذلك فالتجريد صحيح وإن لم يتم فهناك خلل.

نعود لموضوع الشعاع فالشعاع تكميم منوع، هذا الذي نشاهده على الواقع فإن كان لديك قمح وشعير وذرة فستعبر على الكمية بشعاع V مكون من كيلو قمح مثلا وإثنين كيلو شعير و نصف كيلو ذرة.

وهذا يمكن تطبيقه مع جميع الأنواع لكن الذي نلاحظه في الواقع أنه إذا أخذنا أشعة الاتجاه أي المسافات الموجهة فهناك خاصية زائدة وهي أنه إذا استدرنا فإننا نحول نوع لنوع فاليمين يصبح شمال والشمال يصبح يسار واليسار يصبح جنوب مع المحافظة على الطول.

هذا غير ممكن مع الشعير والقمح والذرة فلا الشعير يصبح قمح ولا القمح يتحول لذرة.

رياضيا هناك مفهوم زائد في المسافات الإقليدية غير موجود في المفهوم العادي للشعاع فإن كان الشعاع تكميم منوع فالأنواع في الفضاء الإقليدي لها علاقة بين بعضها وهذه خاصية زائدة أصلها ليس الشعاع لكن الأنواع نفسها.

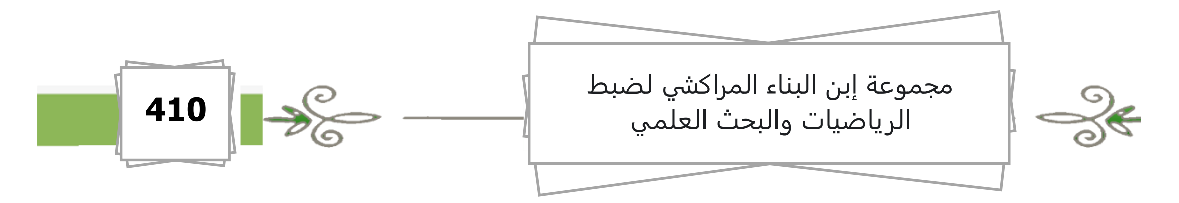
فالأنواع متعلقة ببعضها، هذه العلاقة لا نجدها فقط في المسافات بل نجد لها مثيلا في الفيزياء في تعريف العمل مثلا فالعمل هو انتقال قوة فهنا نجد علاقة بين القوة كطول واتجاه وبين الانتقال كمسافة موجهة وبين العمل المتحصل عليه إن نظرنا إليه من ناحية الطاقة.

فهنا نرى أن القوة تؤثر في المسافة وأن المسافة تؤثر في القوة من حيث النتيجة وإن كانت القوة لا تتحول لانتقال ولا الانتقال لقوة لكن العلاقة بينهما موجودة وتسمى العمل.

نلاحظ أنه كلما زادت كمية القوة أو زادت كمية المسافة زاد العمل وكلما اقترب اتجاه القوة من اتجاه المسافة زاد العمل كذلك.

هذا ما نعبر عليه رياضيا بالجداء السلمي فتأثير القوة على المسافة هو إسقاط شعاعها على بعد شعاع المسافة ويمكن أن نراها كالعكس كتأثير المسافة على القوة بكمية إسقاطها على بعد القوة.

فالأبعاد هنا تتعلق ببعضها بل هي متجانسة إذ تأثيرها في بعضها يزداد طردا مع طويلة أشعتها.



إن كان مفهوم الشعاع جبري ذلك أنه لا يحتاج لأكثر من العمليات الجبرية لتعريفه فالفضاء الإقليدي مفهوم طبولوجي فلقد أدخلنا هنا الحركة والاقتراب والاستمرار فكل هذا يحتاج للطبولوجيا لتعريفه.

رياضيا نقوم بتعريف هذا بالجداء السلمي في R^n عن طريق الدوال المثلثية ثم نعمم المفهوم بالفضاءات الهلبرتية ذات الأبعاد غير المنتهية.

نلاحظ أن المفاهيم الرياضية وإن كانت مجردة هي مفاهيم واقعية موجودة أمامنا إلا أننا لا نراها منعزلة لكن إذا تأملنا فيها ومحصناها جردناها فأصبحت هذه المفاهيم الرياضية المعروفة.

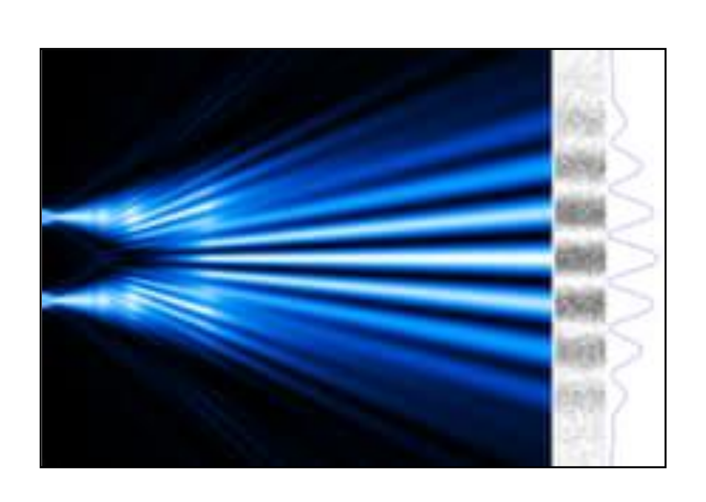
الحق يقال أن للفيزياء دور كبير في تطور عملية تجريد هذه المفاهيم فالنهايات والاستمرار والاشتقاق أصلهم فيزيائي من دراسة الحركة والجداء السلمي أصله فيزيائي كذلك.

أما الفضاءات الهلبرتية فأصلها رياضي لكن سريعا ما وجد لها تطبيقات في فيزياء الكم.

عملية التجريد عملية بشرية فالبشر من يرى الشيء أحمر وأخضر وطويل وعريض لكن الرياضي يدفع هذا التجريد لأوجه فيرى العدد في التكرار والشعاع في الاتجاه والنهاية في الحركة وذلك عن طريق التكميم.

يمكننا أن نقول أن العقل الرياضي هو عقل كل واحد منا إذا بقي على فطرته ولم يشوه تجريده للخصائص بالذوق البشري.







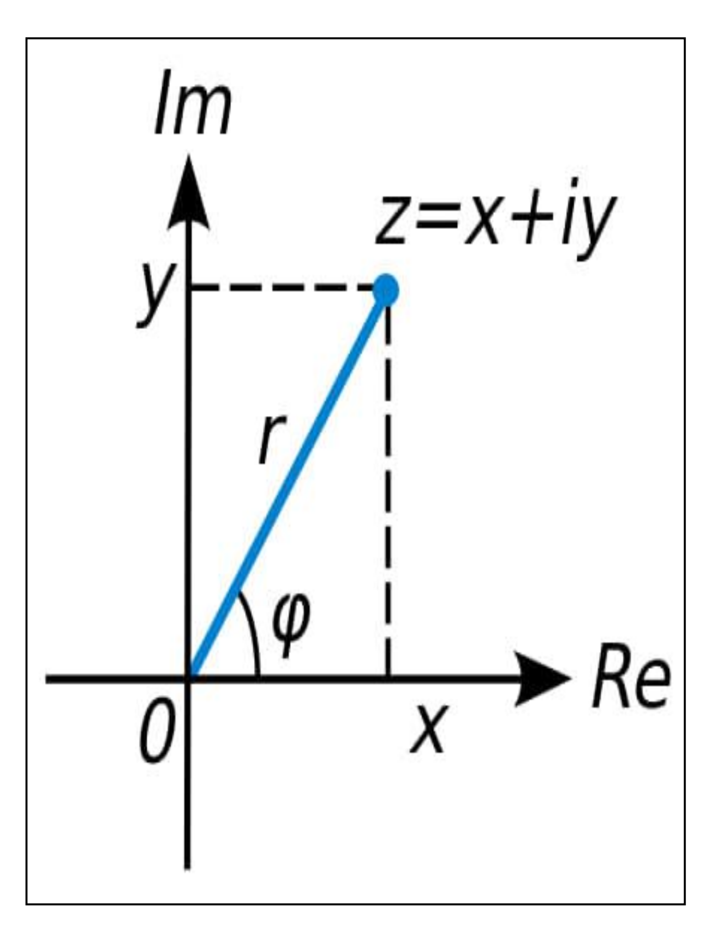
مفهوم الجداء بين الأشعة

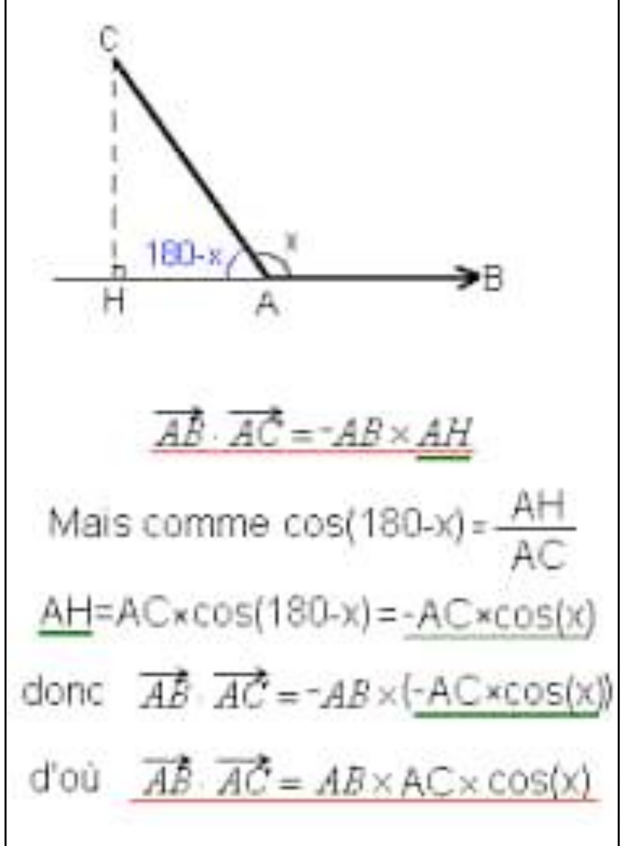
لا يمكن إعطاء مفهوم لجداء شعاعين إلا بإيجاد علاقة بين إتجاهيهما أو نوعيهما فهذا يعني أن الجداء يمثل مفهوم يتعلق بالأبعاد.

وهذا ما نجده في الجداء السلمي فهو يمثل تأثير بعد في بعد لذلك نجد نتيجته سلمية، ونجده ينعدم عندما تكون الاشعة متعامدة لعدم وجود العلاقة بين الابعاد ولذلك نقرنه في الفضاء الإقليدي بالإسقاط فالإسقاط يمثل قسمة الشعاع في بعد الشعاع الآخر.

أما في الجداء الشعاعي فهو يمثل تكوين بعد جديد إنطلاقا من بعدين لذلك نجده ينعدم عند ترابط الاشعة خطيا ونجد قيمته شعاعية مع طول يحسب بمساحة مستخرجة من الشعاعين فكأنه بمرورنا من طول لمساحة نمر من بعدين لثلاثة.

أما في الاعداد المركبة فهو يمثل جمع الزوايا بين الابعاد لذلك نقرنه بالدوران





نظرات في الجداء السلمي والجداء الشعاعي وكيفية تأثيرهما في الأبعاد

الجداء الشعاعي هو مجموع تأثير شعاعين في بعديهما فهذا التأثير لا يمكن التعبير عنه بمجموعهما لأنه يعطي بعدا واحدا لكن يمكن التعبير عنه بمساحة المعين المشكل بهما لانه قيمة في بعدين.

الناتج لابد أن يكون شعاعا لعدة امور ذلك أنه إذا أثر شعاعان في بعدين فيمكن كذلك تأثير شعاع ثالث ورابع وهكذا فلابد أن يكون الناتج شعاعا للتعبير عن التاثير.

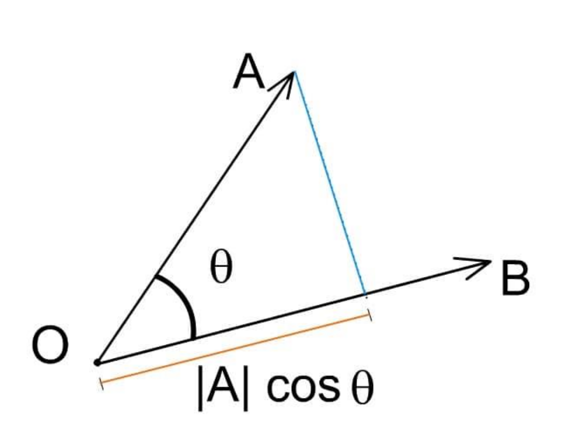
و على خلاف الجداء السلمي الذي هو تأثير خطي لشعاع في شعاع فأعطى نتيجة سلمية، الجداء السلمي تأثير شعاعين في بعدين فيعطي شعاعا عموديا على البعدين لانه لا يمكن تمثيل البعدين إلا بطريقتين:

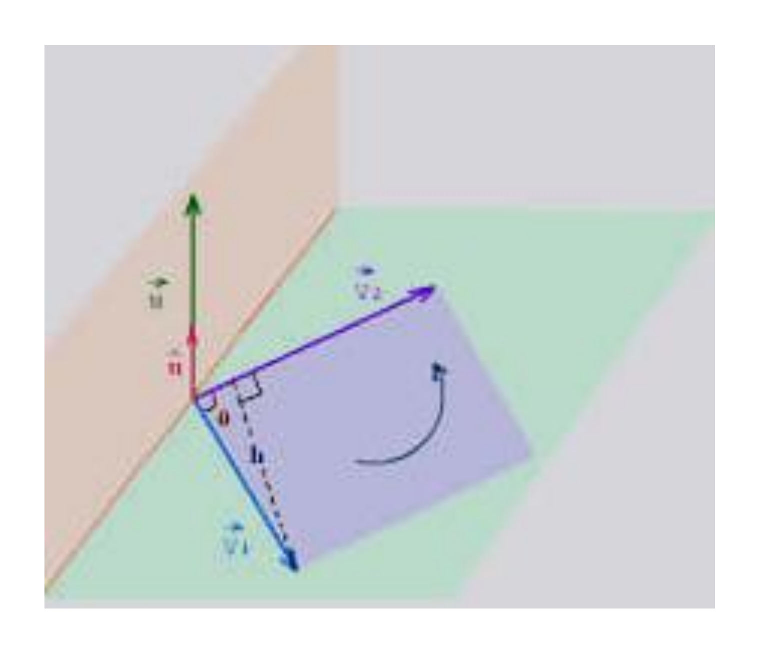
إما ثنائية أشعة أو بشعاع متعامد على مستوي الشعاعين.

كما أن المساحة انتقال من بعد الطول إلى بعد مستوي فكان لابد ان ينتقل جداء الشعاعين من المستوي إلى بعد ثالث في الفضاء.

إذن الجداء السلمي : تأثير خطي لشعاع في شعاع أو بعد في بعد لذلك النتيجة جاءت بإسقاط سلمي متناسب مع طولي الشعاعين.

الجداء الشعاعي تأثير خطي لشعاعين في بعدين لذلك النتيجة شعاع ثالث متعامد عليهما ليعبر على مستويهما وطول مساوي لمساحة المعين المشكل بهما ليعبر عن قيمة تأثيرهما.





حدثني يا أستاذ : لماذا الجداء السلمي عددي والشعاعي شعاعي وكلاهما يستعمل الدوال الجيبية ؟

نظرات في الجداء السلمي و الجداء الشعاعي:

سألني أهد الإخوة عن الفرق بين الجداء الشعاعي والجداء السلمي فأجبته فيما معناه أن الجداء السلمي هو قيمة ناتجة عن ضرب طول شعاع في طول القسم المتجه في نفس إتجاه من شعاع آخر فهو حساب في نفس الفضاء بل في نفس الإتجاه و كأنه يريد تركيب تأثيرالشعاعين فناسب ذلك أن يكون الناتج عددا لذلك سمي بالسلمي وباستعمال تجب

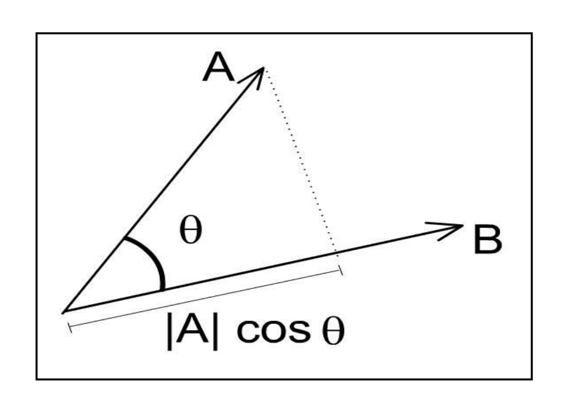
cos(x)

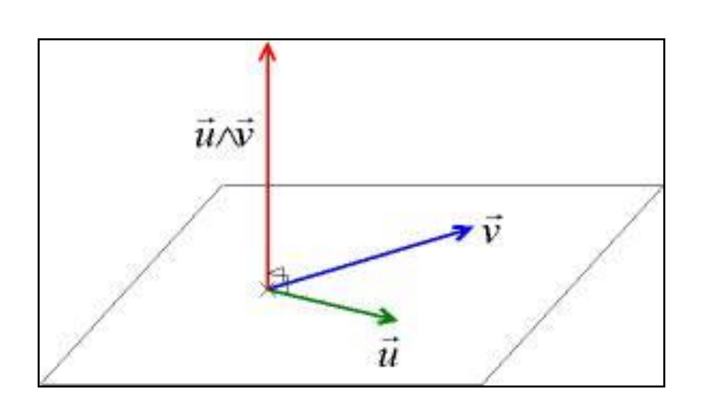
أما الجداء الشعاعي فهو توليد لشعاع في مستوى جديد لذلك كان طوله هو مساحة المعين المكون بين الشعاعين الأصليين و كأنه بمرورنا من الطول إلى المساحة زدنا بعدا جديدا فناسب ذلك توليد شعاع جديد في مستوي جديد لزيادة بعد جديد وباستعمال الجب.

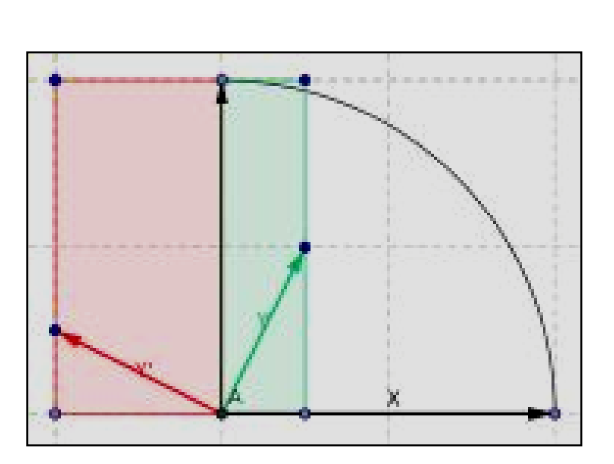
sin(x)

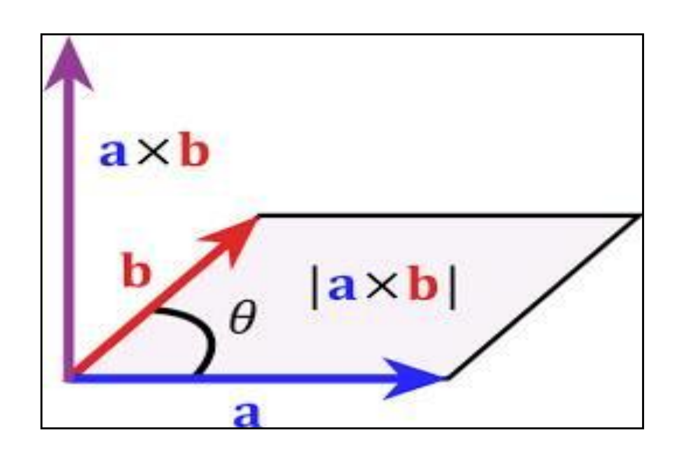
إذن الجداء السلمي هو نتيجة ضرب طول شعاعين و تجب الزاوية المحصورة بينهما فهو عدد.

والجداء الشعاعي هو توليد لشعاع جديد قائم على مستوي الشعاعين الأوليين في اتجاه مباشر طوله هو جداء طول الشعاعين في جب الزاوية المحصورة بينهما









الشعاع مفهومه وتعريفه : من هندسة إقليدس إلى فضاء هلبرت.

جعل الشعاع قطعة مستقيمة موجهة من أشنع الأخطاء المنتشرة بين التلاميذ اليوم بل حتى بين بعض الأساتذة والطلبة.

لذلك سنتناول في هذا الموضوع الأشعة بمفاهيمها وتعريفاتها في الرياضيات.

فلنتأمل في المفهوم الأصلي للشعاع قبل التطرق لتعريفه.

لتقريب المفهوم يمكننا استعمال الحركة ذلك أنها مفهوم منتشر في عصرنا بسبب وسائل النقل الحديثة.

فلنطرح السؤال التالي : ما هي السرعة ؟ والمقصود هنا سرعة تنقل الأجسام.

السرعة تمثل حركة في اتجاه بمسافة معينة في زمن معين فهي مقدار يمكننا إعطاؤه قيمة عددية بقسمة المسافة على الزمن مع وجهة معينة.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Vitesse

قيدنا السرعة هنا بسرعة التنقل لأن مفهومها أعم فهي طريقة تكميم تعرف بتكمم التغير في الزمن كسرعة تفاعل كيميائي مثلا.

لكن اكتفينا هنا بتكميم التغير في التنقل وهو المسافة فهذا مفهوم وملموس عند الجميع.

فإذا تأملنا جيدا السرعة وجدناها كمية عددية موجهة فهي تركيب من مفهومين:

مفهوم العدد

مفهوم الجهة أو التوجه

هذا المفهوم نجده كذلك في مواطن أخرى كالقوة فعندما تدفع جسما بقوة فأنت تدفعه بمقدار معين نحو اتجاه معين.

بل لو مشيت في اتجاه معين فأنت تحركت مسافة في اتجاه .

فكل هذه أعداد موجهة مثلها مثل الأعداد الموجبة والسالبة إلا أن الأعداد الموجبة والسالبة تتجه في اتجاهين فقط أما السرعة والقوة والانتقال فهي مقادير توجهها في أي اتجاه أردت في الفضاء.

لندقق جيدا في مفهوم التوجه :

لو خلطت قهوة مع حليب وسكر فأنت تخلط أنواعا ثلاثة مختلفة بكميات معينة فإذا زدت كمية القهوة فستكون وجهت ذوق الخليط إلى ذوق القهوة ولو أكثرت من السكر فقد وجهته نحو الحلاوة.

فالتوجه لا يشترط أن يكون حسي بالانتقال بل يمكن أن يكون أي توجه كان نحو نوع معين أي أن التوجه بمفهومه العام هو تنوع أو نوع معين.

فهذا ما نسميه الشعاع فالشعاع هو عدد موجه أو كمية منوعة وكلاهما شيء واحد.

ولو انتقلنا للتعريف الرياضي للشعاع عبر تعريف الفضاء الشعاعي لوجدناه:

زمرة جمعية تبديلية



مزودة بعملية خارجية تضمن الخطية بالتوزيع والتجميع عبر حقل تبديلي.

فالعملية الخارجية تأتي بالكمية وهذا ما سميناه بالعدد لذلك عادة ما نعرف الفضاء الشعاعي على حقل عددي ك R وC .

اصطلاحا نسمي عناصر الزمرة أشعة:

(Jean Dieudonné, Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, Hermann, 1964
صفحة 31 ، أنظر الصورة

http://www.devoir.tn/.../dieudonne-j-algebre-lineare-et...)

عندما نقول عدد مضروب في شعاع u :

$\lambda . u$

فنحن في الحقيقة نقول كمية λ في الاتجاه u .

وعندما نقول قاعدة الفضاء هي u_3 , u_2 , u_1 فنحن نقول في هذا الفضاء توجد ثلاث أنواع أولية من الأشعة وكل الأشعة الأخرى تعتبر كميات مختلطة منها.

فمفهوم الشعاع يعمم مفهوم العدد إذ كيف يمكنك أن تقول عندي خمس كلغ بطاطس وثلاث كلغ طماطم ؟ فهذا ليس بعدد حقيقي لكنه تكميم منوع أو متعدد الأبعاد فهذا هو الشعاع.

المفهوم والتعريف الذي ذكرناهما هنا هما مفاهيم وتعاريف جبرية فالنظرة الجبرية للشعاع تمر عبر زمرة تبديلية مزودة بعملية خارجية توزيعية تجميعية عبر حقل تبديلي.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Espace_vectoriel

وعلى هذا جبريا يعرف الفضاء الشعاعي قبل الشعاع نفسه أي أن الشعاع ظاهرة جبرية متعلقة بالبنية.

لكن من أين أتى الخلط بين الشعاع والقطعة المستقيمة ؟

لابد أن نعرف أن المفهوم الجبري للأشعة حديث لكن عبر القرون الماضية سلك البشر طريقا أخرى في تعريف الأشعة تعتبر حالة خاصة من المفهوم الجبري وذلك عبر هندسة إقليدس أو بالضبط الفضاءات التآلفية.

هذه الطريقة هي المُدرَّسَة في المراحل الأولى من التعليم ومن هنا جاء الخلط ذلك أن الأشعة تظهر بشكل تلقائي عند قطع المسافات لا بسبب بديهية ذلك لكن بسبب ما ذكرناه سابقا أن الحركة والانتقال في عصرنا مع مفهوم السرعة من المفاهيم التي دخلت في ثقافة مجتمعاتنا بسبب وسائل النقل الحديثة.

لذلك من السهل تجريد مفهوم الانتقال لنجده انسحاب لنقطة نحو أخرى فيصنع هذا الانسحاب قطعة مستقيمة ومن هنا يظهر الإشكال فبدل تجريد مفهوم الشعاع بأنه طول موجه تم به الانسحاب فالبعض يسقطه على القطعة المستقيمة لأنه لا يفرق بين طول القطعة المستقيمة والقطعة المستقيمة ذاتها.

وما يزيد الطين بلة أنه عندما يمثل الشعاع يمثله بشكل يشبه السهم فيظنه قطعة مستقيمة موجهة وأن الشعاع مكون من نقاط وأن له بداية ونهاية وكل هذا لا أساس له من الصحة.

فالخلط هنا مزدوج منشؤه الخطأ في تجريد مفهوم الشعاع مع الخلط بين تمثيله وتمثيل القطعة المستقيمة.

فالشعاع ليس به نقاط ولا هو مكون منها ولا هو قطعة مستقيمة.

ولذلك عند صناعة الفضاءات التآلفية نفرق بين نقاط الفضاء التآلفي وبين الفضاء الشعاعي المزود به هذا على طريقة الصناعة الرياضياتية التي تبدأ بتعريف الفضاء الشعاعي جبريا ثم تعريف الفضاء التآلفي بناء عليه.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Espace_affine

في فضاء شعاعي يمكننا الجمع بين الأشعة وذلك ناتج من كونها كميات منوعة لكننا لا نجمع بين النقاط ولا بين القطع المستقيمة لأنها ليست بكميات.

فالذي يخلط بين الشعاع الناتج من سحب نقطة نحو أخرى والقطعة المستقيمة التي تنتج من الربط بين نقطة البدء ونقطة الوصول مثله مثل الذي لا يفرق بين حركة السيارة والطريق التي تسير فوقه.

لا علاقة بين الأمرين ولذلك نلاحظ أنه إذا مررنا إلى فضاءات شعاعية أعم كفضاءات كثيرات الحدود والدوال فهذه لا نجد فيها أثرا للقطعة المستقيمة ولا للمستقيم.

الشعاع ببساطة كمية موجهة نحو أنواع فهو تكميم متعدد الأبعاد ويمثل حالة عامة للأعداد الحقيقية والتي تعتبر تكميما في بعد واحد.

فلدينا فضاءات شعاعية دالية وفضاءات هلبرتية وباناخية وفضاءات لوبيغ ... وغيرها كثير كلها لا علاقة لها بالنقطة والمستقيم.

تاريخيا مفهوم الشعاع مر بهندسة إقليدس فيسهل فيها ملاحظة التنقل من نقطة نحو أخرى في اتجاه معين.

لكن لصناعة ذلك رياضيا نستعمل أصناف التكافؤ فهذه هي الطريقة المثلى في الرياضيات لتحويل خاصية لكائن.

فإذا عرفنا علاقة تكافؤ بين ثنائيات النقط المرتبة بتساوي:

المسافة بينهما أو طول القطعة المستقيمة المشكلة بهما

الاتجاه من نقطة نحو أخرى

توازي حامل كل قطعة

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Vecteur

أصبحت أصناف التكافؤ هذه أشعة في فضاء شعاعي حقيقي إلا أن هذه الطريقة وإن كانت تدرس قديما في الثانوي غير مقبولة في الرياضيات العالية لعدة أسباب :



أولها أن هندسة إقليدس غير قائمة على مسلمات مضبوطة وإن كان قام هلبرت بإعادة بنائها مسلماتيا فهي غير مبنية على نظرية المجموعات ZFC .

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Axiomes_de_Hilbert

والسبب الثاني أنها لا تعمم للفضاءات الشعاعية الحديثة كفضاءات هلبرت وباناخ وفضاءات لوبيغ والدوال وغيرها مما يحتاج للبناء الجبري.

لكن تبقى طريقة شرح الأشعة عبر الهندسة بسيطة وفي متناول التلاميذ ذلك أنها حسية لكن لابد من تنبيه التلاميذ للفرق بين الشعاع والقطعة المستقيمة عبر التمثيل بأشياء حسية كالحركة والمسافة المقطوعة مثلا.

لقد قام العلماء في بداية القرن العشرين بإعادة بناء هندسة إقليدس عن طريق الفضاءات الهلبرتية والتي تزود الفضاء الشعاعي بجداء سلمي وهو الذي يظهر مفهوم الزاوية.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Espace_de_Hilbert

فمفهوم الزاوية الذي نراه في هندسة إقليدس إنما ظهر لتداخل الأبعاد مع بعضها.

فلو أخذنا مفهوم التعامد مثلا فهو سهل التصور والرسم في المستقيمات، لكن كيف قام العلماء بتجريده لصناعة تطبيقات متعامدة ؟

قد يقول أحد نطبق التعريف فالتعامد مجرد انعدام للجداء السلمي لكن ما معنى هذا التعريف ؟

هل هو مجرد آلة رياضية صنعت من أجل ان تصنع ؟ أم هي نتائج تصور تجريدي مر بمراحل عبر فهم عميق للفضاء الإقليدي.

انعدام الجداء السلمي يعني عدم تأثير أحد الشعاعين على الآخر حسب الجداء السلمي المختار ففي الفضاء الهلبرتي الجداء السلمي ما هو إلا علاقة بين الأشعة تمثل تأثيرها في بعضها من ناحية الطويلة ومن ناحية الوجهة.

فمفهوم الإسقاط ما هو إلا تمثيل للقسم المؤثر لشعاع في شعاع آخر لذلك لا يتجاوز الجداء السلمي جداء الطويلتين إذ هو أقصى تاثير ولا يكون إلا بترابط الشعاعين أي تساوي وجهتيهما.

ولذلك هو خطي فمجموع تأثيرين يساوي تأثير المجموع.

هذا التأثير على ميدان الواقع نجد له تطبيقات عدة كالقوة فاسقاطها هي مقدار القوة المؤثرة في وجهة الشعاع لذلك نجده في مفهوم العمل فمتى تعامدت القوة مع الانتقال كان عملها معدوما لأنه لا تؤثر فيه.

فمتى فهمنا أن الفضاء الإقليدي يزيد عن الفضاء الشعاعي بمسألة تأثير الأبعاد في بعضها بمقدار سلمي وخطي أمكننا تطبيق ذلك على الواقع عبر فضاءات هلبرت.

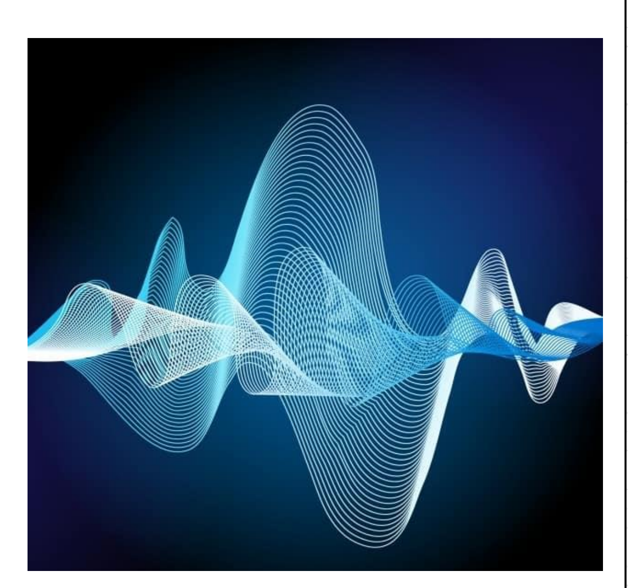
ومن تطبيقات ذلك على الواقع استعمالات فضاءات لوبيغ في ميكانيك الكم وكثيرات الحدود المتعامدة في تقريب حساب الظواهر الفيزيائية.

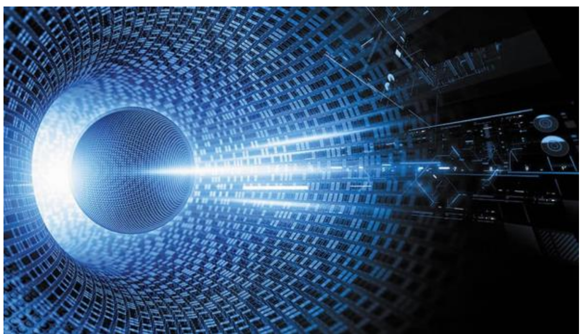
http://www.phys.ens.fr/~dal.../PHY311/2013/cours5_PHY311.pdf



من الواضح أن الرياضيات الحديثة دفعت بالتجريد لأعلى درجاته فنقلت العقل البشري من مفهوم حسي للمستقيم والمسافة والشعاع والتعامد إلى مفهوم تجريدي للتكميم والتوجه والتأثير.

هذا التجريد مكن البشر من النظر إلى ظواهر فيزيائية غير مرئية ومعقدة عن طريق التفكيك إلى ظواهر أولية بسيطة تمكن بها من صناعة نظريات حديثة يتحكم فيها بالمادة.





CHAPITRE III

Espaces vectoriels

28

(3. 0) Un ensemble E pour lequel on suppose données deux applications $(x, y) \to x + y$ et $(\lambda, x) \to \lambda x$ vérifiant les conditions (V 1) à (V 8) (les autres axiomes du chapitre II n'étant pas nécessairement vérifiés) s'appelle *espace vectoriel réel*, ou simplement *espace vectoriel* ; les éléments de E sont appelés *vecteurs* ou *points* ; les nombres réels (en tant qu'ils opèrent dans E) sont souvent qualifiés de *scalaires*. L'application $(x, y) \to x + y$ est appelée l'*addition des vecteurs* dans E, et l'application $(\lambda, x) \to \lambda x$ la *multiplication des vecteurs par les scalaires* ; on dit que $x + y$ est la *somme* des vecteurs x et y, et de même pour plus de deux vecteurs ; on dit que λx est le *produit* du vecteur x par le scalaire λ (on l'écrit parfois aussi $x\lambda$).

L'ensemble **R** des nombres réels est un espace vectoriel pour les applications $(\xi, \eta) \to \xi + \eta$ et $(\lambda, \xi) \to \lambda\xi$ en vertu des axiomes (R 1) à (R 9) ; le sous-ensemble $\{0\}$ de **R** est aussi un espace vectoriel pour les restrictions de ces mêmes applications. Nous allons dès les §§ 1 et 2 ci-dessous rencontrer de façon naturelle beaucoup d'autres espaces vectoriels.

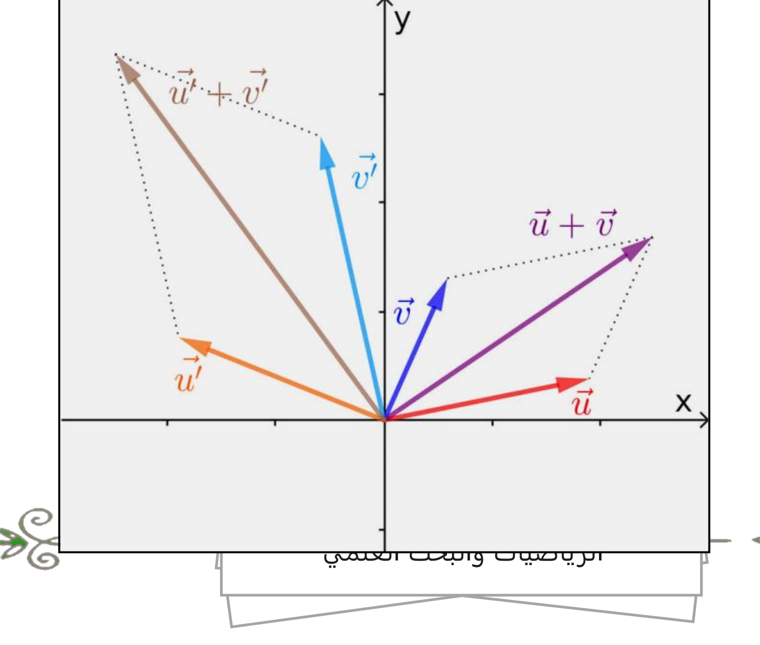
Nous donnons dans ce chapitre les conséquences les plus élémentaires des axiomes (V 1) à (V 8), en nous bornant strictement aux résultats et définitions qui sont utilisés en géométrie euclidienne à 2 et 3 dimensions.

§ 1. Sous-espaces vectoriels ; variétés linéaires

Les axiomes (V 1) à (V 4) expriment que, pour l'addition, un espace vectoriel E est un *groupe commutatif* (dit « groupe additif de E »), et les propriétés (3.1.1) et (3.1.2) ci-dessous découlent donc de (1.3) et (1.4) respectivement.

(3.1.1) *Il existe un seul élément e de E tel que $e + x = x$ pour tout $x \in$ E.*

L'unique élément *e* de E vérifiant (V 3) est appelé l'*élément neutre* ou l'*origine* de E et noté 0 (par analogie avec le nombre réel « zéro » qui a la





الشعاع من هندسة إقليدس إلى الفضاءات الحديثة : الفضاء الشعاعي، الفضاء النظيمي، الفضاء الباناخي، الفضاء الهلبرتي، فضاءات لوبيغ .... المنوعات التفاضلية...

الشعاع هو كمية منوعة أو موجهة نستعملها كل يوم فعندما نخلط الإسمنت بالرمل والماء حسب كميات فما نحن إلا نعبر عن شعاع مكون من كميات متنوعة كل نوع يشكل وجهة.

ولعل أوضح من هذا الوجهات الحسية التي نراها في واقعنا شمال جنوب يمين يسار فنسير في وجهة وفق كمية عددية.

ولذلك نمثل القوة بالشعاع لأنها كمية شدة في اتجاه.

ونمثل السرعة بشعاع لأنها كمية كذلك في اتجاه.

وكذلك الانتقال فهو سير بكمية نحو جهة.

فكل هذه هي كميات متنوعة تشكل أنواعها ما نسميه بأساس أو قاعدة الفضاء الشعاعي.

كل ما سبق يبقى نظرة جبرية تجريدية للأشعة استغرق البشر قرونا لضبطها.

أول مفهوم للأشعة ظهر عبر الهندسة الإقليدية إذ من السهل ملاحظة أن القطعة المستقيمة لها طول وأنه يمكننا توجيهه بالانتقال من أحد طرفيها للآخر.

وبمفهوم التوازي نلاحظ أن هذه الخاصيتين مشتركة بين جميع القطع المستقيمة المتوازية التي لها نفس الطول عند الانتقال في نفس الاتجاه.

هذا ما نسميه بأصناف التكافؤ إذ أصناف التكافؤ هي طريقة رياضية تستعمل لإعطاء وجود للخصائص الرياضية المشتركة داخل مجموعة عن طريق تجزئتها لمجموعات حسب هذه الخصائص فكل مجموعة تمثل خصائصها أو عنصر منها ممثل عنها.

هذه الطريقة قائمة على مسلمة الاختيار عندما تكون المجموعات غير قابلة للعد كحالة الفضاء الإقليدي.

كل هذا يبدو جيدا لصناعة مفهوم الشعاع انطلاقا من هندسة إقليدس، إلا أنه يشكل عليه **أمران:**

الأول أن هندسة إقليدس تعتمد على مفاهيم لا تعطيها تعريفا مثل المسافة.

والثاني أن النظرة للأشعة عن طريق الهندسة نظرة ضيقة جيدا.

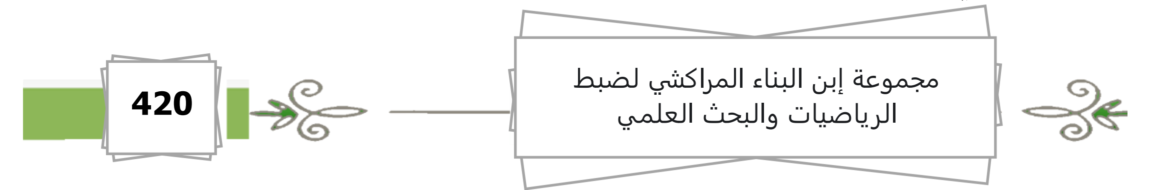
من أجل ما سبق تنطلق الرياضيات الحديثة من نظرية المجموعات ZFC لتعريف البنى الجبرية:

الزمرة ثم الحلقة ثم الحقل ثم الفضاء الشعاعي على الحقل.

فالفضاء الشعاعي بمفهومه الجبري يعتبر أقصى تجريد لمفهوم الأشعة فهو لا يبقي إلا على مفهوم الكمية عبر الحقل والاتجاه عبر التركيب الخطي لعناصر الفضاء الذي نستنتج منه وجود القاعدة.

نشير هنا إلى أن برهان وجود قاعدة لفضاء شعاعي كيفي يمر عبر توطئة زورن وهو مكافئ لمسلمة الاختيار .

تجريد مفهوم الفضاء الشعاعي مكن من الوصول للكثير من النتائج خاصة فيما يتعلق بالتطبيقات الخطية.



لكنه لا يعطي تفسيرا لمعنى الكمية ولا للاتجاه ولا ما يسمى بدرجات الحرية الذي يوافق بعد الفضاء الشعاعي.

فالمفهوم الجبري يترك للميادين الأخرى حرية إعطاء مفاهيم للأشعة والزيادة عليها.

وهذا ما نجده في الفضاء النظيمي فهو يضيف مفهوم طويلة الشعاع للشعاع فيعطي للفضاء الشعاعي مفهوما طبولوجيا عن طريق إمكانية المقارنة بين الأشعة وذلك بربطها بمجموعة الأعداد الحقيقية R .

فالبشر بطبيعته لا يحسن المقارنة المتوافقة مع الترتيب إلا في R بل رياضيا لا يمكن هذا إلا في R وهذا ما نسميه الحقل الأرخميدي.

فإذا أردنا مقارنة أشعة فأسهل شيء هو النظر لطولها ولتعريف طولها أدخلنا مفهوم النظيم.

لكن تبقى هذه الطريقة لا تعطي مفهوما لمصدر هذا الطول ولا للاتجاه ولا تأخذ بعين الاعتبار مقارنة الاتجاهات.

لذلك أدخلنا مفهوم الجداء السلمي وهو يعطي علاقة سلمية بين الاتجاهات مع الأخذ بعين الاعتبار طويلة الأشعة.

فالجداء السلمي بين شعاعين هو تأثير شعاع في شعاع وهذا ما نسميه مفهوم الاسقاط.

بالجداء السلمي عممنا مفهوم الفضاء الإقليدي بمفهوم أعم يسمى الفضاء الشبه هلبرتي لكن بقي ينقصه مفهوم الغلق الطبولوجي ذلك أن R^n مغلقة طبولوجيا.

والغلق الطبولوجي يعني أن كل متتالية كوشية هي متقاربة.

فإذا كان الفضاء النظيمي مغلق طبولوجيا سميناه فضاء لباناخ.

وكل فضاء شبه هلبرتي مغلق أي باناخي نسميه فضاء لهلبرت.

يمكننا في فضاء هلبرتي من ايجاد أساس متعامد ومتجانس وهذا تعميم ل R^n ف R^n هو فضاء هلبرتي منته البعد.

ويمكنا كذلك تعميم مفاهيم مألوفة كتقريب منحنى دالة بمماسها محليا فنعممه بتقريب التطبيقات من تطبيقات خطية وذلك بتعميم مفهوم التفاضل.

بل بتعميم الجداء الشعاعي إلى ما يسمى بالجبر الباناخي نستطيع تعميم السلاسل العددية.

بل ذهبنا لأكثر من ذلك، فعممنا هذه الفضاءات على أشكال هندسية مختلفة عبر تقريب الشكل نفسه محليا لفضاء إقليدي وهذا ما نسميه بالمنوعة التفاضلية.

فأمكننا ذلك من الاشتقاق والتكامل على بني هي في الأصل ليست شعاعية.

كل هذه الآلات الرياضياتية مكنتنا من فهم الكون أكثر من ذي قبل.

فالكون ليس مجرد نقاط وقطع مستقيمة كما هو متصور في الفضاء الإقليدي.

بل هي مادة تتغير عبر الزمن وتؤثر كتلتها في الفضاء نفسه.



من أجل هذا صنع الرياضياتيون ما يعرف بالتحليل الدالي فعوضوا الأشعة بدوال تنتج نظيمها عبر تكامل ريمان أو بشكل أعم بتكامل لوبيغ.

وهنا أصبح لطول الشعاع معنى فصنع من هذا فضاءات جديدة تستطيع كتابة الظواهر في قاعدة متعامدة متجانسة كمثل سلاسل فورييه.

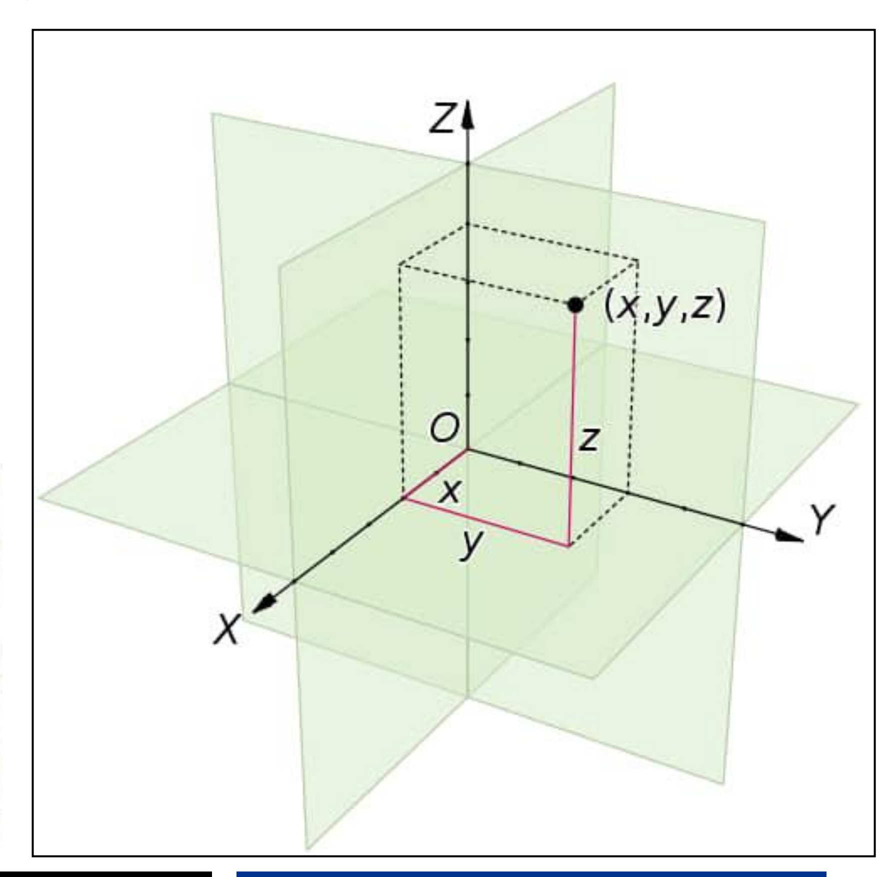
فسلاسل فورييه تخبرنا أن الظواهر المعبرة عنها بدوال ما هي إلا تداخل ظواهر موجية بسيطة يعبر عنها بدوال مثلثية.

تطور مفهوم الشعاع عبر الزمن من مفهوم جامد لكمية موجهة إلى مفهوم متحرك يعبر عن تبسيط الظواهر المعقدة بجعلها تداخلات خطية بين ظواهر بسيطة مكننا من فهم ما حولنا أكثر من ذي قبل.

الذي يبدو أن الرياضيات نظرتنا للكون وأن تعقيد كائناتها هي ذاتها تعقيدات تركيبة الكون وفي هذا يقول جون فون نيومان:

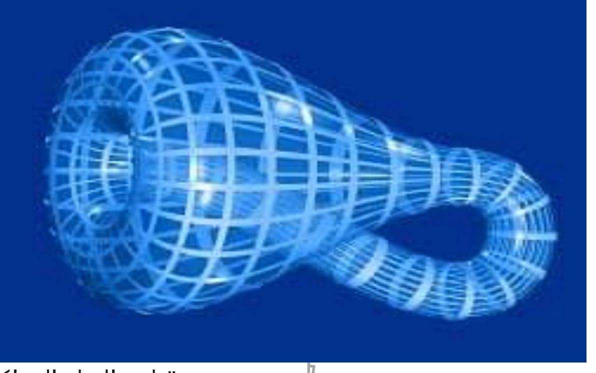
إن الناس لا تعتقد أن الرياضيات سهلة لأنهم لا يدركون كم الحياة هي معقدة.











هندسة إقليدس



معادلة القطعة المستقيمة ، والمثلث، والمربع في المستوى

معادلة القطعة المستقيمة، المثلث، المربع في المستوى والأعداد المركبة

عبد الحكيم بن شعبانة

المعادلات في مستوى مزود بمعلم متعامد متجانس

لدينا قطعة مستقيمة $[a,b]$ كما في الرسم، لدينا

$$m \in [a,b] \Longleftrightarrow \bar{am} + \bar{mb} = \bar{ab}$$

أي أن بعد النقطة m عن a زائد بعد النقطة m عن b يساوى طول القطعة ab

سنحسب هذه الأطوال بعلاقة فيثاغوث فنجد معادلة القطعة المستقيمة

$$m \in [a,b] \Longleftrightarrow \bar{am} + \bar{mb} = \bar{ab} \Longleftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-x_a)^2+(y-y_a)^2} + \sqrt{(x-x_b)^2+(y-y_b)^2} = \sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2}$$

بالنسبة للمثلث abc فهو عبارة عن ثلاث معادلات لثلاث قطع مستقيمه وبما أننا نعلم أن

$$h \times u \times v = 0 \Longleftrightarrow h = 0 \vee u = 0 \vee v = 0$$

فمعادلته هى جداء ثلاث معادلات للقطع المستقيمة ab, ac, bc

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{(x-x_a)^2+(y-y_a)^2} + \sqrt{(x-x_b)^2+(y-y_b)^2} - \sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2}\right)\\ \times &\left(\sqrt{(x-x_a)^2+(y-y_a)^2} + \sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2} - \sqrt{(x_a-x_c)^2+(y_a-y_c)^2}\right)\\ \times &\left(\sqrt{(x-x_b)^2+(y-y_b)^2} + \sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2} - \sqrt{(x_b-x_c)^2+(y_b-y_c)^2}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

المربع بنفس الطريقة هو جداء أربع معادلات

المعادلات بالأعداد المركبة

نعلم أن جداء عدد مركب في مرافقه يعطي مربع طويلته و منه معادلة القطعة المستقيمة

$$\sqrt{(x-x_a)^2+(y-y_a)^2} + \sqrt{(x-x_b)^2+(y-y_b)^2} = \sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2}$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{(z-z_a)(\bar{z}-\bar{z}_a)} + \sqrt{(z-z_b)(\bar{z}-\bar{z}_b)} = \sqrt{(z_a-z_b)(\bar{z}_a-\bar{z}_b)}$$

بالنسبة للمثلث abc

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{(z-z_a)(\bar{z}-\bar{z}_a)} + \sqrt{(z-z_b)(\bar{z}-\bar{z}_b)} - \sqrt{(z_a-z_b)(\bar{z}_a-\bar{z}_b)}\right)\\ \times &\left(\sqrt{(z-z_a)(\bar{z}-\bar{z}_a)} + \sqrt{(z-z_c)(\bar{z}-\bar{z}_c)} - \sqrt{(z_a-z_c)(\bar{z}_a-\bar{z}_c)}\right)\\ \times &\left(\sqrt{(z-z_b)(\bar{z}-\bar{z}_b)} + \sqrt{(z-z_c)(\bar{z}-\bar{z}_c)} - \sqrt{(z_b-z_c)(\bar{z}_b-\bar{z}_c)}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

المشاغب

نظرات في مفهوم الدائرة

الكل متفق على أن المجموعة هي مجموعة نقاط من المستوى تبعد عن نقطة بمسافة ثابتة.

وهناك من ذكر الإستدارة وهناك من ذكر الإنحناء .

كل هذا تعريف صحيح رياضيا لكن ما هو مفهومها ؟

الدائرة ظاهرة حتمية لثلاث أمور:

وجود بعدين

وجود مسافة وثباتها

الإنحناء

الدائرة ظاهرة تمثل تجانس البعدين في جميع الإتجاهات عبر مفهوم المسافة أي أطوال الاشكال لا تتغير وإن غيرنا إتجاهها.

فالذي يظهر في الهندسة الإقليدية أن الأطوال ثابتة وإن غيرنا الإتجاه.

فثبات الطول شكل لنا ما يعرف بالإنحناء والإنحناء تغيير الإتجاه دون إنكسار أي بشكل تفاضلي.

إذن الدائرة هي تغيير الإتجاه في بعدين مع المحافظة على الطول وهذا الذي نفعله عند رسمها فنحن نقوم بدوران لقطعة مستقيمة حول أحد رؤوسها.

إذن الدائرة ظاهرة تظهر نتيجة تغيير الإتجاه مع المحافظة على المسافات في بعدين.

وإن طلبنا من طفل لا يعرفها رسمها فإننا لا نقول له إرسم نقاطا تبعد عن مركز بنفس المسافة وإنما نقول دور قطعة أو خشيبة حول احد رؤوسها فوق الطاولة.



بين المربع والدائرة.... هل المربع شكل منظم ؟

من الأشكال الهندسية البسيطة التي اكتشفها البشر منذ القدم : المربع والدائرة وذلك لسهولة رسمهما.

فالمربع مجرد أربع قطع مستقيمة متساوية الطول تشكل مضلعا بزوايا قائمة.

أما الدائرة فمجموعة نقاط تبعد بنفس المسافة عن المركز.

رغم بساطة هذه الأشكال إلا أنهما مختلفان من حيث المفهوم.

فالمربع لا يمكن إنشاؤه إلا بتداخل بعدين مع تعريف للاستقامة وإن كان تعريف الاستقامة ممكن من الناحية الطبولوجية عن طريق المسافة دون اللجوء إلى فضاء شعاعي فإن تعريف الزاوية القائمة غير ممكن إلا تحت ظل فضاء إقليدي على الأقل.

المربع يحتوي على أربع نقاط شاذة متمثلة في رؤوسه ينكسر عندها المنحنى ليشكل زوايا قائمة فهو منحنى مستمر غير قابل للتفاضل.

ارتباط المربع بمبرهنة فيثاغورث ظاهر العيان فالمربع شكل لا يمكن تعميمه إلا عن طريق الفضاءات الإقليدية نحو مكعب مثلا في فضاء ثلاثي الابعاد.

لو رجعنا للدائرة وجدناها أبسط تعريفا من المربع فتعريفها يعتمد على المسافة فقط فيمكن تعميم مفهومها على أي فضاء طبولوجي مزود بمسافة.

لكن لو أردنا الحصول على الدائرة الموجودة في الفضاء الإقليدي لاحظنا إمكانية تعريف الدائرة عن طريق الجداء السلمي وبالضبط عن طريق الزوايا القائمة.

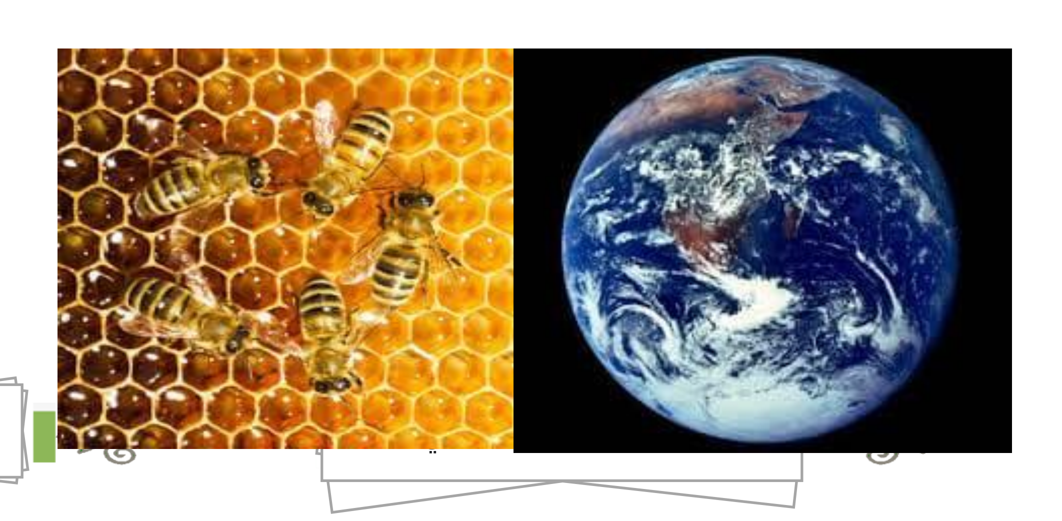
وهنا نلاحظ أن الدائرة منحنى مستمر قابل للاشتقاق فهو يقبل مماسا عند كل نقطة.

فيمكن اعتبار الدائرة شكلا منتظما أما المربع فشكل بسيط غير منتظم يمثل بساطة التفكير البشري لذلك كان المربع الأصل المنشئ لمفهوم المساحة فقاس بمساحته البشر غيره من الأشكال.

أما القرص فقد شكل معضلة منذ القدم بل حاول البشر محاولة تحويل مساحته إلى مساحة مربع أو ما يعرف بمسألة تربيع الدائرة والتي أجاب عليها بعد عشرات القرون وينتزل بالاستحالة.

لو نظرنا للطبيعة لوجدنا المربع شكل دخيل عليها نكاد لا نجده فيها أما الدائرة خصوصا والتقوس عموما نجده شائعا فيها.

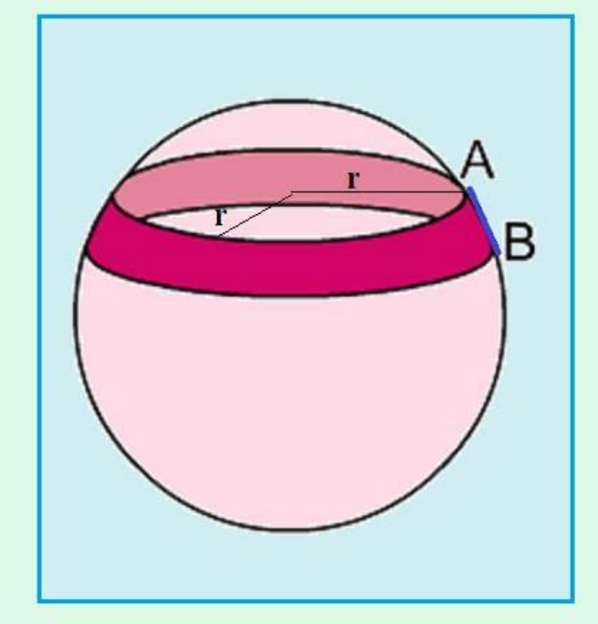
فالمربع تبسيط ذهني بشري للأشكال ثنائية البعد أما الدائرة فمفهوم معقد يحمل في طياته الكثير من المفاهيم.

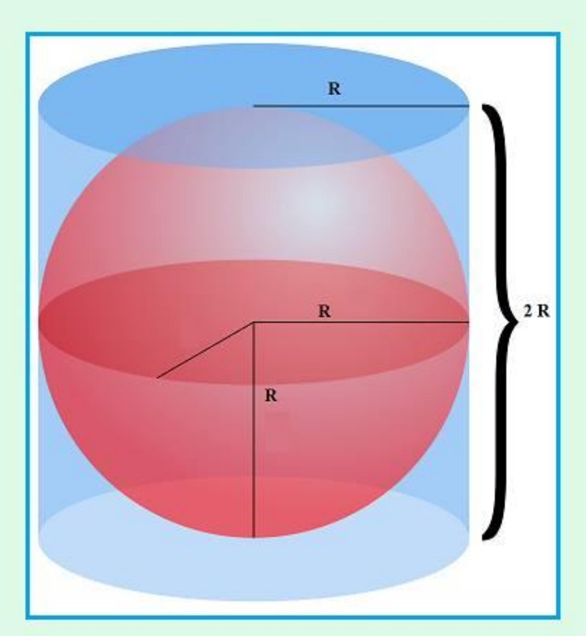


عبد الحكيم بن شعبانة

طريقة أرخميدس في حساب مساحة سطح الكرة

قام أرخميدس بمقارنة مساحة سطح الكرة مع مساحة الإسطوانة المحيطة بها و ذلك عن طريق تقطيع سطح الكرة إلى اجزاء صغيرة أفقيا يمكن اعتبارها اسطوانات ارتفاعها طول القوس ونصف قطرها يتغير بتغير موقعها

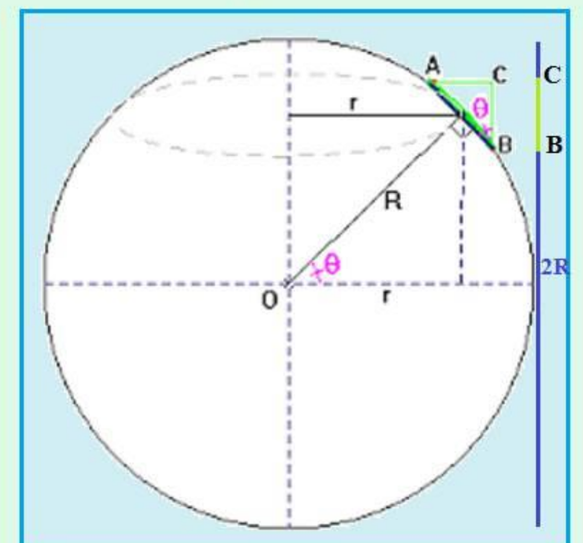




نلاحظ أن مساحة الشريط هي طول القوس في طول الدائرة أي $S_r = 2\pi r AB$

نلاحظ كذلك أنه إذا رسمنا مثلثا قائما وتره طول القوس و ضلعه يوازي جدار الاسطوانة فسنحصل على

$$cos(\theta) = \frac{r}{R} = \frac{BC}{AB}$$



ومنه

$$S_r = 2\pi r AB = S_r = 2\pi R\, BC$$

لكن BC ما هو إلا اسقاط القوس على ارتفاع الاسطوانة

فإذا جمعنا جميع مساحات هذه الأشرطة فسنحصل على

$$\sum_{[-R,R]} S_r = \sum_{[0,2R]} S_{BC}$$

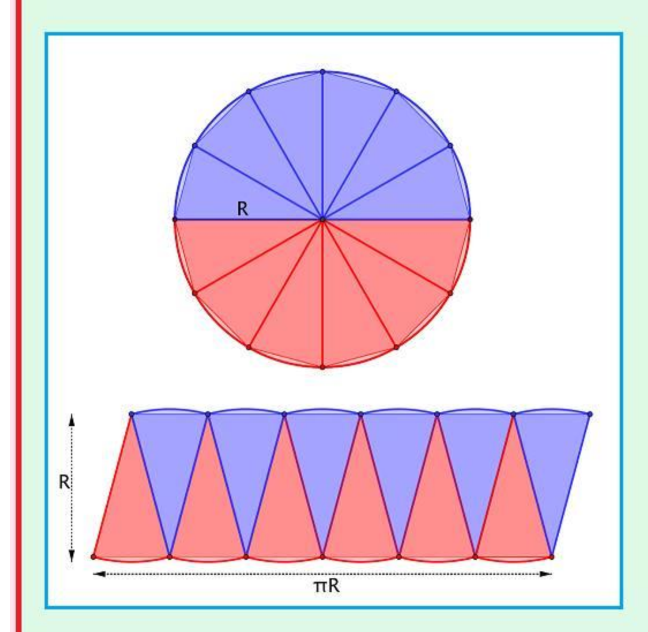
$$= 2\pi R(2R) = \boxed{4\pi R^2}$$

عبد الحكيم بن شعبانة

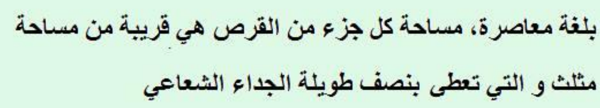
طريقة أرخميدس في حساب مساحة القرص بنظرة عصرية

شرح طريقة أرخميدس

قام أرخميدس بتقسيم القرص إلى أجزاء متساوية عديدة كما في الرسم، فأصبحت تشبه مثلثات متساوية الساقين مع تحدب بسيط في قاعدتها، ثم قام بإعادة ترتيبها بضم كل مثلث بمقابله بشكل عكسي للحصول على ما يشبه متوازي أضلاع ارتفاعه نصف قطر الدائرة و طوله نصف طول الدائرة

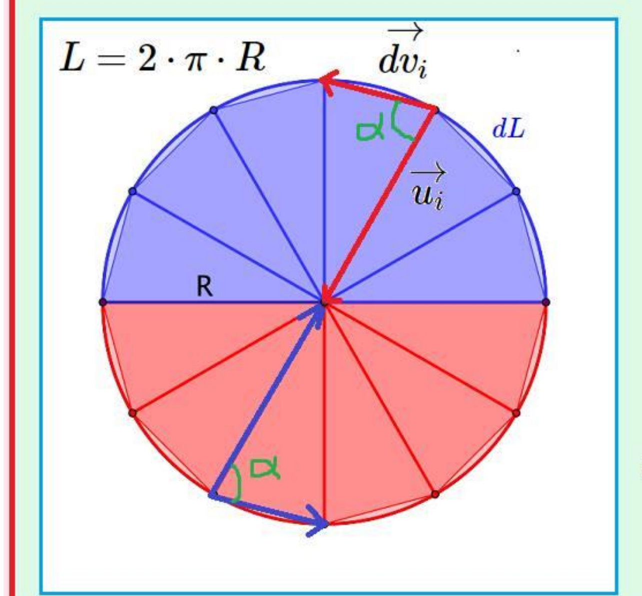


فكرة أرخميدس أنه عندما يكبر عدد تقسيمات القرص فإن كل جزء يصبح تقريبا مثلثا، مما ينتج من إعادة ترتيبها متوازي أضلاع مساحته تساوي القاعدة في الإرتفاع و التي تعطي مساحة القرص



$$S = R \cdot \pi \cdot R = \pi \cdot R^2$$

طريقة أرخميدس باللغة المعاصرة



بلغة معاصرة، مساحة كل جزء من القرص هي قريبة من مساحة مثلث و التي تعطى بنصف طويلة الجداء الشعاعي

$$S_i = \frac{1}{2} \cdot ||\overrightarrow{u_i} \wedge \overrightarrow{dv_i}||$$
$$= \frac{1}{2} \cdot ||\overrightarrow{u_i}|| \cdot ||\overrightarrow{dv_i}|| \cdot sin\alpha$$
$$= \frac{1}{2} \cdot R \cdot ||\overrightarrow{dv_i}|| \cdot sin\alpha$$

بما أن طول الشعاع $||\overrightarrow{dv_i}||$ صغير جدا فهو قريب من طول القوس

$$S_i \approx \frac{1}{2} \cdot R \cdot sin\alpha \cdot dL$$

ومنه

$$S \approx \sum_i S_i \approx \sum_i \frac{1}{2} \cdot R \cdot sin\alpha \cdot dL \approx \frac{1}{2} \cdot R \cdot sin\alpha \sum_i dL$$
$$\approx \frac{1}{2} \cdot R \cdot sin\alpha \cdot L \qquad \approx \frac{1}{2} \cdot R \cdot sin\alpha \cdot (2 \cdot \pi \cdot R)$$
$$\approx \pi \cdot R^2 \cdot sin\alpha$$

في جوار المالانهاية نلاحظ أن مجموع $||\overrightarrow{dv_i}||$ يؤول إلى طول الدائرة L و الزاوية α تؤول إلى $\frac{\pi}{2}$ ومنه

$$S = \lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \pi \cdot R^2 \cdot sin\alpha = \pi \cdot R^2$$



التحليل : الدوال، النهايات، الاستمرار، الاشتقاق



الرياضيات الممتعة – نسخة معدلة : يا تلميذ إنك تستعمل مبرهنة القيم المتوسطة في حياتك بالفطرة وكذلك استعملها نيوتن.

قلت للتلميذ : درستم مبرهنة القيم المتوسطة ؟

التلميذ : نعم

قلت : كيف شرحها الأستاذ ؟

التلميذ : شرحها بأن تكون مستمرة و رتيبة و الجداء لقيم صور حدود المجال أصغر من 0 و هناك حالات خاصة

قلت : الرتابة ليست شرطا، لكن هذا تطبيق و ليس بشرح

التلميذ : نعم أعطانا دالة

قلت : عندما تبحث عن صفحة لديك رقمها في كتاب كيف تفعل ؟

التلميذ : أبحث بالصفحة حتى أجدها 😅

قلت : تبدأ تعد 1 ، 2 ، 3 .... حتى تصل لصفحتك 🤔 , 😂 هكذا تستغرق ساعة للوصول إليها

سأخبرك كيف تبحث :

تفتح الكتاب في النصف ثم تنظر هل الرقم الذي وجدته أكبر أو أقل من رقم صفحتك، فإن كان أكبر فصفحتك في الجزء الأيمن،وإن كان أصغر فهي في الجزء الأيسر

التلميذ : أهه نعم كيفاه ذهبتلي 😅

قلت : لكن لماذا عندما تجد الرقم أكبر من رقم صفحتك فصفحتك في الجزء الأيمن ؟

التلميذ : نعم فمثلا لنفرض كتاب فيه 100 صفحة تفتح في الصفحة 50 ونبحث عن الصفحة 30، بما أن 50 أكبر من 30 فصفحتي في الجزء الأيمن، مجرد مثال

قلت : نعم لكن من يضمن لك أن الصفحة 30 موجودة في القسم الأيمن ؟

التلميذ : في رأيي نعم إلا في حالة أن الكتاب مرقم بالمقلوب

قلت : التعبير الأدق إلا في حالة ترقيم منقطع 😊

الذي يضمن ذلك هو أن الكتاب مرقم من 1 إلى 50 دون انقطاع

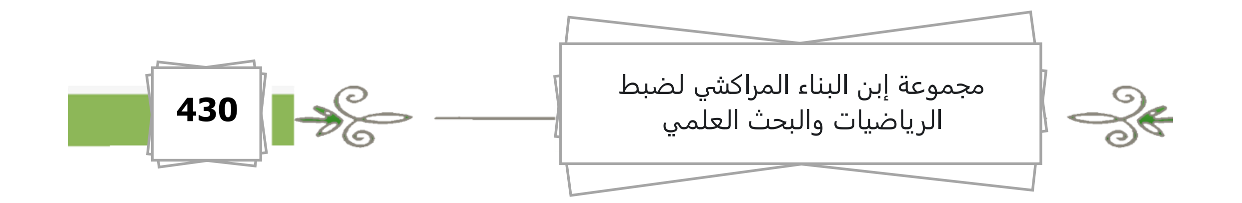
التلميذ : ياه والله صح

قلت : أليس هذا هو الاستمرار 😂 أنت تطبق مبرهنة القيم المتوسطة دون أن تدري

التلميذ : نعم بالضبط

قلت : هل تعلم أن هذه الطريقة تستعمل في البرمجة لإيجاد نقاط انعدام دالة

يأخذون داله مستمرة معرفة على مجال، موجبة في طرف مجال وسالبة في الطرف الآخر



بما أنها تغيرالإشارة فهي تنعدم في نقطة ما بين الطرفين، فيقسمون المجال إلى قسمين ثم ينظرون إلى أطراف القسم الأول هل إشارة الدالة عند الطرفين مختلفة أم لا،

فإن كانت مختلفة فلابد أنها تنعدم عند نقطة في هذا المجال فيعيدون قسمته إلى قسمين، وإن كانت الإشارتان غير مختلفتين يأخذون القسم الآخر فيقسمونه قسمين و هكذا يواصلون في تقسيم المجال إلى أن يحصلوا على مجال صغير جدا تنعدم الدالة في نقطة منه

التلميذ : أه هذه أعرفها عرفها، لكي يصغرون المجال

نستطيع القيام بها بالآلة الحاسبة لكن لا توجد قيمة مضبوطة حقا.

قلت : هذا تطبيق لمبرهنة القيم المتوسطة

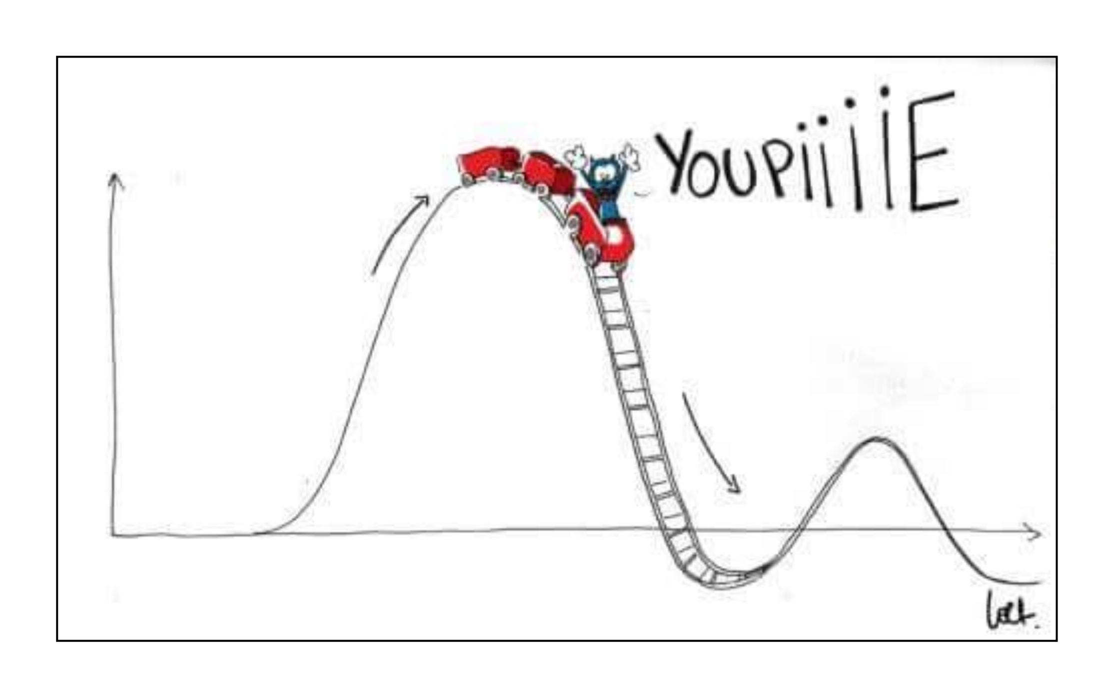
التلميذ : نعم بارك الله فيك

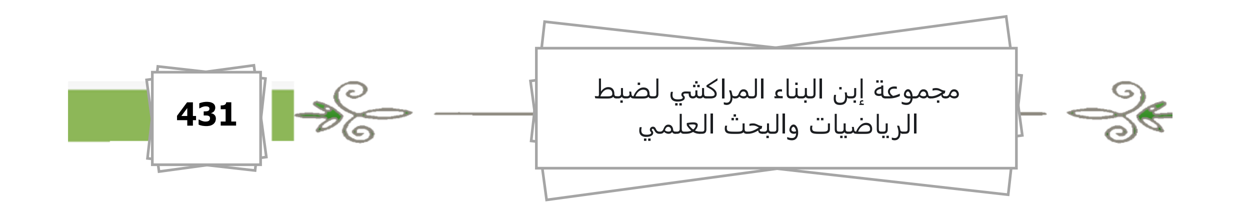
قلت : وفيك بارك الله، فهمتها الآن ؟

التلميذ : نعم😂 شكرا جزيلا.

الأستاذ : لقد استعمل نيوتن هذه المبرهنة بالحدس وبالغ في استعمالها حدسيا مع مبرهنة التزايدات المنتهية لحساب الحلول لكنه استعمل ذلك في كثيرات الحدود وهذا ما نعرفه اليوم بخوارزمية نيوتن مما دفع العلماء إلى برهنتهما رياضا .

فمن هذه الحدسية ظهر مفهوم الإستمرار و بعده الإشتقاق وفتح باب علم التحليل.





بين الأستاذ والتلميذ : مبرهنة القيم المتوسطة

التلميذ : يا أستاذ لم أفهم مبرهنة القيم المتوسطة ؟

الأستاذ : تفضل إلى السبورة وهذا القلم فاقسمها لي نصفين بخط كيفما تريد.

قام التلميذ برسم خط من أعلى لأسفل وسط السبورة يقسمها نصفين.

الأستاذ : الآن أرسم لي خطا منحنيا غير منقطع كيفما تريد يبدأ من شمال السبورة إلى يمينها بشرط أن لا يقطع الخط الذي يقسم السبورة قسمين ؟

التلميذ : هذا مستحيل أستاذ!!

الأستاذ : لماذا ؟

التلميذ لأنها لا توجد طريق إلا من خلال قطع الخط العمودي فالطرق كلها مسدودة به.

الأستاذ : هذه هي مبرهنة القيم المتوسطة فالمستوي مقسم لنصفين بمحور السينات أو الفواصل، فلكي تعبر الدالة من الجزء العلوي الموجب إلى الجزء السفلي السالب أو العكس فليس لها من طريق إلا من خلال قطع محور السينات أي تنعدم عنده.

الأستاذ : لماذا نقول انها مستمرة ؟

التلميذ : لا أدري!

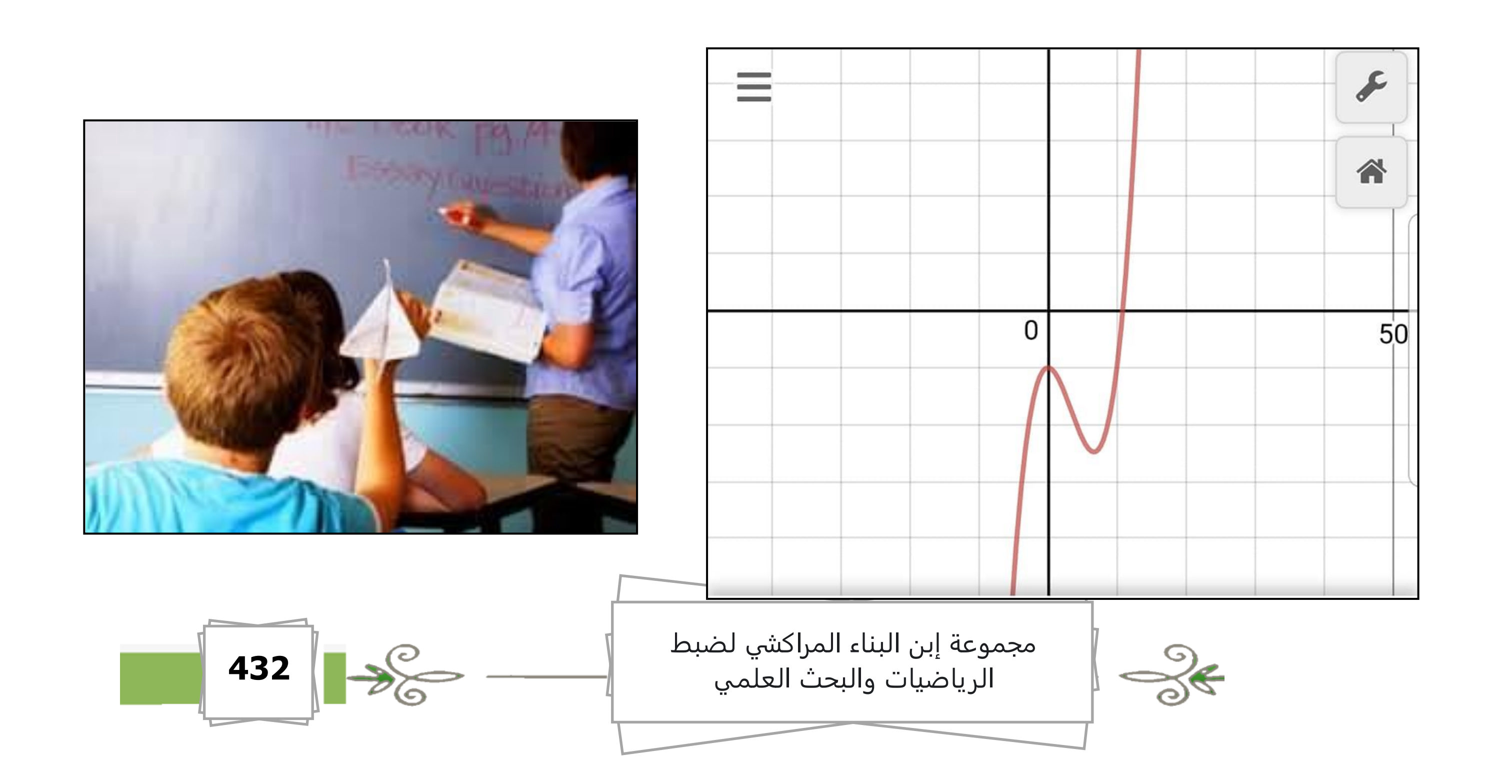
الأستاذ: أرسم نصف منحنى في يسار السبورة ونصف آخر في يمينه .

قام التلميذ برسم ذلك.

الأستاذ : لماذا لا يقطع هاذان الخط العمودي ؟

التلميذ : لأنهما غير متصلان نصف يسار ونصف يمين.

الأستاذ : لذلك نشترط أن تكون الدالة مستمرة حتى لا تقفز من نصف مستوي لآخر فوق محور الفواصل بانقطاع منحناها فمادام المنحنى لا ينقطع وتمر من قيمة لأخرى فلابد من أن تمر بجميع القيم بينهما.



نظرات في الدوال المشوشة باضطرابات

التفسير البياني لقبول كثير الحدود الفردي الرتبة جذرا دائما وعدم توفر هذه الخاصية في الرتب الزوجية.

عندما نتأمل كثير حدود غير ثابت بصيغة

$$P_n(x) = a(n)\, x^n + a(n-1)\, x^{(n-1)} \dots + a(0)$$

و للتبسيط نأخذ $a(n) = 1$ فيمكننا كتابته على الشكل $P_n(x) = x^n + P_{(n-1)}(x)$

حيث $P_{(n-1)}(x) = a(n-1)\, x^{(n-1)} \dots + a(0)$

بيانيا x^n

يمثل في الرتب الزوجية قطع مكافئ يمس محور السينات في الصفر كما في الصورة.

أما الرتب الفردية فهو يشكل بيانيا فرعين نحو المالانهايتين متعاكسان في الاتجاه.

فإن كان فرعي كثير الحدود x^n الزوجي الرتبة يسحباه نحو زائد مالانهاية ففرعي كثير الحدود x^n الفردي الرتبة يسحباه كل واحد منهما في الاتجاه المعاكس للآخر وكون x^n مستمر يجعله حتما يمر بالصفر.

أما كثير الحدود $P_{(n-1)}(x)$

فهو يمثل هنا عنصرا ضعيفا أمام x^n بجوار المالانهاية لكنه بجوار الصفر يعتبر عنصر دخيل ومشوش على x^n فيجعل منحناه يضطرب في القيم الصغيرة لكن سرعان ما يتغلب x^n عليه بجوار المالانهاية.

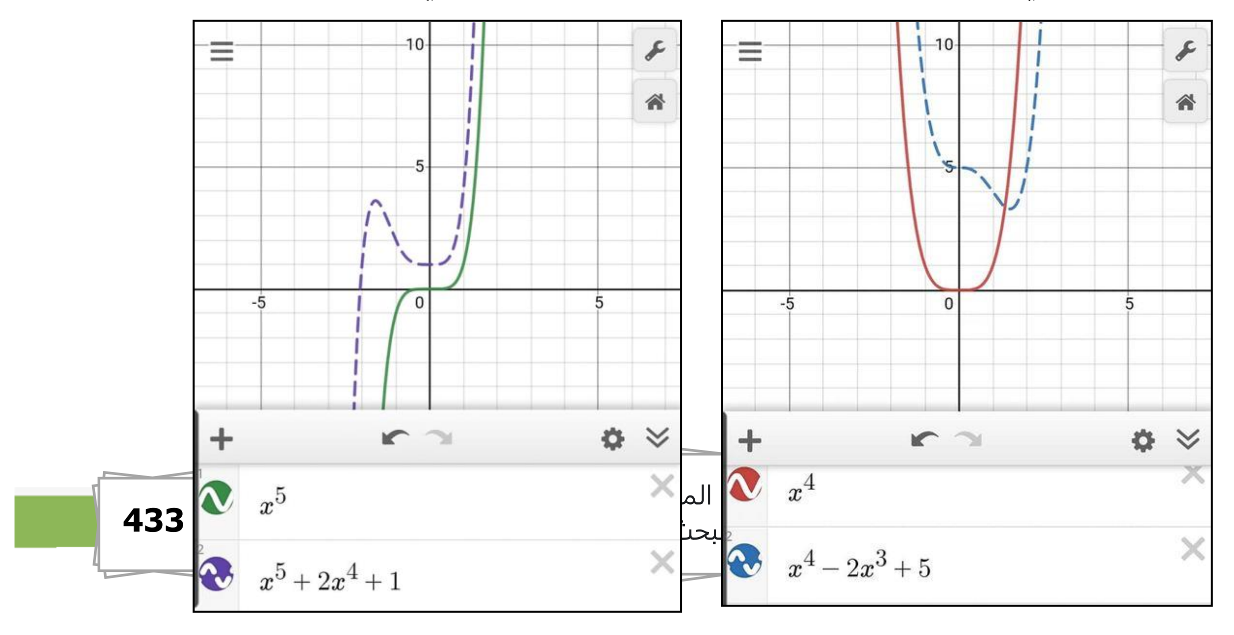
فإن كان التشويش يسحبها نحو أعلى ففرع x^n في جوار ناقص مالانهاية سيرجعها حتما نحو ناقص مالانهاية لتمر بالصفر وإن كان التشويش يجرها نحو أسفل ففرع زائد المالانهاية سيعيد سحبها نحو الأعلى لتمر بالصفر.

فحالة x^n فردي الرتبة بتغلبها على $P_{(n-1)}(x)$ يجعلها تمر حتما بالصفر رغم هذا التشويش المحلي.

لكن حالة x^n زوجي الرتبة تشويش $P_{(n-1)}(x)$ قد يبعدها عن الصفر محليا لكن بما أن فرعاها في جوار المالانهاية يبعداها على الصفر فالتشويش المحلي إذا سحبها نحو أعلى فسيحرمها حتما من الجذور أما إذا سحبها نحو أسفل فسيعطياها على الأقل جذرين.

جذر كثير الحدود من الرتب الفردية موجود بسبب هذه الرتبة.

أما كثير الحدود الزوجي الرتبة إذا قبل جذرا فجذره راجع للتشويش المحلي ل $P_{(n-1)}(x)$.



المتتاليات، التعريف الإبسيلوني لنهايات المتتاليات

أول مجموعة عددية تقابل البشر هي مجموعة الأعداد الطبيعية والتي لا يحتاج العقل التأمل فيها كثيرا ليدرك أنها غير منتهية وغير محدودة بل يوجد توافق بين عدم الانتهاء والمحدودية في هذه المجموعة.

لكن الخاصية المهمة في هذه المجموعة العد بالتتابع أو التتالي فكل عدد له لاحق:

بدأ بالصفر :

$0 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow ... \leftarrow n \leftarrow ...$

إذا تأملنا العد فنحن لا نعد فقط الأعداد الطبيعية بل قادرين على عد أعداد مختلفة كالزوجية مثلا:

بدأ من

$0 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow ... \leftarrow 2n \leftarrow ...$

بل قادرين على عد أعداد غير طبيعية كمقلوب الأعداد الطبيعية مثلا:

بدأ من

$1/1 \leftarrow 1/2 \leftarrow 1/3 ...$

وهذا ليس خاص بمقلوب الأعداد الطبيعية بل نجده مثلا في

0.1

0.01

0.001

....

نطلق على هذه الأعداد المتتالية اسم متتالية فعندما نتأمل جيدا نلاحظ أن المتتالية مجرد دالة من N نحو R بل هذه حالة خاصة نطلق عليها متتالية عددية لأننا قادرين على عد كائنات كيفية مثل المجالات مثلا

$[0,1] \rightarrow [1,2] \rightarrow ... \rightarrow [n,n+1] \rightarrow ...$

فالمتتالية اسم عام نطلقه على كل دالة تعد عناصر انطلاقا من N أو جزء منها.

وقد تكون العناصر منتهية فهذه متتالية منتهية.

وقد تكون غير منتهية.

نسمي السوابق من N بالرتب و الصور بالحدود.

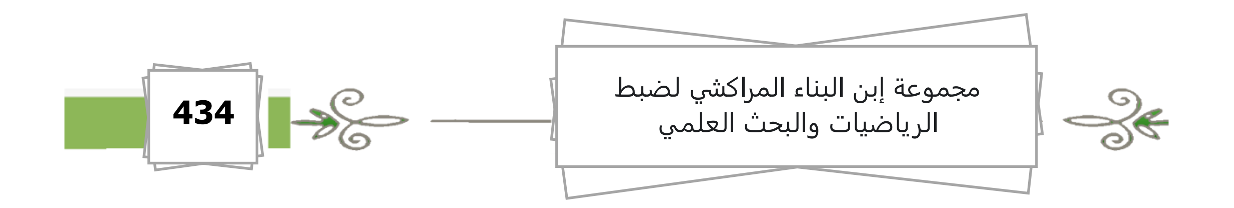
عادة نستعمل رمزا من هذا النوع: $U_n = ...$

مثال ذلك: $U_n = 1/2\ n\ (n+1)$

أو متتالية مجالات مثلا: $J_n = [n\ ,\ n+1]$

الذي سنهتم به في هذا المنشور هي المتتاليات العددية وهي المتتاليات التي صورها في مجموعة عددية كمجموعة الأعداد الحقيقية R أو المركبة C .

مثال ذلك: $U_n = (-1)^n$



وكمثال آخر في الأعداد المركبة: $U_n = (i+1)^n$

إن كانت الأعداد الطبيعية غير منتهية ولا محدودة وهناك توافق بين المسألتين في N فليس الأمر في أي أعداد نعدها فمن الواضح أن مقلوب الأعداد الطبيعية مثلا رغم أنها غير منتهية فهي محدودة بل نلاحظ أكثر من ذلك أنها تصغر شيئا فشيئا وتقترب من الصفر فإذا كان لدينا $U_n = 1/n$

نجد

$$U_{1000} = 0.001$$
$$U_{1000000000} = 0.000000001$$

وكمثال آخر لو أخذنا المتتالية $V_n = (n+1)/n$ وحسبنا $V_{1000000000}$ نجد: 1.000000001 وهي تقترب من 1 .

ولدينا المتتالية الشهيرة $U_n = (1+1/n)^n$ لو حسبنا $U_{1000000000}$ نجد تقريبا 2.718282 وهو تقريبا العدد الأسي e .

بل مهما كان العدد الحقيقي a يمكننا أن نجد متتالية ناطقة تقترب منه مثال ذلك $U_n = [10^n a]/10^n$ حيث نرمز بالمعكوفتين لدالة الجزء الصحيح وهي تعطينا لكل عدد حقيقي أقرب عدد صحيح أصغر منه أو يساويه مثال ذلك

$$[1.5] = 1$$
$$[-3.6] = -4$$

عموما دالة الجزء الصحيح تعطينا من أجل كل x عددا صحيحا يحقق $[x] \leq x < [x] + 1$

لنعود لمتتاليتنا $U_n = [10^n a]/10^n$ لنجربها على $a = 1.2987677$ فلدينا

$$U_1 = 1.2$$
$$U_2 = 1.29$$
$$U_3 = 1.298$$
$$U_4 = 1.2987$$

فهي تعطينا من أجل كل n كتابة العدد a مع n رقم بعد الفاصلة فلا غرابة أنها تقترب من a .

بصفة عامة نسمي هذه الكثافة أي مجموعة الأعداد الناطقة كثيفة في R أيْ أيُّ عدد حقيقي يمكننا أن نجد متتالية ناطقة تقترب منه.

ولو تأملنا جيدا متتاليتنا فهي عشرية فالأعداد العشرية كذلك كثيفة في R لذلك نكتب أي عدد حقيقي بالكتابة العشرية فكتابته ما هي إلا متتالية عشرية تقترب منه.

كل هذا جيد لكن يبقى مفهوم الاقتراب حدسي ويحتاج ضبطا رياضيا فمتى نقول عن متتالية أنها تتقارب نحو عدد معين ؟

نطلق على ذلك في الرياضيات اسم النهاية فعندما تقترب متتالية من عدد نرمز له بـ l مثلا نقول أنها تؤول



نحوه ونكتب رمز النهاية وتحته رمز المتغير n عندما يؤول لزائد مالانهاية:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = l$$

هناك من يكتفي في المتتاليات بكتابة

$$\lim_{\infty} U_n = l$$

كما ذكرنا مفهوم الاقتراب حدسي فما معنى متتالية تقترب أو تؤول نحو عدد عندما يؤول n للمالانهاية ؟

لتحديد مفهوم الاقتراب يمكننا حساب الفرق بين U_n و l والنظر هل الفرق يصغر كلما تقدم n نحو المالانهاية أو لا ؟

نحتاج لذلك لاستخدام معيار نقيس أو نقارن به فيمكننا اختار عدد موجب تماما كيفي مثلا 0.001 وننظر هل $|U_n - l| < 0.001$ ابتداء من رتبة n_0 أو لا ؟

يمكننا أن نصغر هذا المعيار أكثر لتحقيق اقتراب أفضل مثلا $|U_n - l| < 0.000001$

وننظر هل نصل لرتبة n_0 من أجلها كل $n > n_0$ يحقق $|U_n - l| < 0.000001$

لكي نعمم هذه الطريقة يمكننا الترميز للمعيار برمز ξ المسمى إبسيلون فنحتاج من أجل أي معيار $\xi > 0$ أن نجد n_0 بحيث من أجل كل $n > n_0$ لدينا $|U_n - l| < \xi$

فهذا تعريف مضبوط يقبل رياضيا لأنه لا تدخل فيه أذواقنا ويمكننا صياغته بالرموز المنطقية كالتالي:

$$\forall\ \xi > 0\ ,\ \exists\ n_0 \in N\ ,\ \forall\ n > n_0 : |U_n - l| < \xi$$

أي مهما كانت قيمة المعيار ξ الموجب تماما فيمكننا أن نجد n_0 بحيث من أجل كل الرتب n الأكبر تماما منه المسافة بين U_n و l هي أقل من ξ

يمكننا صياغتها هكذا كذلك

$$\forall\ \xi > 0\ ,\ \exists\ n_0 \in N\ ,\ \forall\ n \in N : n > n_0 \Rightarrow |U_n - l| < \xi$$

وهذا أفضل.

نلاحظ أن n_0 يتعلق بالإبسيلون المختار فكلما أردنا اقترابا أفضل فأخترنا إبسيلون أصغر فسيكون n_0 الذي نحتاجه أكبر.

لذلك الصياغة المفضلة لدي هي:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = l$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall\ \xi > 0\ ,\ \exists\ n(\xi) \in N\ ,\ \forall\ n \in N : n > n(\xi) \Rightarrow |U_n - l| < \xi$$

عندما نتأمل هذا التعريف نلاحظ أنه إذا أخذنا إبسيلونين $\xi_2 > \xi_1$ وكان

$$\exists\ n(\xi_1) \in N\ ,\ \forall\ n \in N : n > n(\xi_1) \Rightarrow |U_n - l| < \xi_1$$



فسنجد كذلك أن

$$\exists\ n(\xi_1) \in N ,\ \forall\ n \in N : n > n(\xi_1) \Rightarrow |U_n - l| < \xi_1 < \xi_2$$

أي أن $n(\xi_1)$

يصلح كذلك ل ξ_2 وهذا يفسر بسهولة أنه إذا اقتربت المتتالية من النهاية بأقل من ξ_1 فستكون أقل من ξ_2

أي بعبارة أخرى الإبسيلون الصغير يغني عن الإبسيلون الكبير فلو كتبنا مثلا الصياغة السابقة كالتالي:

$$\forall\ \xi \in]0,1] ,\ \exists\ n(\xi) \in N ,\ \forall\ n \in N : n > n(\xi) \Rightarrow |U_n - l| < \xi$$

فستصلح كذلك ونجد تعريفا مكافئا للصياغة السابقة.

لنأخذ كمثال المتتالية $V_n = 1/n^2$ ولنحاول أن نبرهن أن:

$$\lim_{\infty} V_n = 0$$

لنأخذ $\xi > 0$ وننظر متى يكون $|V_n - 0| < \xi$ أي:

$$1/n^2 < \xi$$
$$\Leftrightarrow n^2 > \xi$$
$$\Leftrightarrow n > \sqrt{\xi}$$

نحن نحتاج هنا لايجاد $n(\xi)$ وهو طبيعي لكن عندنا $n > \sqrt{\xi}$ فيكفي أن نستعمل دالة الجزء الصحيح لنجد

$$n \geq [\sqrt{\xi}] +1 > \sqrt{\xi}$$

وهكذا يمكننا أن نكتب

$$\forall\ \xi > 0 ,\ \exists\ n(\xi) = ([\sqrt{\xi}] +1) \in N ,\ \forall\ n \in N : n > n(\xi) \Rightarrow |1/n^2 - 0| < \xi$$

فنكون بينا أن

$$\lim_{\infty} V_n = 0$$







حدثني يا أستاذ عن اللوغارتم

اللوغارتم ثورة في الحسابات العددية

بدأت بذور اللوغارتم من ظهور استعمال الدوال الجيبية وإكتشاف علاقاتها.

فقد قام الرياضي محمد بن جابر بن سنان البتاني(240هـ 854م)(306هـ .918 م) باستبدال" الوتر" الذي كان بطليموس يستعمله بـ"الجيب"، وتوصل إلى معادلة جبرية لحساب قيمة الزاوية بمعلومية النسبة بين جيبها وجيب تمامها كما يعد أول من حسب الجداول الرياضية لنظير المماس هو من أوائل العلماء المسلمين الذين استخدموا الرموز في تسهيل العمليات الرياضية.

عمل ابن يونس المصري (342 هـ/ 950م والمتوفى عام 1009م) جداول مثلثية رفيعة المستوى ، و وضع المساواة المثلثية التي تحول جداء التجب إلى المجموع و من هنا كانت البداية (الصورة 1)

إذ لحساب جيوب الزوايا أصبح كافيا تحويل الجمع إلى ضرب و الضرب إلى جمع فبوضع جدول حسابية أمكن استخراج قيم جديدة للجيوب و يعتبر هذا العمل بداية لمفهوم الدالة وتمهيدا للوغارتم.

كان لهذه المساواة كما يذكر سوتر منزلة كبرى قبل اكتشاف اللوغريتمات عند علماء الفَلَك في تحويل العمليات المعقدة لضرب العوامل المقدرة بالكسور الستينية في حساب المثلثات إلى عمليات (جمع)......".

قام العالم جابر بن الأفلح الاشبيلي توفي عام (1150 ميلادية) وضع مساواة مثلثية جديدة لم يسبقه إليها أحد تحول التجب إلى جداء جب و تجب (الصورة 2)

هذه الطريقة في الحساب بقيت مستعملة إلى القرن التاسع عشر، لكنها كانت معقدة الحساب بسبب تحويل الزوايا من النظام السيتيني إلى الراديان.

جاء الحل من طرف ميكائيل ستيفل (1487، 1567) الذي عمل على المتتاليات الهندسية والذي ذهب بعيدا بين ربط عمليات الضرب و القسمة بالجمع والطرح في الرتب.

في القرن السادس عشر ظهرت جداول الفوائد المالية لحساب فوائد الديون والتي تربط بين الأيام وقيمة الدين بفوائده.

في بداية القرن السابع عشر قام جوست بورجي (1552، 1632) بصناعة جدوال تربط بين متتالية هندسية تبدأ من عشرة أس ثمانية و بأساس 1.0001 ملونة بالأسود وأخرى حسابية تبدأ من الصفر و بأساس 10 ملونة بالأحمر، فإذا قسمت القيمة باللون الأسود على عشرة أس ثمانية وجدت قيمة تقابلها بالأحمر فإذا أردنا ضرب عددين أسودين يكفي البحث عن ما يقابلهما بالأحمر ثم جمعه ثم النظر فيما يقابله بالأسود.

كان هذا الجدول بداية القيم الحسابية للوغارتم.

قام العالم نيبر في السنوات 1614، 1616، 1619 بنشر العديد من الأبحاث و التي يعرف فيها اللوغارتم كدالة مستمرة، كانت نظرته للمسألة كنقطتين تتحركان كل منها على محور والمحورين متوازيين، الحركة الأولى متناسبة مع المسافة المتبقية للوصول أما الثانية فثابتة (الصورة 5)



فوضع نيبر علاقة بين المسافة المتبقية في المحور الأول مع المسافة المقطوعة في المحور الثاني سماها اللوغارتم ثم صنع لها جداول كما فعل بورجي مستندا إلى الكتابة العشرية للأعداد.

هذه الجداول أحدثت ثورة في عالم الحسابات، إذ في زمانهم لم تكن هناك آلة حاسبة و جميع الحسابات تحسب باليد.

لكن بواسطة اللوغارتم أصبح ضرب القيم الكبيرة سهلا إذ يكفي النظر الى الجدول لمعرفة ما يوافق العددين باللوغارتم ثم جمع لوغارتميهما والجمع سهل ثم النظر في الجدول لما يوافق الجمع.

في الحقيقة لم يكن العلماء وقتها و خاصة الفيزيائيين بحاجة إلى قيم مضبوطة فالقيم التقريبية كانت كافية لحساب الحركات الفيزيائية.

إستمر إستعمال هذه الجداول إلى مطلع القرن العشرين.

وبما أنها الرياضيات، فكل فكرة تثمر أفكار أخرى إذ أكتشف للوغارتم استعمالات أخرى في مجالات عديدة من الرياضيات....

يتبع .... استعمالات اللوغارتم و ظهور الدالة الأسية.

مراجع

https://www.alukah.net/library/0/48388/

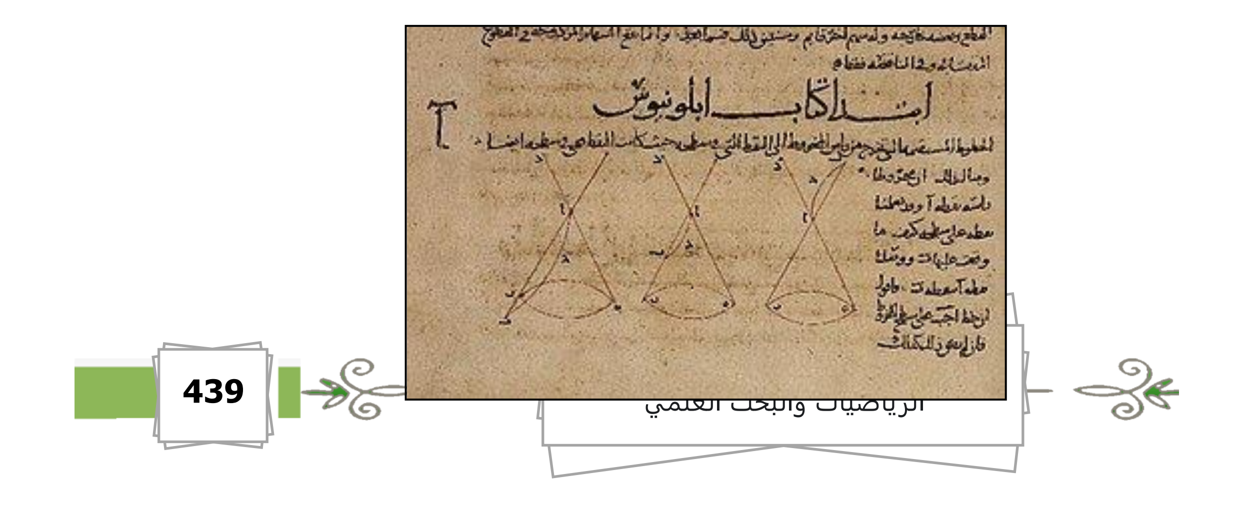
https://fr.wikipedia.org/.../Histoire_des_logarithmes_et...

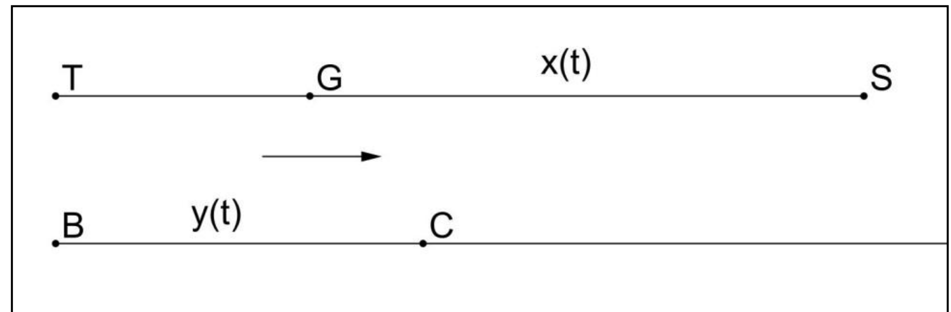
جتا أ × جتا ب = $\frac{1}{2}$ [جتا(أ + ب) + جتا(أ − ب)]

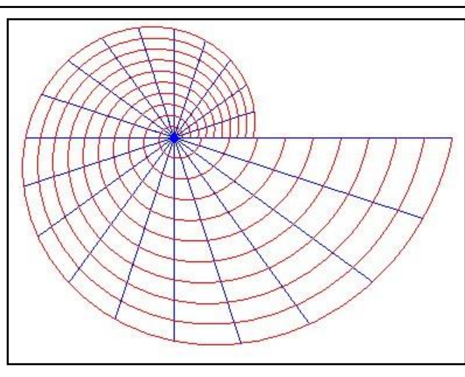
جتا ١ = جتا أَ × جا ب

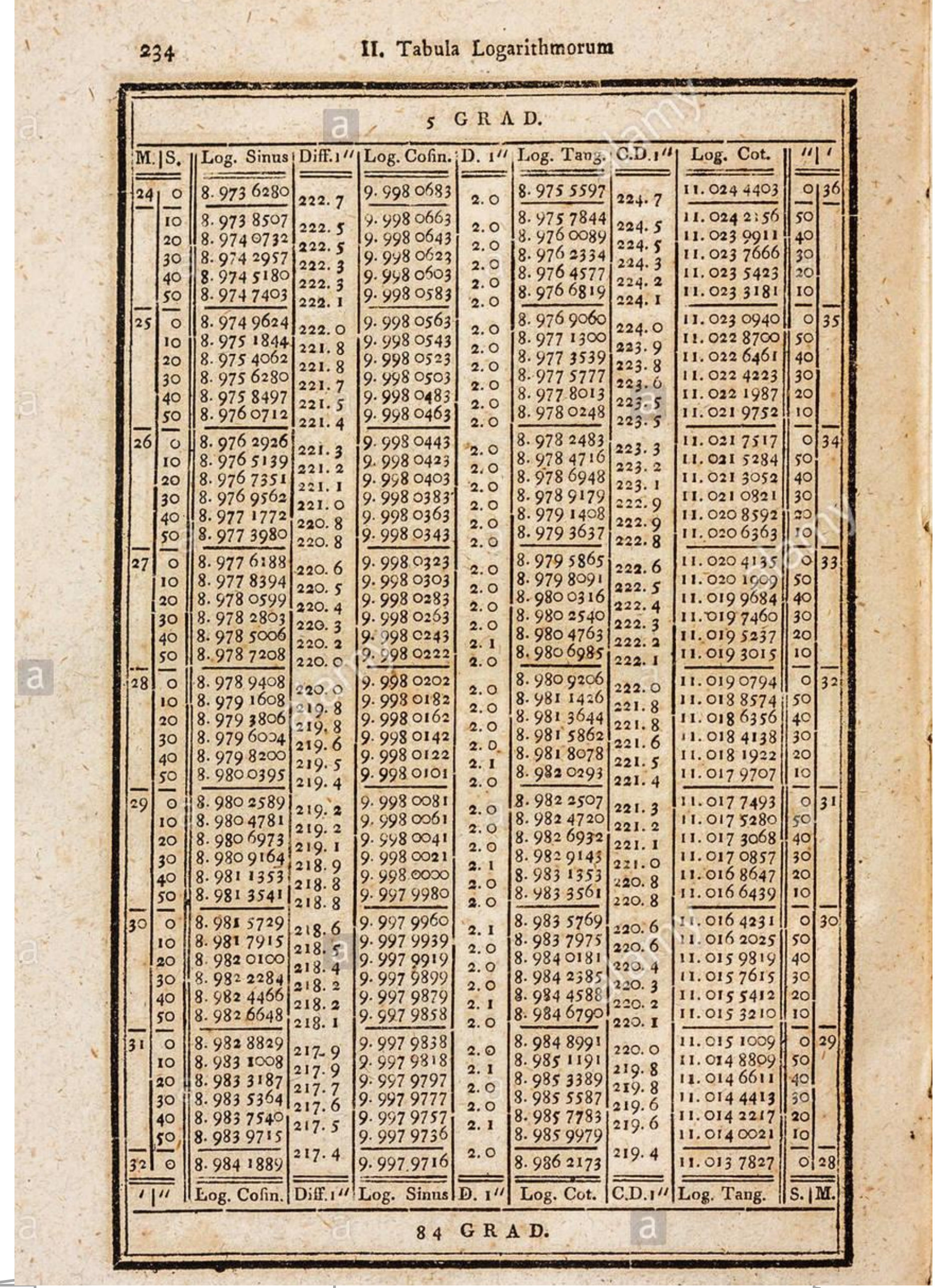


Vieille règle logarithmique pour des calculs arithmétiques d'isolement sur un fond blanc Fabriqué en URSS







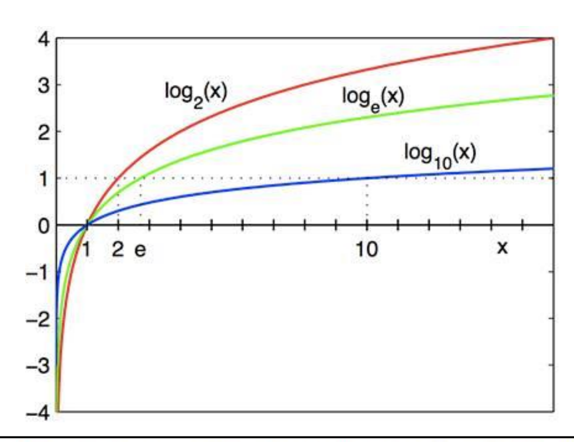


234 **II. Tabula Logarithmorum**

5 GRAD.

M.	S.	Log. Sinus	Diff. 1''	Log. Cosin.	D. 1''	Log. Tang.	C.D. 1''	Log. Cot.	''	'
24	0	8.973 6280	222.7	9.998 0683	2.0	8.975 5597	224.7	11.024 4403	0	36
	10	8.973 8507	222.5	9.998 0663	2.0	8.975 7844	224.5	11.024 2156	50	
	20	8.974 0732	222.5	9.998 0643	2.0	8.976 0089	224.5	11.023 9911	40	
	30	8.974 2957	222.3	9.998 0623	2.0	8.976 2334	224.3	11.023 7666	30	
	40	8.974 5180	222.3	9.998 0603	2.0	8.976 4577	224.2	11.023 5423	20	
	50	8.974 7403	222.1	9.998 0583	2.0	8.976 6819	224.1	11.023 3181	10	
25	0	8.974 9624	222.0	9.998 0563	2.0	8.976 9060	224.0	11.023 0940	0	35
	10	8.975 1844	221.8	9.998 0543	2.0	8.977 1300	223.9	11.022 8700	50	
	20	8.975 4062	221.8	9.998 0523	2.0	8.977 3539	223.8	11.022 6461	40	
	30	8.975 6280	221.7	9.998 0503	2.0	8.977 5777	223.6	11.022 4223	30	
	40	8.975 8497	221.5	9.998 0483	2.0	8.977 8013	223.5	11.022 1987	20	
	50	8.976 0712	221.4	9.998 0463	2.0	8.978 0248	223.5	11.021 9752	10	
26	0	8.976 2926	221.3	9.998 0443	2.0	8.978 2483	223.3	11.021 7517	0	34
	10	8.976 5139	221.2	9.998 0423	2.0	8.978 4716	223.2	11.021 5284	50	
	20	8.976 7351	221.1	9.998 0403	2.0	8.978 6948	223.1	11.021 3052	40	
	30	8.976 9562	221.0	9.998 0383	2.0	8.978 9179	222.9	11.021 0821	30	
	40	8.977 1772	220.8	9.998 0363	2.0	8.979 1408	222.9	11.020 8592	20	
	50	8.977 3980	220.8	9.998 0343	2.0	8.979 3637	222.8	11.020 6363	10	
27	0	8.977 6188	220.6	9.998 0323	2.0	8.979 5865	222.6	11.020 4135	0	33
	10	8.977 8394	220.5	9.998 0303	2.0	8.979 8091	222.5	11.020 1909	50	
	20	8.978 0599	220.4	9.998 0283	2.0	8.980 0316	222.4	11.019 9684	40	
	30	8.978 2803	220.3	9.998 0263	2.0	8.980 2540	222.3	11.019 7460	30	
	40	8.978 5006	220.2	9.998 0243	2.1	8.980 4763	222.2	11.019 5237	20	
	50	8.978 7208	220.0	9.998 0222	2.0	8.980 6985	222.1	11.019 3015	10	
28	0	8.978 9408	220.0	9.998 0202	2.0	8.980 9206	222.0	11.019 0794	0	32
	10	8.979 1608	219.8	9.998 0182	2.0	8.981 1426	221.8	11.018 8574	50	
	20	8.979 3806	219.8	9.998 0162	2.0	8.981 3644	221.8	11.018 6356	40	
	30	8.979 6004	219.6	9.998 0142	2.0	8.981 5862	221.6	11.018 4138	30	
	40	8.979 8200	219.5	9.998 0122	2.1	8.981 8078	221.5	11.018 1922	20	
	50	8.980 0395	219.4	9.998 0101	2.0	8.982 0293	221.4	11.017 9707	10	
29	0	8.980 2589	219.2	9.998 0081	2.0	8.982 2507	221.3	11.017 7493	0	31
	10	8.980 4781	219.2	9.998 0061	2.0	8.982 4720	221.2	11.017 5280	50	
	20	8.980 6973	219.1	9.998 0041	2.0	8.982 6932	221.1	11.017 3068	40	
	30	8.980 9164	218.9	9.998 0021	2.1	8.982 9143	221.0	11.017 0857	30	
	40	8.981 1353	218.8	9.998 0000	2.0	8.983 1353	220.8	11.016 8647	20	
	50	8.981 3541	218.8	9.997 9980	2.0	8.983 3561	220.8	11.016 6439	10	
30	0	8.981 5729	218.6	9.997 9960	2.1	8.983 5769	220.6	11.016 4231	0	30
	10	8.981 7915	218.5	9.997 9939	2.0	8.983 7975	220.6	11.016 2025	50	
	20	8.982 0100	218.4	9.997 9919	2.0	8.984 0181	220.4	11.015 9819	40	
	30	8.982 2284	218.2	9.997 9899	2.0	8.984 2385	220.3	11.015 7615	30	
	40	8.982 4466	218.2	9.997 9879	2.1	8.984 4588	220.2	11.015 5412	20	
	50	8.982 6648	218.1	9.997 9858	2.0	8.984 6790	220.1	11.015 3210	10	
31	0	8.982 8829	217.9	9.997 9838	2.0	8.984 8991	220.0	11.015 1009	0	29
	10	8.983 1008	217.9	9.997 9818	2.1	8.985 1191	219.8	11.014 8809	50	
	20	8.983 3187	217.7	9.997 9797	2.0	8.985 3389	219.8	11.014 6611	40	
	30	8.983 5364	217.6	9.997 9777	2.0	8.985 5587	219.6	11.014 4413	30	
	40	8.983 7540	217.5	9.997 9757	2.1	8.985 7783	219.6	11.014 2217	20	
	50	8.983 9715	217.4	9.997 9736	2.0	8.985 9979	219.4	11.014 0021	10	
32	0	8.984 1889		9.997 9716		8.986 2173		11.013 7827	0	28
'	''	Log. Cosin.	Diff. 1''	Log. Sinus	D. 1''	Log. Cot.	C.D. 1''	Log. Tang.	S.	M.

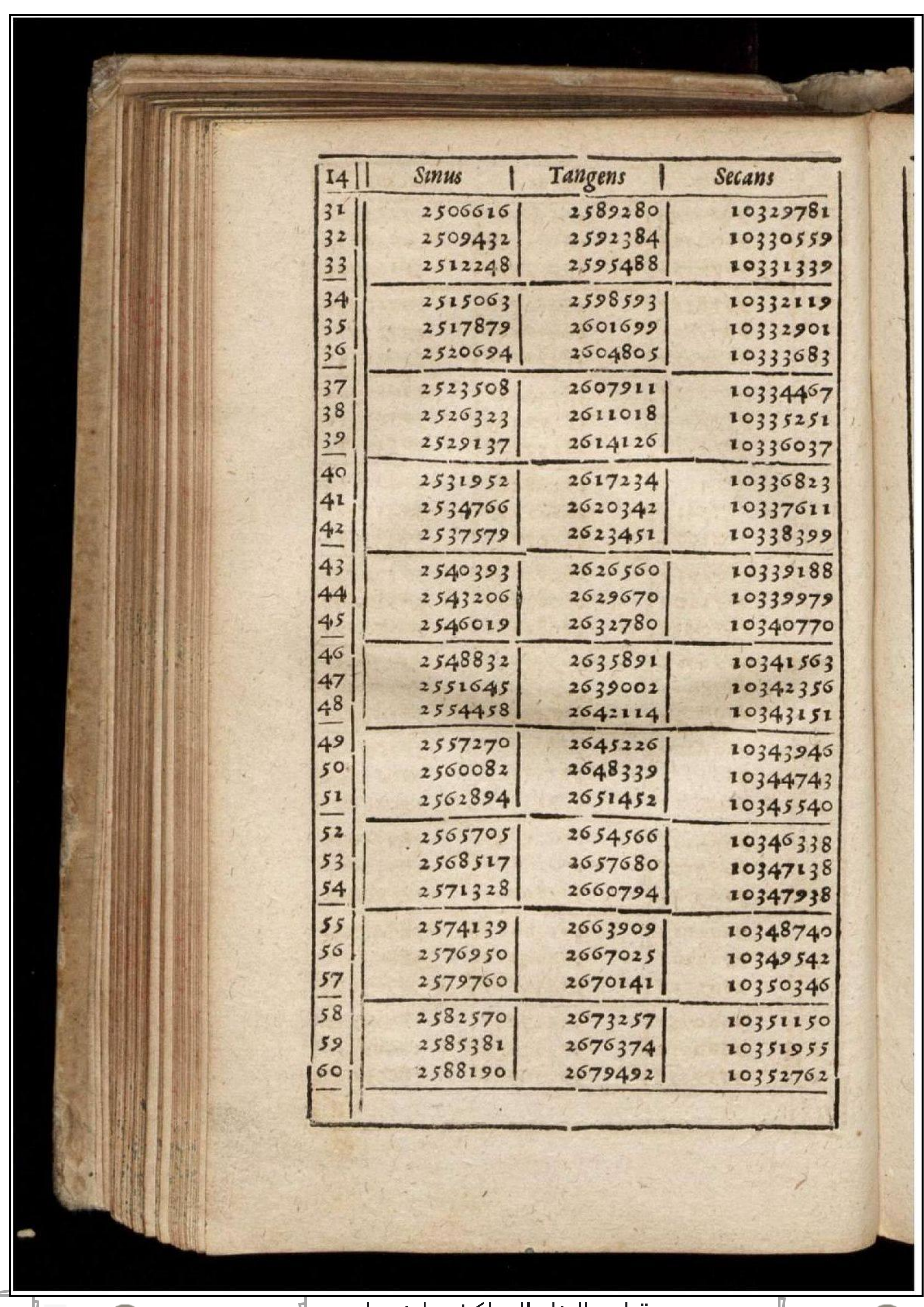
84 GRAD.



La naissance des tables logarithmiques est le fruit de plusieurs circonstances. Les calculs astronomiques qui se développent au cours du XVIe siècle poussent les mathématiciens à chercher des outils facilitant les calculs de produits et de quotients. Le premier de ces outils est trouvé dans le domaine dans lequel ces calculs sont nécessaires c'est-à-dire le domaine de l'astronomie et de la trigonométrie. Les tables trigonométriques existent depuis plusieurs siècles et, déjà au XIe siècle, l'astronome ibn Yunus les utilise pour réaliser des calculs[1]. La méthode de prosthaphérèse (en) consiste à utiliser les propriétés trigonométriques suivantes[note 1] :

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \quad \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)].$$

Ainsi pour effectuer le produit de deux nombres A et B, il suffit de trouver dans une table trigonométrique les deux nombres *a* et *b* dont les cosinus valent A et B, de calculer la somme *a* + *b* et la différence *a* – *b*, de rechercher dans une table trigonométrique cos(*a* + *b*) et cos(*a* – *b*) et d'en calculer la demi-somme.



14	*Sinus*	*Tangens*	*Secans*
31	2506616	2589280	10329781
32	2509432	2592384	10330559
33	2512248	2595488	10331339
34	2515063	2598593	10332119
35	2517879	2601699	10332901
36	2520694	2604805	10333683
37	2523508	2607911	10334467
38	2526323	2611018	10335251
39	2529137	2614126	10336037
40	2531952	2617234	10336823
41	2534766	2620342	10337611
42	2537579	2623451	10338399
43	2540393	2626560	10339188
44	2543206	2629670	10339979
45	2546019	2632780	10340770
46	2548832	2635891	10341563
47	2551645	2639002	10342356
48	2554458	2642114	10343151
49	2557270	2645226	10343946
50	2560082	2648339	10344743
51	2562894	2651452	10345540
52	2565705	2654566	10346338
53	2568517	2657680	10347138
54	2571328	2660794	10347938
55	2574139	2663909	10348740
56	2576950	2667025	10349542
57	2579760	2670141	10350346
58	2582570	2673257	10351150
59	2585381	2676374	10351955
60	2588190	2679492	10352762

هناك ثلاث طرق لتعريف الدالة اللوغارتمية:

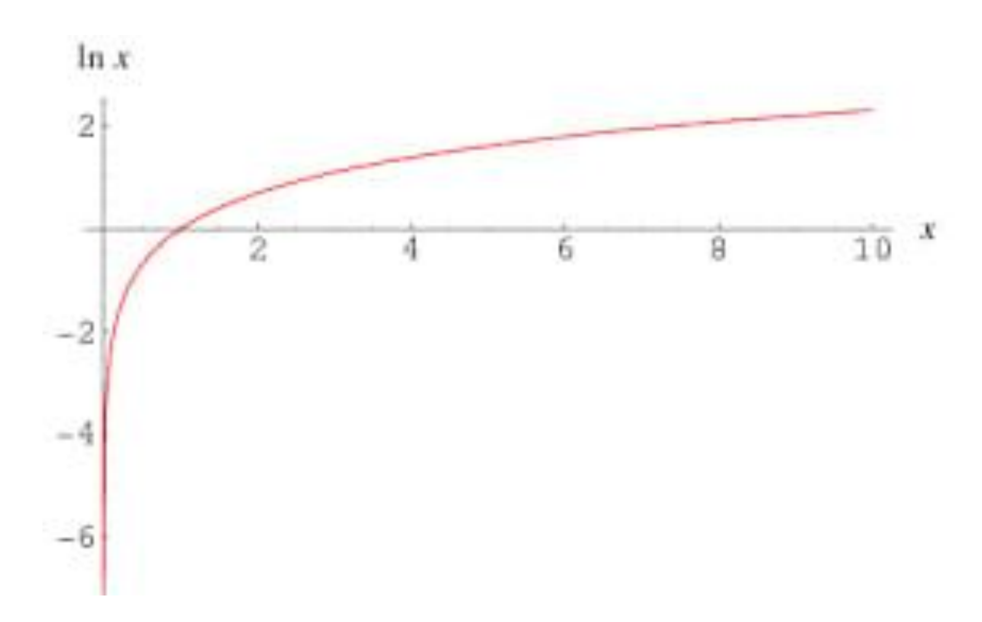
إنطلاقا من الدالة الأصلية لمقلوب المتغير فنستعمل التكامل إنطلاقا من الواحد وتفسر الدالة اللوغارتمية بكونها المساحة تحت منحنى الدالة إنطلاقا من الواحد.

من الدالة العكسية للأسية.

عن طريق البحث عن دالة تحول صورة الجداء إلى جمع الصورتين.

$$f(a\times b)=f(a)+f(b)$$

كل هذه الطرق تحتاج لمكتسبات سابقة لتشرح للتلميذ ويمكن المزج بين أكثر من طريقة فمثلا إنطلاقا من الطريقة الأخيرة إذا فرضنا قابلية إشتقاق الدالة سنصل إلى أن مشتقها هو جداء ثابت في مقلوب المتغير مما يخول إعادة تعريفها من التكامل ولعلها أسهل الطرق إذا مزجت بأمثلة وأوسعها فائدة لتطبيقها للعديد من المكتسبات السابقة للتلميذ.



برهان نهاية نحو الأسية دون استعمال اللوغارتم

عبد الحكيم بن شعبانة

برهان تساوي نهاية متتالية نحو الدالة الأسية بدون لوغارتم

$\forall x \in \mathbb{R}:$

$$U_n = (1+\tfrac{x}{n})^n, S_n = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!}x^k \qquad \boxed{\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{x}{n})^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\tfrac{1}{k!}x^k = e^x}$$

السلسة S_n متقاربة مطلقا على $\mathbb{R}$ بتطبيق قاعدة ألمبير $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = 0$

في هذه الصفحة سنعرف الدالة الأسية بهذه السلسة $\forall x \in \mathbb{R}: \quad e^x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k$

سنبرهن أن $\boxed{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k}$

بتطبيق علاقة نيوتن لذي الحدين

$\forall x \in \mathbb{R}:$

$$U_n = (1+\tfrac{x}{n})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n!}{(n-k)!n^k}x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\underline{\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\dots\frac{(n-k+1)}{n}}x^k$$

$\forall n > n_0 \in \mathbb{N}:$

$$|S_n - U_n| = |\sum_{k=0}^{n}\tfrac{1}{k!}x^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} = |\sum_{k=0}^{n}\tfrac{1}{k!}(1-\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k})x^k|$$

$$\le |\sum_{k=0}^{n_0}\tfrac{1}{k!}(1-\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k})x^k| + |\sum_{k=n_0+1}^{n}\tfrac{1}{k!}(1-\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k})x^k|$$

$$\le |\sum_{k=0}^{n_0}\tfrac{1}{k!}(1-\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k})x^k| + |\sum_{k=n_0+1}^{n}\tfrac{1}{k!}x^k|$$

$$+ |\sum_{k=n_0+1}^{n}\tfrac{1}{k!}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}x^k|$$

$$\le |\sum_{k=0}^{n_0}\tfrac{1}{k!}(1-\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k})x^k| + 2\sum_{k=n_0+1}^{n}\tfrac{1}{k!}|x^k|$$

$$\Longrightarrow \limsup_{n\to\infty}|S_n - U_n| \le \limsup_{n\to\infty}|\sum_{k=0}^{n_0}\tfrac{1}{k!}(1-\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k})x^k|$$

$$+2\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=n_0+1}^{n}\tfrac{1}{k!}|x^k|$$

$$\Longrightarrow \limsup_{n\to\infty}|S_n - U_n| \le 0 + 2\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=n_0+1}^{n}\tfrac{1}{k!}|x^k|$$

$$\Longrightarrow \boxed{\limsup_{n\to\infty}|S_n - U_n| \le 2\limsup_{n_0\to\infty}(\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=n_0+1}^{n}\tfrac{1}{k!}|x^k|) = 0}$$

الدالة الأسية بين الترميز والحسابات الجبرية

من فترة لأخرى يطرح أحدهم في المجموعة نفس السؤال

برهن أن $Exp(x) = e^x$

الحقيقة أن طرح مثل هذا السؤال يوحي بخلط في المفاهيم إذ كل من طرفي المساواة مجرد ترميز لنفس الشيء قيمة الدالة الأسية عند x لكن المشكل يكمن في أن البعض يظن أن e^x مجرد عملية جبرية متعلقة بالجداء والقسمة والجذر النوني مثلها مثل 2^3 وهذا غير صحيح فإن كانت $2^3 = 2\times2\times2$ فإن e^{pi} لا يمكن اعطاؤه مفهوما جبريا بل هو ترميز واحد غير مركب من عمليات جبرية.

للدالة الاسية خمس تعريفات كلها متكافئة

تعريف ينطلق من الدالة العكسية للدالة اللوغارتمية بشرط تعريف اللوغارتمة كدالة أصلية لمقلوب x والتي تنعدم عند 1

تعريف ينطلق من نهاية سلسلة النشر المحدود $x^n/n!$

تعريف ينطلق من نهاية متتالية $(1+x/n)^n$

تعريف ينطلق من حل معادلة تفاضلية $y'=y$, $y(0)=1$

تعريف ينطلق من خاصية تحويل الجمع لضرب بدالة مستمرة $f(x+y)=f(x) . f(y)$, $f(1) =e$

فالسؤال الصحيح هل هذه التعاريف متكافئة أما كل سؤال من نوع هل $EXP(x) = e^x$ فلا معنى له.



علاقة أولر : الأسية بين المفهوم الجبري للعدد i والمفهوم التحليلي للعددπ

علاقة أولر الشهيرة تربط بين ثلاث أعداد مشهورة: i ، e، π

$$e^{i\pi}+1=0$$

لكن كيف نفسر هذه العلاقة ؟

تفسير هذه العلاقة يرجع لطبيعة هذه الأعداد فالعدد i عدد جبري متعلق بقوى دورية النتيجة

$i^1=i$

$i^2=-1$

$i^3=-i$

$i^4=1$

$i^5=i$

و العدد pi تحليلي متعلق بالدوران وجمع الزوايا

أما العدد e فيجمع بين هذه الخواص كلها فهو جبري من حيث مشاكلته للزمرة الجمعية الحقيقية $(R,+)$

والزمرة الضربية$(R_+^*, *)$ يحول الجمع إلى ضرب

و تحليلي لانه نهاية سلسة تربط بين الجمع والضرب

فكل هذه الخواص ناسبت أن يجمع بين القوى الجبرية وتحويل الجمع إلى ضرب تحليليا.

فعلاقة أولر ما هي إلا إظهار لخواص الدالة الأسية الجبرية والتحليلية وتحويلها الجمع للضرب.


Leonhard Euler

الدالة الأسية : تعميم تحليلي لخاصية جبرية.

للدالة الأسية تعريفات كثيرة، لعل أفضلها عندي هو تعريفها بخاصيتيها الجبرية والتحليلية وهي التماثل التفاضلي بين الزمرة الجمعية $(R,+)$ والزمرة الضربية $(R^{+*} , *)$

أي هي الدالة الحقيقية غير التافهة القابلة للإشتقاق والتي تحقق الخاصية $f(x+y) = f(x).f(y)$

هذا التعريف يبين أن الدالة الأسية تجمع بين البنية الجبرية والبنية التحليلية بل هي ظاهرة تحليلية للحقل الحقيقي الجبري R .

الدالة الأسية تمثل تعميما تحليليا لخاصية القوة الجبرية لكنها نفسها ليست معرفة كقوة كما يظن البعض فالترميز e^x

مجرد ترميز معرف بطريقة تحليلية كما سبق ذكره ولا يمثل رفع قوة بـ x للعدد e ذلك أن هذا غير ممكن جبريا فخاصية القوة المعرفة جبريا تتوقف عند القوى الناطقة وأي مرور للقوى الحقيقية يتطلب استعمال النهايات.

كون الدالة الأسية تعميم لخاصية القوة الجبرية جعلها تحافظ على الكثير من خصائصه كتحويل الجمع للضرب و قوتها مقابل كثيرات الحدود في جوار زائد مالانهاية.

لرؤية الخاصية الأخيرة سنلجأ لتأمل نظيرة الدالة الأسية في المتتاليات وهي المتتالية الهندسية.

فلو أخذنا عددا حقيقيا A أكبر من 1

$$A > 1$$

ونظرنا لمجموع متتاليته الهندسية من 0 إلى n فسنجد

$$1 + A^0 + ... + A^{(n-1)} = (A^n - 1)/(A - 1)$$

فنلاحظ من هذه الصيغة وكأن القوة n تعادل مجموع القوى التي قبلها.

وبما أننا نعلم أن

$$A^k > 1 , k > 0$$

فسنستنتج أنه من أجل n أكبر من 1:

$$(A^n - 1)/(A - 1) = 1 + A^0 + ... + A^{(n-1)} > 1 + 1 + ... + 1 = n$$

ومنه

$$A^n > (A-1)\, n + 1$$

فنلاحظ أن المتتالية الهندسية أكبر من كثير حدود من الدرجة الأولي نرمز له بـ P_1

$$A^n > P_1(n)$$

لو رفعنا الطرفين لقوة طبيعية غير معدومة m فسنجد

$$A^{(m\, n)} > (P_1(n))^m = P_m(n)$$

فالطرف الأيمن يمكن اعتباره كثير حدود من الدرجة m نرمز له بـ P_m

يكفي هنا اعتبار $n\, m$ كمتغير جديد ولنسمه k لنجد $A^k > P_m(k/m)$



فنستنتج أن الطرف الأيمن يبقى كثير حدود من الدرجة m يمكننا أن نرمز له بـ G_m

$$A^k > G_m(k)$$

فالنتيجة التي نلاحظها هنا أن هذه المتتالية الهندسية أقوى من أي كثير حدود.

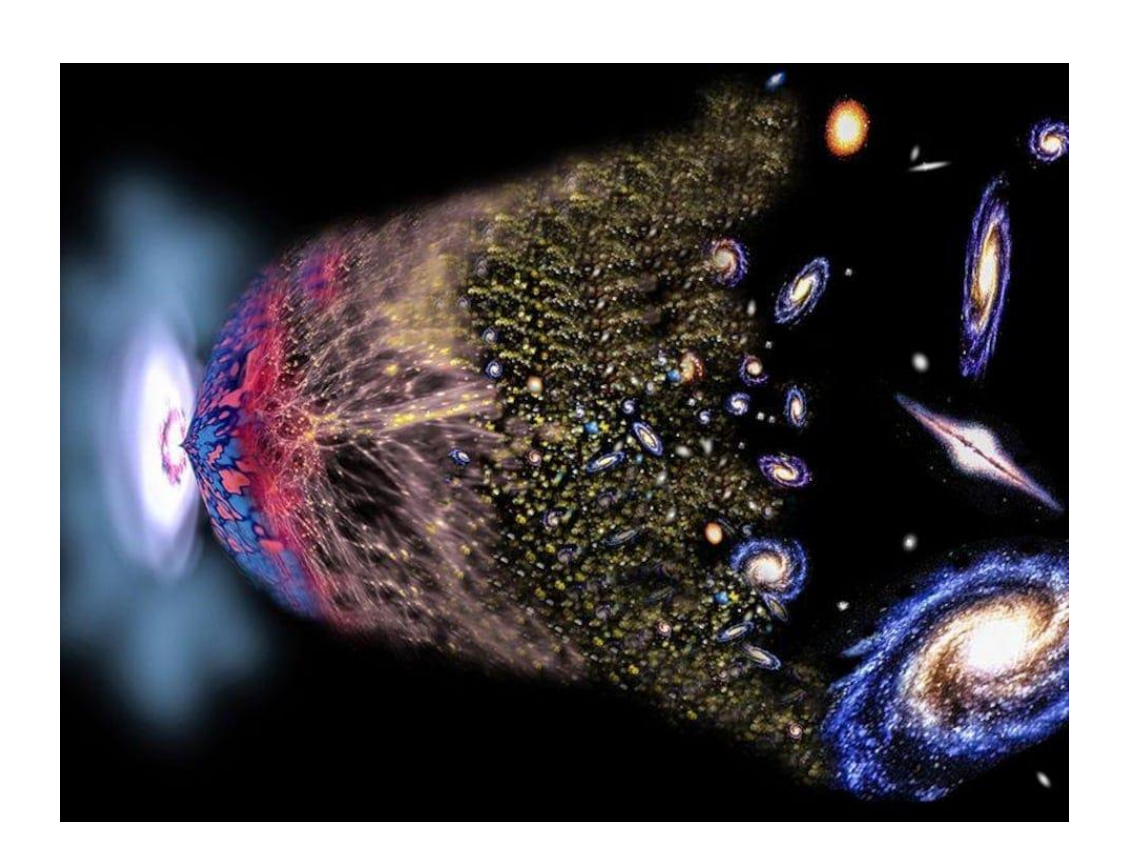
فقوة الدالة الأسية نتيجة لخصائصها الجبرية بل يمكن اعتبارها كتعميم تحليل للمتتالية الهندسية وهذا ملاحظ في النهاية $\lim (1+x/n)^n = e^x$

فالدالة الأسية نتيجة لتوازن الجمع مع الضرب فهي تحويل جبري لعملية الجمع نحو الضرب لكنه قابل للإشتقاق.

هذا التوازن نلاحظه كذلك من تعريف الأسية بواسطة النشر

$$e^x = 1 + x^1/1! + \dots + x^n/n! + \dots$$

وهذا الذي يجعلنا قادرين على تعميم تعريف الدالة الأسية في الجبر الباناخي لوجود الحقل بعمليتيه ووجود تعريف للسلاسل العددية.



الدوال الليبشيتزية والدوال القابلة للإشتقاق.

الدوال الليبشيتزية هي دوال معرفة على فضاء نظيمي وتحقق متراجحة من نوع

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$$

حيث k عدد حقيقي موجب.

كما نلاحظ هي دوال يمكن مقارنة تغيرها بتغير متغيرها ويمكن تعميم التعريف للفضاء المتري بتعويض النظيم بالمسافة.

ونطلق على دالة تحقق هذه المتراجحة بدالة k ليبشيتزية.

الذي نعرفه أن في مجموعة الأعداد الحقيقية الدوال القابلة للإشتقاق على مجال مع مشتقة محدودة هي ليبشيتزية وهذا نتيجة مباشرة لمبرهنة التزايدات المنتهية: $f(x) - f(y) = (x - y) f'(c)$

يبقى شرط الإشتقاق مع المحدودية أقوي من كون الدالة ليبشيتزية لكن كمبرهنة كل دالة حقيقية ليبشيتزية هي قابلة للإشتقاق حيثما كان بمفهوم قياس لوبيغ.

الدالة الليبشيتزية مستمرة بإنتظام كما هو ظاهر من المتراجحة.

لكن السؤال المطروح لماذا كل هذا الإهتمام بالدوال الليبشيتزية ؟

الجواب على ذلك يكمن في أن التحليل يحاول دراسة الدوال بالنسبة لمتغيرها وأسهل طريقة لذلك تكون عبر كتابة الدالة بواسطة صيغة جبرية للمتغير ككثيرات الحدود مثلا.

لكن هذا غير متوفر دائما مما يدفعنا إلى تقريب الدوال من صيغ جبرية كما هو الحاصل مع النشر المحدود.

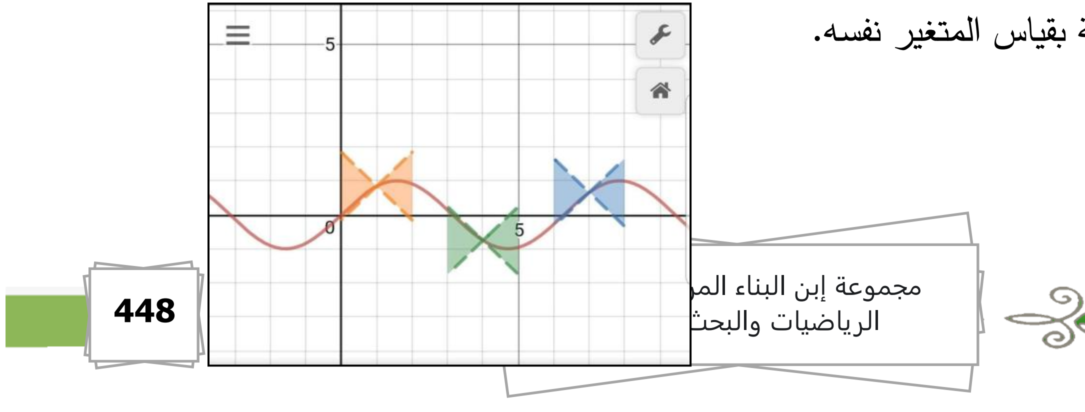
لكن النشر المحدود يتطلب قابلية للإشتقاق لعدة مراتب مما يجعله شرطا قويا جدا يقصي الكثير من الدوال.

كطريقة للتخفيف من هذا شرط هي المقارنة عبر علاقة الترتيب وهذا الذي تقوم به الدوال الليبشيتزية فهي لا تطلب قابلية للإشتقاق لكن مجرد مقارنة تغير الدالة بتغير متغيرها كاف $\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$

هذه الخاصية كافية لتحقيق الكثير من المبرهنات كمبرهنة النقطة الصامدة للدوال المتقلصة وهي

دوال k ليبشيتزية مع k أصغر من 1 . من الناحية الهندسة إذا أخذنا الدوال الحقيقية الليبشيتزية محليا فالمتراجحة تعني محدودية منحنى الدالة داخل مثلثين متناظرين كما هو ممثل في المنحنى.

كخلاصة لا بد أن يفهم طالب الرياضيات أن كل هذه التعريفات تهدف لمقارنة الدوال بالمتغير وذلك للتنبؤ بتغير الدالة عن طريق معرفة تغير متغيرها. على الواقع المتغير عادة قياسي كالزمن والمسافة والكتلة وهذا القياس يعتبر كمرجع للمراقب فأي حادثة لا تحدث إلا بتغير قياسي لذلك يحاول ربط نتيجة التغير القياسي المشاهدة في الدالة بقياس المتغير نفسه.



التفسير الهندسي للدالة الليبشيتزية

لو تأملنا متراجحة الدالة الليبشيتزية لوجدنا أن القيمة المطلقة لقسمة فرق قيمتي الدالة على فرق قيمتي المتغير أقل من عدد موجب وهذا يمثل ميل مستقيم.

فيمكننا حصر منحنى الدالة الليبشيتزية داخل مثلث ميل ضلعه الثابت الليبشيتزي بالموجب او بالناقص ، في الصورة الأولى مثال بميل موجب لدالة الجذر التربيعي وفي الثانية الدالة الجيبية بمثلثات بميل موجب وميل سالب.

هذا المثلث يمكننا جعله يسير على منحنى الدالة فنلاحظ أن المنحنى لا يخترقه من ضلعه المائل.

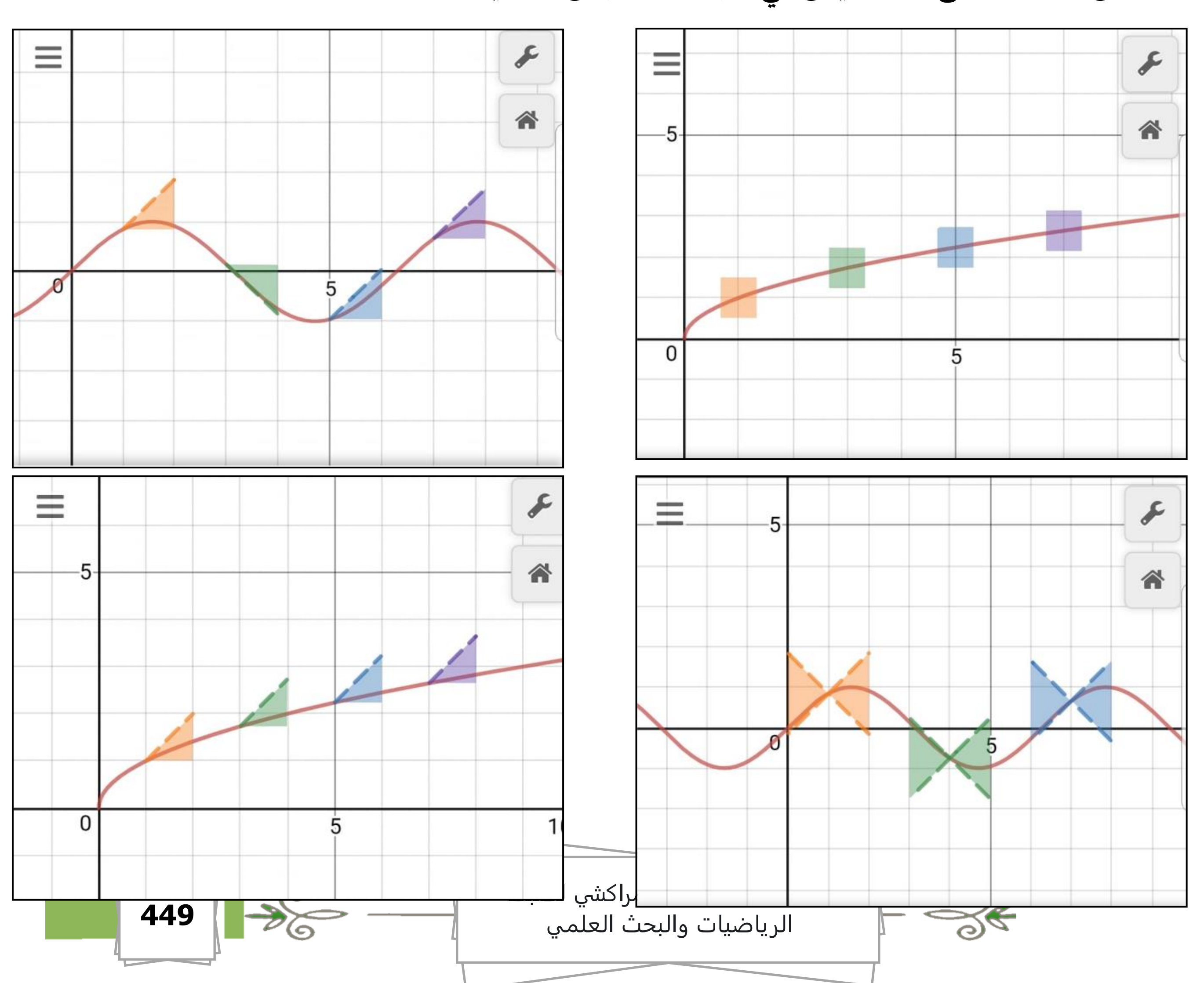
فمتحنى الدالة داخل مثلث راسه من المنحنى والمنحنى لا يتجاوزه من ضلعه الاعلى او الاسفل.

يمكن تعويض المثلثات بمخروطين كما في الصورة إذا أردنا أخذ بعين الإعتبار الحالات الموجبة و السالبة في جميع الإتجاهات كما في الصورة الثالثة.

لو قارنا هذا الشكل البياني مع الاستمرار المنتظم فنجد أن الإستمرار المنتظم يفسر هندسيا بمستطيل لا يتجاوزه المنحنى كما في الصورة الرابعة.

وهذا يبين أن الدالة الليبشيتزية مستمرة بإنتظام اذ يمكن وضع المثلث أو المخروطين داخل مستطيل.

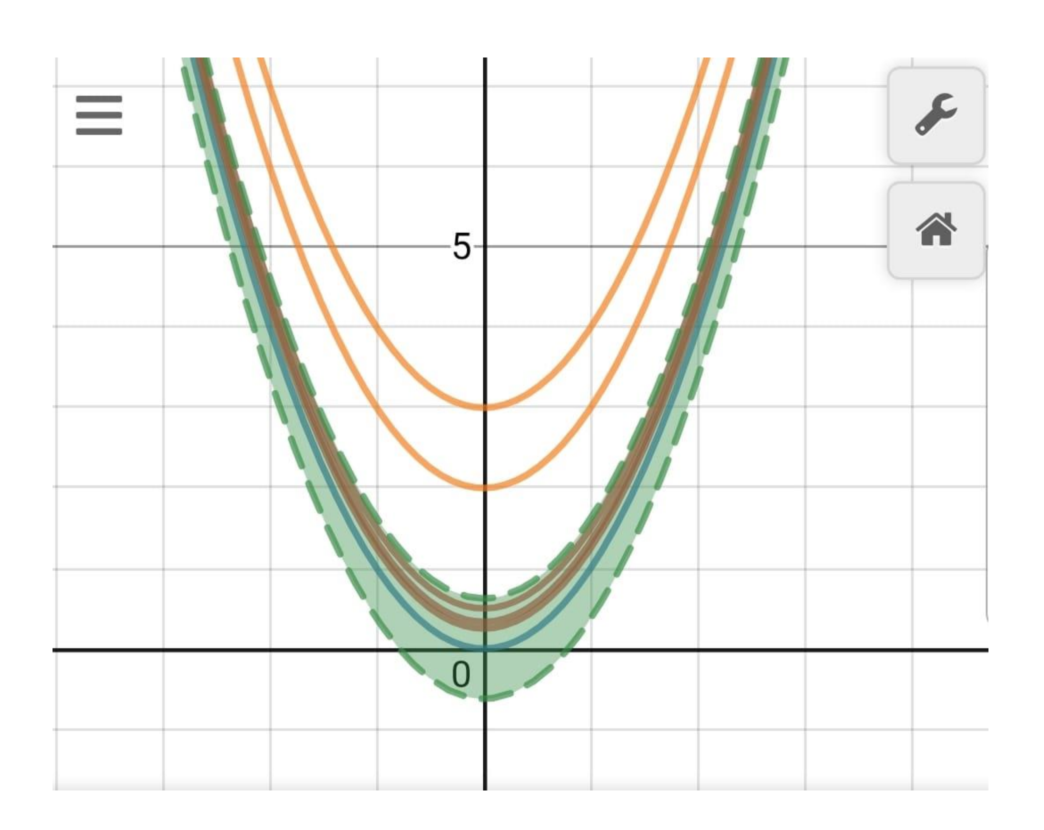
إذن كل من منحنى الدالة الليبشيتزية ومنحنى الدالة المستمرة بانتظام يمكن حصره في شكل هندسي في أي نقطة من نقاط المنحنى فالخاصيتان في النهاية متشابهتان هندسيا.



تفسير التقارب المنتظم هندسيا

يختلف التقارب المنتظم عن التقارب البسيط في اننا نطلب أن تتقارب متتالية الدوال عند كل نقطة بنفس الوتيرة أي يمكننا اختيار من اجل كل ابسيلون رتبة معينة للمتتالية لا تتعلق بالمتغير في شرط تقارب النهاية أي كل جميع حدود متتالية الدوال بعدها تقترب من الدالة بمسافة أقل من الابسيلون عند كل نقطة.

هندسيا يعنى ذلك انه من اجل كل ارتفاع ابسيلون اذا رسمنا شريطا مركزه نقاط منحنى الدالة بهذا الارتفاع فسنجد داخله جميع المنحنيات ماعدا عددا منتهيا منها والصورة توضح ذلك.



التفسير الهندسي للإستمرار المنتظم

يختلف الإستمرار المنتظم عن مجرد الإستمرار بانه نشترط أن نصف قطر مجال كل نقطة الذي يحقق تعريف الإستمرار أي صورته في جوار قيمة الدالة ان لا يتعلق بالنقطة اي كل النقاط لها جوارات بنفس الطول.

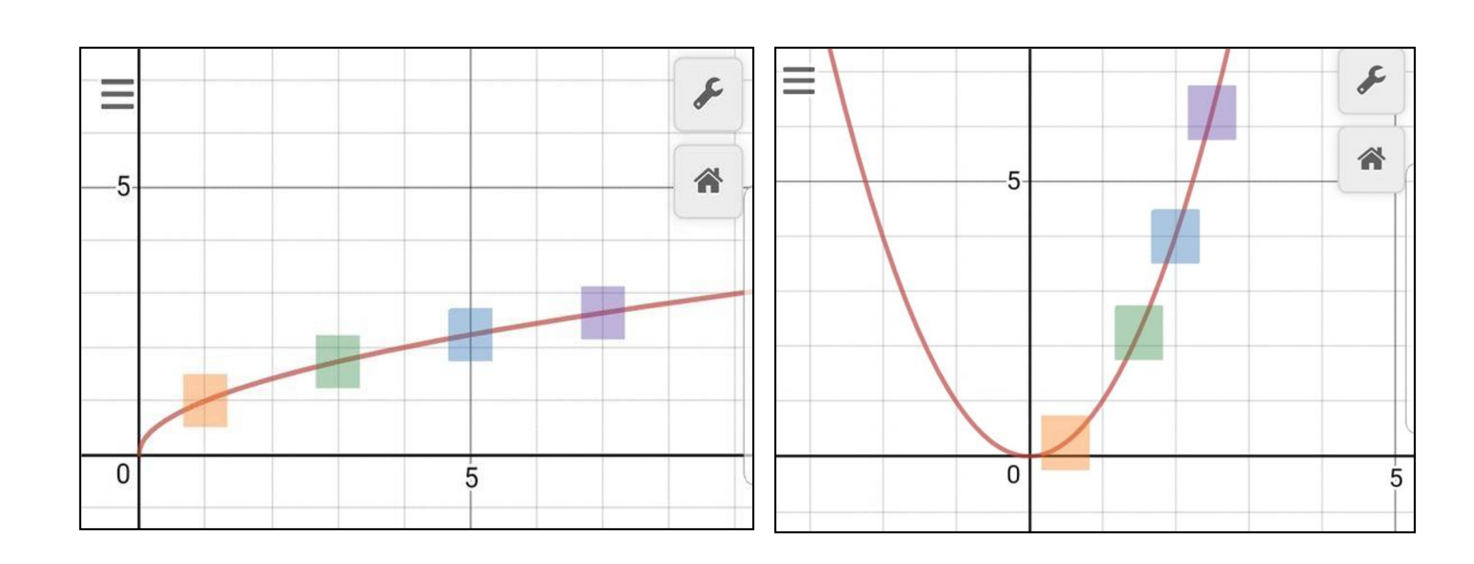
هندسيا يعني ذلك أنه إذا اخترنا اي ارتفاع والذي يمثل الإبسيلون فيمكننا ايجاد مستطيل بهذا الارتفاع بحيث عندما يتحرك على منحنى الدالة فالدالة لا تتجاوزه عموديا أي لا تخترق المستطيل عموديا إنما تقطعه أفقيا.

في الصورة الاولى نلاحظ أن الدالة الجذر التربيعي لا تتجاوز المستطيلات عموديا.

أما الصورة الثانية فهي الدالة التربيعية ففي البداية الدالة لا تتجاوز المستطيل عموديا لكن عندما تذهب للمالانهاية نرى المنحنى يتصاعد رويدا رويدا ليخترق المستطيل عموديا

Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques. Une application $f : E \to F$ est dite uniformément continue si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x,y) \in E \times E \quad (d(x,y) \leq \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon).$$



بن شعبانة عبد الحكيم

ولادة الحساب التفاضلي

صفحة 1

ضبط الرياضيات و تعريف النهايات بالإبسيلون كما نراه اليوم استغرق قرنين من الزمن للنضوج

قصة الحساب التفاضلى بدأت بأرخميدس حيث إسعمل طريقة تقريب المساحات بأشكال هندسية لحسابها

لكن يعتبر نيوتن و لوبيز المؤسسون الفعليون لهذا الميدان بإستعمالهم لما يسمى في عصرهم الحساب المتناهي في الصغر

كان إهتمام نيوتن منصبا على حساب السرعة بقسمة المسافة على الزمن و التي إذا أردنا حسابها لحظيا تتحول إلى ظل مماس المنحنى

أراد نيوتن إيجاد طريقة لإستنتاج ظل هذا المماس من صيعة الدالة، فإذا أخذنا مثلا الدالة $f(x)=x^2$

وأردنا حساب ظل المماس عند نقطة x_0 فيمكننا تقريبه بحساب ظل المستقيم الذي يمر بالنقطة

$(x_0, f(x_0))$ و نقطة قريبة منها $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$

بإستعمال المعادلات المثلثية يكون ظل الزواية $tan(\alpha)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$

$$=\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$$

بما أن Δx صغير جدا فيمكن إهماله، هذه نظرية نيوتن، فيكون $tan(\alpha)\approx 2x_0$

يمكننا هنا ملاحظة أن $f(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^2=x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$

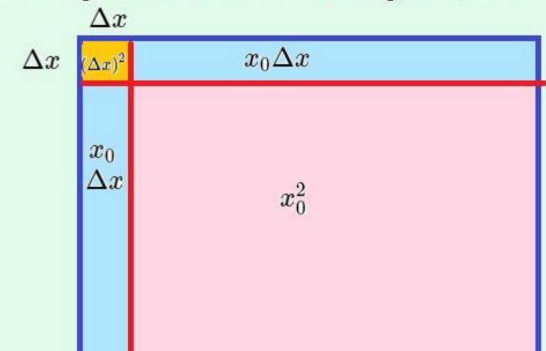
بما أن Δx صغير جدا فإن $(\Delta x)^2$ أصغر بل مهمل أمام Δx فيمكننا أن نكتب

$$f(x_0+\Delta x)\approx x_0^2+2x_0\Delta x$$

وكأن الدالة محليا قريبة من خط مستقيم فيمكننا حساب الظل بالتقريب $tan(\alpha)=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}\approx\frac{x_0^2+2x_0\Delta x-x_0^2}{\Delta x}=2x_0$




لو نظرنا إلى القيمة $(x_0+\Delta x)^2$ كمربع ضلعه $x_0+\Delta x$ و بداخله مربع ضلعه x_0



$x_0+\Delta x$

نجد أن الفرق بينهما هو المستطيلان الأزرقان و يساوي $2x_0\Delta x$ زائد مربع صغير جدا مساحته $(\Delta x)^2$ والذي يمكن إهماله

فبالقسمة على Δx نجد $2x_0$

طريقة نيوتن في حساب ظلال المماسات و التي ولدت المشتقة و النهاية لم تتلقى الترحيب من الرياضياتيين لفقدانها الضبط و الدقة

فكيف يمكن أن نهمل قيمة هكذا في الحساب الرياضي

كان يجب إنتظار قرنين من الزمن ليضبط العلماء مفهوم النهاية و يبروا على إهمال هذه القيمة بمفهوم النهاية و ذلك بإدخال الإبسيلون

ظهور حساب النهايات بالطريقة الجديدة قضى نهائيا على طريقة الحساب المتناهي الصغر ليترك المجال لفرع جديد يضم الإشتقاق و التكامل

الفرق بين الاشتقاق و التفاضل

الاشتقاق ينتج عدد من حساب نهاية قسمة تغير قيمة الدالة على تغير قيمة المتغير، وكما يبدو من التعريف فهو تعريف في مجموعة الأعداد الحقيقية.

يفسر هذا العدد هندسيا بميل مماس الدالة عند النقطة.

يمكن تعميم هذا التعريف على مجموعة الأعداد المركبة لأنها حقل طبولوجي فمفهوم القسمة و النهاية موجودان داخلها، لكن الإشكال يطرح عند المرور لفضاءات نظيمية موسعة ك R^n

قد نلجأ إلى الاشتقاق الجزئي بالنسبة لكل متغير لكن فقدنا في النهاية علاقة هذه الأعداد بالمتغير إذ كل عدد متعلق فقط باتجاهه كما أنه في الفضاءات النظيمية بصفة عامة لا يمكننا استعمال هذه الطريقة.

لتعميم مفهوم الاشتقاق يمكن إعادة صياغته من خلال مماس المنحني للدوال الحقيقية فالملاحظ أن الاشتقاق ما هو إلا تقريب الدلة عند نقطة بدالة خطية و هذا ما يعرف بالتقريب التآلفي، فيمكننا إعادة صياغة هذا المفهوم لتعميمه و ذلك بجعل النهاية عند نقطة الفرق بين تغير التطبيق وتطبيق خطي بقسمة على نظيم تغير المتغير.

هذه النهاية لابد أن تؤول للصفر، فنكون هنا قربنا التطبيق عند كل نقطة بتطبيق خطي و هذا ما نسميه التفاضل.

إذن الاشتقاق ينتج عدد أما التفاضل فينتج تطبيق خطي و لذلك نكتب المفهومين بشكلين مختلفين كما في الصورة.

تعريف الإشتقاق في مجموعة الأعداد الحقيقية

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} : f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

تعريف التفاضل في فضاء نظيمي بالتقريب من تطبيق خطي $L(h)$

$$\forall x_0 \in \mathbb{E} : \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-L(h)}{||h||} = 0$$

ولذلك نكتب في حالة الأعداد الحقيقية

$$dy = f'(x)\,dx$$

بين التفاضل والتكامل

الاشتقاق أو بمفهومه العام التفاضل ينظر للدالة محليا كمنحنى مسير في اتجاه معين لذلك هو يحاول تقريب الدالة محليا بتطبيق خطي.

هذه النظرة هي التي تجعلنا نربط الاشتقاق بالهندسة وإن كان في الأصل عملية تحليلية جبرية فهو تحليلي من حيث النهاية وجبري من حيث التوجيه الخطي فأمكن تمثيل الدالة في R^n عن طريق تقريب المنحنى محليا بتطبيقات خطية.

فالدالة الحقيقية عندما نرسم منحناها فنحن نقربها بقطع مستقيمة محليا.

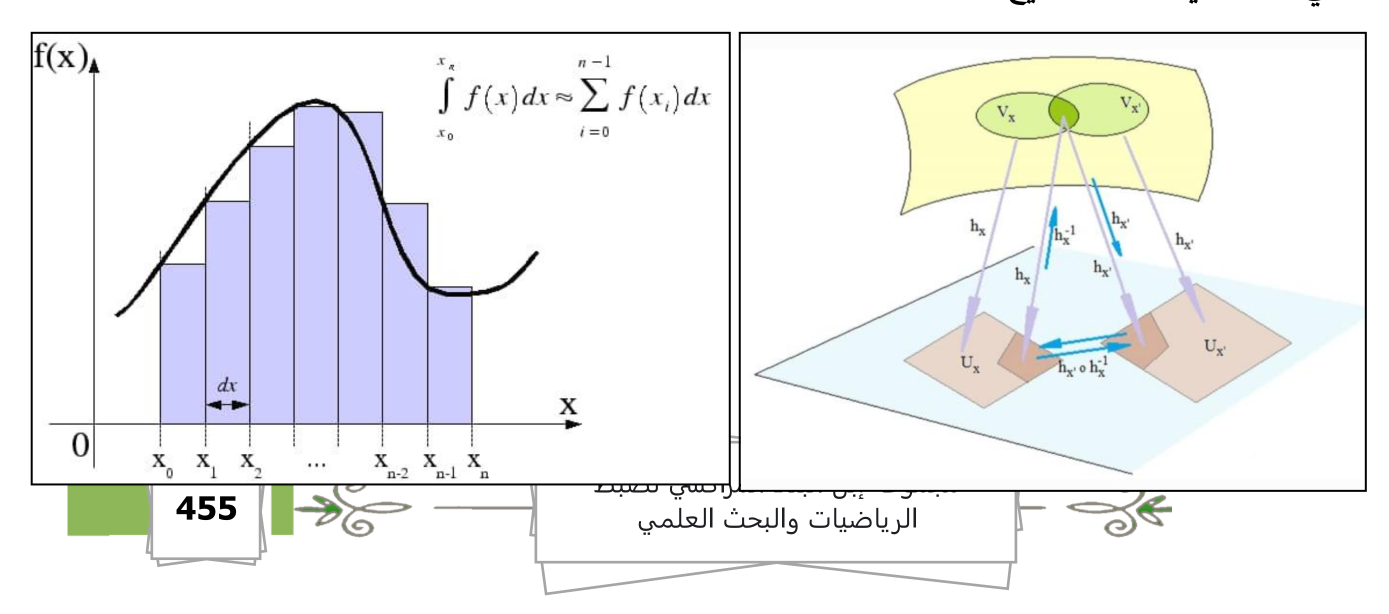
أما التكامل فنظرته للدالة على نقيض الاشتقاق ذلك أنه ينظر لها نظرة كلية فهو يراها كمجموعة قيم موزعة على مجموعة سوابق فإذا أراد تكميمها كليا لجأ لجمع هذه القيم مع أخذه بعين الاعتبار توزيعها محليا لذلك هو يجمع جداء كل صورة للدالة في كمية سوابقها محليا او بالأحرى يختار مجموعة قيم كل منها ممثل محلي لما يجاوره من قيم على مفهوم ريمان أو لما يقاربه في القيمة على مفهوم لوبيغ.

إذا أخترنا مفهوم ريمان فسيشترك التكامل والاشتقاق في طريقة الحساب من حيث استعمال المحلية الجوارية لكن على العكس النقيض فالاشتقاق يقسم تغير الدالة على تغير قيمة السابقة أما التكامل فيضرب قيمة الدالة في تغير السابقة وهذا هو سبب علاقة تكامل ريمان بالاشتقاق عن طريق الدالة الأصلية.

أما مفهوم لوبيغ فيبدو أنه أعم لأنه لا يشترط تمثيل قيم الدالة لما جاورها إنما يختار ممثل للدالة من حيث تقارب الصور وإن كانت فواصلها متباعدة.

لكن تبقى الخاصية الأساسية التي نجدها في جميع أنواع التكاملات هي النظرة الكلية فالتكامل تكميم كلي للدالة من حيث علاقة صورها بسوابقها ومن هذه الحيثية تصنع فضاءات لوبيغ عن طريق تعريف نظيم الدالة بتكاملها .

أما الاشتقاق فنظرته محلية حتى وإن عممناه للتفاضل وإن عممنا التفاضل للمنوعات فالمحلية فتبقى المحلية سمة أساسية فيه. يمكننا أن نقول أن الاشتقاق تفكيك للدالة لأجزاء محلية فهو يفسر سلوكها المحلي عن طريق سلوك كل جزء من أجزائها. أما التكامل فهو تجميع لأجزاء الدالة في كمية كلية فهو يفسر سلوكها الكلي عن طريق سلوك توزيع أجزائها.



يا أستاذ حدثني عن : الدوال، النهايات، الاستمرار، الاشتقاق، التفاضل، التكامل ... ما هي كل هذه المفاهيم وما فائدتها ؟

الأستاذ : الدالة مفهومها سهل وسأضرب لك على ذلك مثالا،

عندما نأخذ مجموعة ولتكن R فهذه نبدأ بها ونأخذ مجموعة ثانية مثلا C فهذه سنصل إليها،

ثم نربط كل قيمة من R مع قيمة من C فنكون صنعنا دالة بذلك مثال ذلك $f(x) = x + i * x$

فهنا لكل عدد حقيقي x نربطه أو نرفق له العدد $x + i * x$ فهذا الرابط هو الدالة.

الدالة مجرد جدول قيم مع مقابلاتها.

التلميذ : مع قيمة وحيدة من C

الأستاذ : نعم لابد أن تكون وحيدة أو ما نعبر عنه أن لكل سابقة صورة على الأكثر.

في الواقع نستعمل الدالة كمفهوم لربط ظاهرة بظاهرة مثل ربط الزمن بموقع القطار على السكة.

لكن لماذا نشترط صورة واحدة ؟

التلميذ : لأن الحادثة تتغير ؟ و الزمن متقدم ؟

الأستاذ : لأنه في عقل البشر إذا توفرت نفس الشروط نحصل على نفس النتيجة

لذلك صنع البشر الدالة على طريقتهم في التفكير للتعبير عن الظواهر المشاهدة في حياتهم اليومية.

ما هي طريقة ربط السوابق بالصور لصناعة دالة ؟

التلميذ : عن طريق تطبيق

الأستاذ : التطبيق والدالة نفس الشيء متى قصرنا الدالة على مجموعة تعريفها.

طريقة الربط في الدالة بين الصورة والسابقة نسميها الصيغة

فعندما نكتب الدالة f معرفة بـ $f(x) = x^2$

فالصيغة x^2 هي طريقة جبرية للربط بين سوابق f و صورها.

ولذلك نجد

$f(1) = 1$
$f(2) = 4$
$f(3) = 9$

فالأصل أن هذه الدالة هي هذه الثنائيات

(1,1)
(2,4)
(3,9)
....

فهي جدول ثنائيات بحيث تظهر السوابق مرة واحدة فقط لأن عندها صورة وحيدة.

:

لكننا لا يمكننا كتابة هذا الجدول على الورق ولا دراسته لأن قيمه كثيرة.

فبدل فعل ذلك نحاول صناعة صيغة حسابية تسهل علينا المطلوب وتعطينا الشكل العام للروابط بين السوابق والصور مثل الصيغ الجبرية مثلا $g(x) = x^3-x+1$ والكسرية $f(x) = 1/x$

لكن ما فائدة الصيغة ؟

التلميذ : لتسهيل الحسابات ؟

الأستاذ : نعم هذا إحدى فوائدها فهو سهل إن كانت الصيغة جبرية

لكن هناك دوال صياغتها غير جبرية مثل $\sin(x)$ فالدالة الجيبية مثلا نعرفها من الدائرة المثلثية

فكيف نفعل لتسهيل حسابها ؟

البشر هنا يستعمل الصيغة لدراسة سلوك الدالة فبما أنها تمثل كيفية صناعة روابط الدالة فيمكننا الانطلاق منها لتحديد سلوكها.

التلميذ : نعم، لدراسة سلوك الدالة.

الأستاذ : عندما نقول ندرس سلوك الدالة أي ندرس الصور بالنسبة للسوابق

لذلك نحن نحتاج مقارنة الصورة $f(x)$ بالسابقة x

لكن البشر بطبيعتهم لا يستطيعون فهم المسائل إلا كأجزاء بسيطة.

فالدالة ينظر إليها العقل البشري نقطة نقطة فتذكر أنها بالنسبة إليه جدول قيم.

الأستاذ : فماذا يفعل ليقارن الصور بالسوابق ؟

سيحاول إعادة صياغة صيغة الدالة لصناعة صيغة أبسط بالنسبة ل x ذلك أننا لا نعرف إلا الحساب بالجبر كحساب $x+1$ و x^2 ...

فمتى كتبت $\sin x$ يتعذر الحساب البسيط بالجمع والضرب والطرح والقسمة. فماذا نفعل ؟

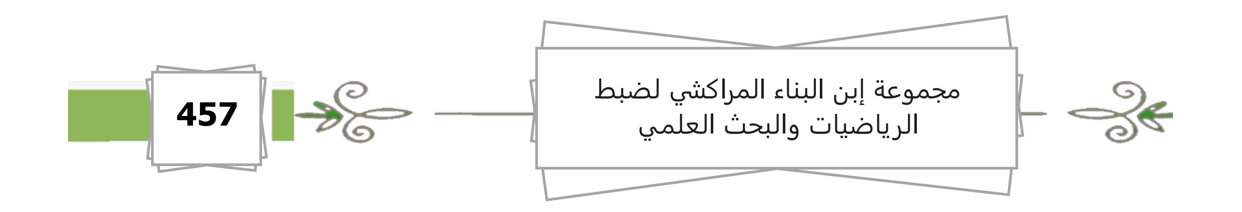
بما أن $\sin x$ ليست صيغة جبرية سنحاول تحويلها إلى صيغة جبرية لكن المساواة مستحيلة إذن سنحاول تقريبها من صيغة جبرية وهنا نحتاج للنهايات.

إحدى طرق التقريب هو الاستمرار لكن الاستمرار هو تساوي نهاية الدالة لقيمة الدالة أي محليا قيم الدالة قريبة من بعضها فإذا أخذنا إحداها فهي تغني عن غيرها لحساباتنا.

المشكل أن الدالة الجيبية لا نعرف قيمها حتى محليا بشكل بسيط لذلك سنلجأ لتقريب أفضل لا يتعلق بها وهو الاشتقاق.

فالاشتقاق هو عملية تقريب الدالة عند نقطة من صيغة خطية لذلك هندسا نقول نقرب منحنى الدالة من مماسها فنكتب تعريف المماس بـ $y = (x - x_0) f'(x_0) + f(x_0)$

فهذا تقريب خطي لصيغة الدالة $y = f(x)$



ولذلك كذلك نكتب مبرهنة التزايدات المنتهية بـ $f(x) - f(x0) = (x - x_0) f'(c)$

فهو تقريب خطي كذلك.

فالاشتقاق هي عملية مقارنة دالة أو بالأصح تغير الدالة بتغير محليا بتغير المتغير لصناعة شكل خطي أي صيغة جبرية بسيطة من الشكل $a x + b$

لكن الرياضيات لا تحب الحسابات التقريبية فتعبر عن ذلك بالمساواة عن طريق النهايات.

فنحسب النهاية في الاشتقاق $\text{Lim } (f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$

هذه النهاية تساعدنا على دراسة سلوك الدالة من تزايد وتناقص .... وتقريبها و أمور أخرى...

التلميذ : لكن إن كان هذا التقريب غير جيد فكيف نصنع ؟

الأستاذ : إذا لم تكف الصيغة الخطية فيمكننا أن نقربها بكثير حدود فهو صيغة جبرية سهلة كذلك

وهنا نستعمل النشر مثلا فلذلك لدينا: $e^x = 1 + x/1! + x^2/2! ....$

فالنشر طريقة صياغة حسابية كذلك لكن عن طريق كثيرات الحدود.

إذن الاشتقاق يعطينا نظرة محلية على سلوك الدالة

لكن إذا أردنا نظرة كلية كيف نفعل ؟

فهنا نقوم بالتكامل، مثل لو كان عندك كيس بطاطس.

فإن أردت أن تنظر له بالتدقيق ستدقق في البطاطس حبة حبة وقد تقطعها لتحليلها فهذا الاشتقاق.

أما إن أردت النظر إليه كليا فستزنه، فالتكامل طريقة قياس كلية للدالة

أما التفاضل فهو تعميم لمفهوم الاشتقاق فعندنا نتكلم عن الاشتقاق فنحن نتكلم على العدد المحسوب بالنهاية $\text{Lim } (f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$

أما إذا تكلمنا على التفاضل فنحن نتكلم عن التطبيق الخطي الذي نقرب منه فهو نفس المفهوم إلا أن التفاضل أعم فمثلا لو أخذنا دالة بمتغيرين فكيف نشتقها ؟

التلميذ : نفاضلها

الأستاذ : نعم فنستعمل الاشتقاق الجزئي في البعدين x و y ثم نصنع تطبيقا خطيا منهما

وشعاعه ما تسمونه في الفيزياء Gradient

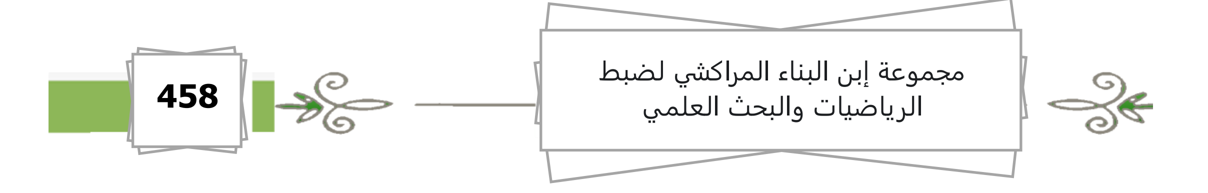
التلميذ : إذا كانت دالة سلمية.

الأستاذ : نعم إذا قبلت الدالة التفاضل، فإذا لم تقبل فهناك طرق أخرى مثل التقريب بكثيرات حدود برنشتاين مثلا فهذه لا تحتاج للاشتقاق.

إذن كل هذه آليات للنظر للدالة التي تمثل ظاهرة في الواقع.

فنستعمل النهايات لتحليلها محليا والاشتقاق لتقريبها ودراسة سلوكها والتكامل لوزنها أو ما نسميه القياس.

فهذه هي المفاهيم.



أما التعاريف فهي صياغة للمفاهيم بكتابة رياضية مضبوطة لا تتعلق باللغة المبهمة والذوق البشري.

فالدالة كما قلنا هي علاقة ثنائية بين مجموعتين بحيث تربط كل عنصر من مجموعة البدء بعنصر على الأكثر من مجموعة الوصول.

بتعبير آخر إذا انطلقت الدالة من مجموعة A نحو B فهي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $A\times B$ مع شرط صورة على الأكثر

فهذا التعريف لا يتغير حسب الأشخاص فهو ثابت يتعلق بالمجموعات والمنطق فقط.

لذلك يصاغ منطقيا كالتالي:

$$f \subset A\times B :$$

$$\forall\ (x,y)\ ,\ (a,b) \in f\ ,\ x = a \Rightarrow y = b$$

إذن هنا كتبنا الدالة كمجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $A\times B$ تحقق الشرط:

إذا تساوت سابقتين من ثنائياتها فلابد أن تتساوى صورتهما، أي لكل سابقة صورة على الأكثر.

فهذه الصياغة الرياضية لا تتعلق إلا بالمجموعات والمنطق ولا تقبل أي تأويل غير مراد بتعريف الدالة.

من هنا تظهر قوة الكتابة الشكلية فهي تنقي المفاهيم من الشوائب الحدسية.

التلميذ : ممتاز فهمتك.

الأستاذ : ونفس الشيء بالنسبة لتعريف النهاية

فلتعريف النهاية لابد أن ننظر للدالة محليا لكن المشكل في كلمة محلي فكل واحد كيف يفهمها.

لذلك الرياضيات تتخلص من الذوق البشري وتعطي تعريفا للمحلية بالمنطق والمجموعات فقط .

ففي R تستعمل الصياغة التالية

نقول عن L أنها نهاية الدالة الحقيقية f عند a إذا حققت القضية:

$$\forall\ \xi > 0,\ \exists\delta > 0\ ,\ \forall\ x \in Df\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \xi$$

فهذا التعريف يقول نقيس المحلية أو ما نسميه في الطبولوجيا بالجوار بالمقياس إبسيلون ξ أي كل $f(x)$ بقرب L بأقل من إبسيلون فهو داخل في نظرتنا المحلية.

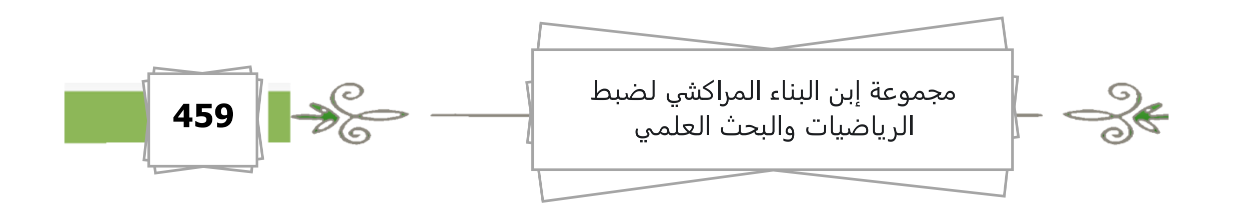
فحتى نقول أن الدالة تقترب من L بالمقياس إبسيلون فلابد أن نجد جميع صورة السوابق التي حولa حول ، L

الأستاذ : ولقياس القرب من السابقة a استعملنا المقياس δ فهذا الذي يترجم كل ما حول a نجد صورته حولL

فكل هذا التعريف لا يخضع لذوق أحد.

الأستاذ : ثم تستعمل النهاية في تعريف الاستمرار

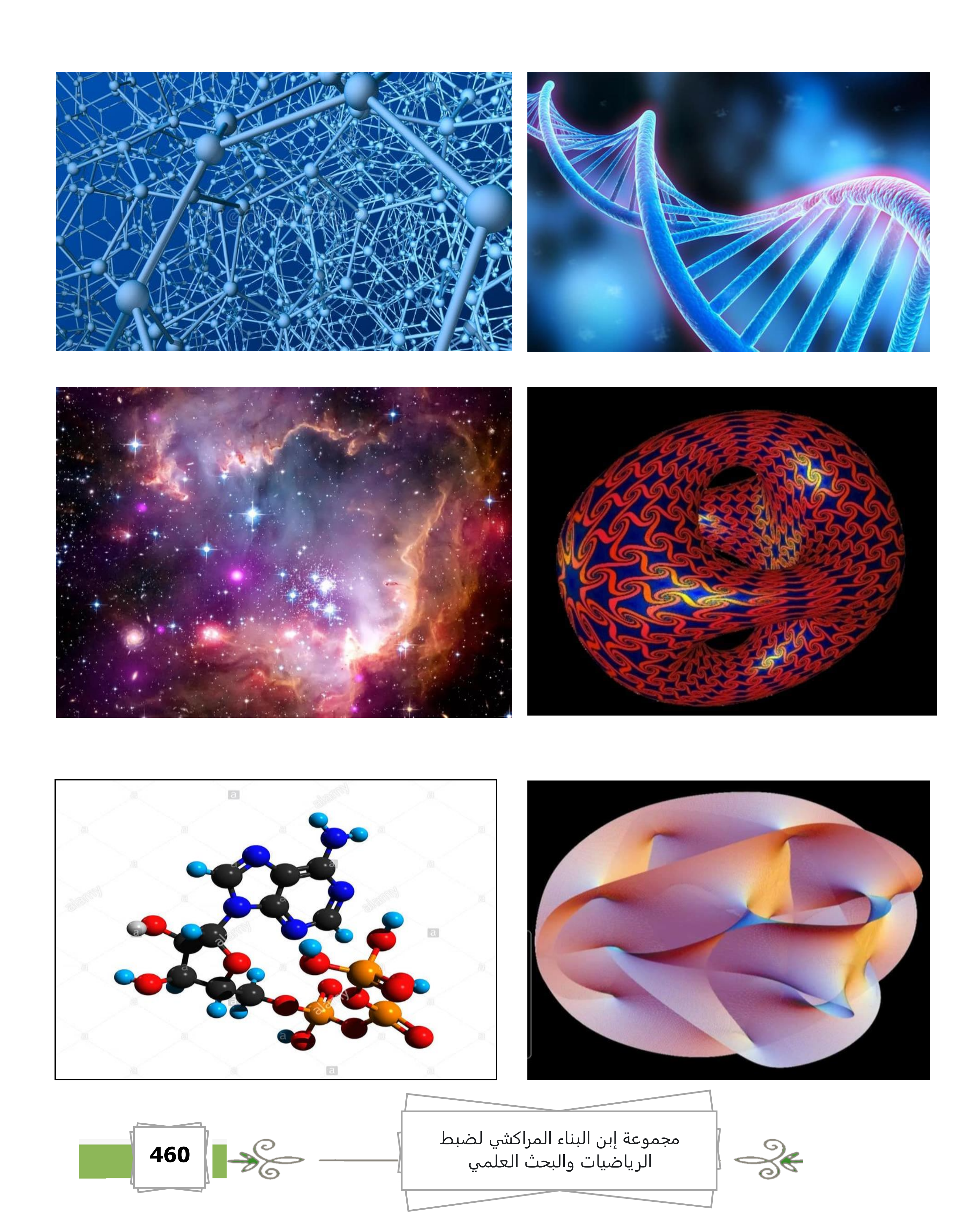
$$\text{Lim } f(x) = f(a)$$



وتعريف الاشتقاق

$$\lim (f(x) - f(a))/(x - a)$$

فكما ترى رغم أن المفاهيم تكون واضحة إلا أنها غير كافية لحسابات دقيقة ما لم نصغها بالكتابة الرياضية حتى نتخلص من تأويل البشر للغة وننتج كميات عددية حسابة فهذا الذي نعبر به على الواقع.



حول مبرهنة الحصر في النهايات

مبرهنة الحصر في النهايات وتسمى كذلك مبرهنة الجمارك Théorème des gendarmes

تنص على أنه إذا كانت لدينا ثلاث دوال: f , g , h

معرفة على مجال I من R نحو R و عنصر من a بحيث لدينا:

$$\forall x \in I\backslash\{a\} : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

وكل من f و g تقبل نهاية عند a فينتج من ذلك أن h تقبل كذلك نهاية عند a ولدينا

$$\lim h(x) = \lim f(x) = \lim g(x) , x \longrightarrow a$$

المسألة تبقى صحيحة إذا كان x يؤول نحو المالانهاية.

لو تأملنا جيدا هذه المبرهنة أدركنا أنها نتيجة حتمية لكون R زمرة طبولوجية مع عملية ترتيب متناسقة مع طبولوجيتها الاعتيادية.

يمكننا بوضع $L = \lim f(x) = \lim g(x)$ أن نجد

$$\forall x \in I\backslash\{a\} : f(x) - L \leq h(x) - L \leq g(x) - L$$

فينتج

$$\forall x \in I\backslash\{a\} : 0 \leq | h(x) - L| \leq \max(|f(x) - L| , |g(x) - L|)$$

هذه الكتابة تمكننا من **أمرين**:

الأمر الأول :

برهنة المبرهنة إذ مهما اخترنا إبسيلون $\forall \xi > 0$ وجدنا جوار ل a منزوع النقطة a وليكن V_1 بحيث

$$\forall x \in V_1 : |f(x) - L| < \xi$$

وآخر V_2 بحيث

$$\forall x \in V_2 : |g(x) - L| < \xi$$

أي

$$\forall x \in V_1 \cap V_2 : 0 \leq | h(x) - L| \leq \max(|f(x) - L| , |g(x) - L|) < \xi$$

وهذا تعريف نهاية h عند a والتي تساوي L .

الأمر الثاني:

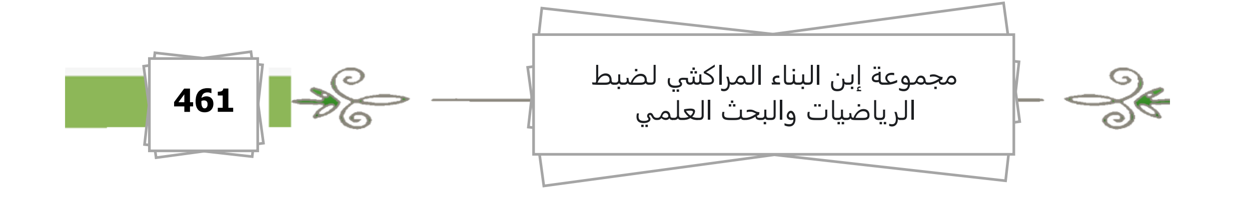
هذه الكتابة تعميم لمبرهنة الحصر في أي فضاء نظيمي والتي يمكن اختصارها باعتبار

$$\max(|f(x) - L| , |g(x) - L|)$$

دالة حقيقية موجبة فيكون في فضاء نظيمي E في جوار V ل a منزوع النقطة a إذا وجد تطبيق G من V نحو R^+ بحيث $\forall x \in V : \| h(x) - L\| \leq G(x)$ و $\text{Lim } G(x) = 0$

فينتج من ذلك $\text{Lim } h(x) = L$

مبرهنة الحصر في R ينتج منها كذلك مبرهنة للاشتقاق فإذا كان $\forall x \in I : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$



وكان

$f(a) = g(a)$ (وهنا بالضرورة $h(a) = f(a) = g(a)$)

وكانت g و f قابلة للاشتقاق عند a بحيث $f'(a) = g'(a)$ فتكون h قابلة للاشتقاق

و $h'(a) = f'(a) = g'(a)$ يمكننا برهنة ذلك عن طريق الحسابات التالية:

$$\forall\ x \in I\backslash\{a\} : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$
$$\Rightarrow f(x) - f(a) \leq h(x) - h(a) \leq g(x) - g(a)$$

بأخذ حالة $x > a$ نجد

$$\Rightarrow (f(x) - f(a))/(x - a) \leq (h(x) - h(a))/(x - a) \leq (g(x) - g(a))/(x - a)$$

بالمرور إلى النهاية نحو a بقيم أكبر نجد

$$h'(a) = \lim\ (h(x) - h(a))/(x - a) = f'(a) = g'(a)$$

وبنفس الطريقة نبرهن حالة $x < a$

مبرهنة الحصر تستعمل بكثرة عندما نقع في دوال ليست سهلة الحساب فنحصرها بدوال أسهل.

تنبيه:

إذا كان لدينا $\forall\ x \in I\backslash\{a\} : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ و $\lim f(x) \neq \lim g(x)\ ,\ x \longrightarrow a$

فهذا لا يعني أن h تقبل نهاية عند a (أو عند المالانهاية) مثال ذلك:

$$-1 - x^2 \leq \sin(1/x) \leq 1 + x^2$$

لكن لو مررنا للنهاية عند الصفر سنجد نهاية كل من الطرفين لكن $\sin$ لا تقبل نهاية.

يمكننا تعميم مبرهنة الحصر في هذه الحالة عن طريق النهاية العليا والنهاية السفلى فإذا وجد m و M حقيقيان بحيث $\forall\ x \in I\backslash\{a\} : m \leq f(x) \leq h(x) \leq g(x) \leq M$

فينتج من ذلك

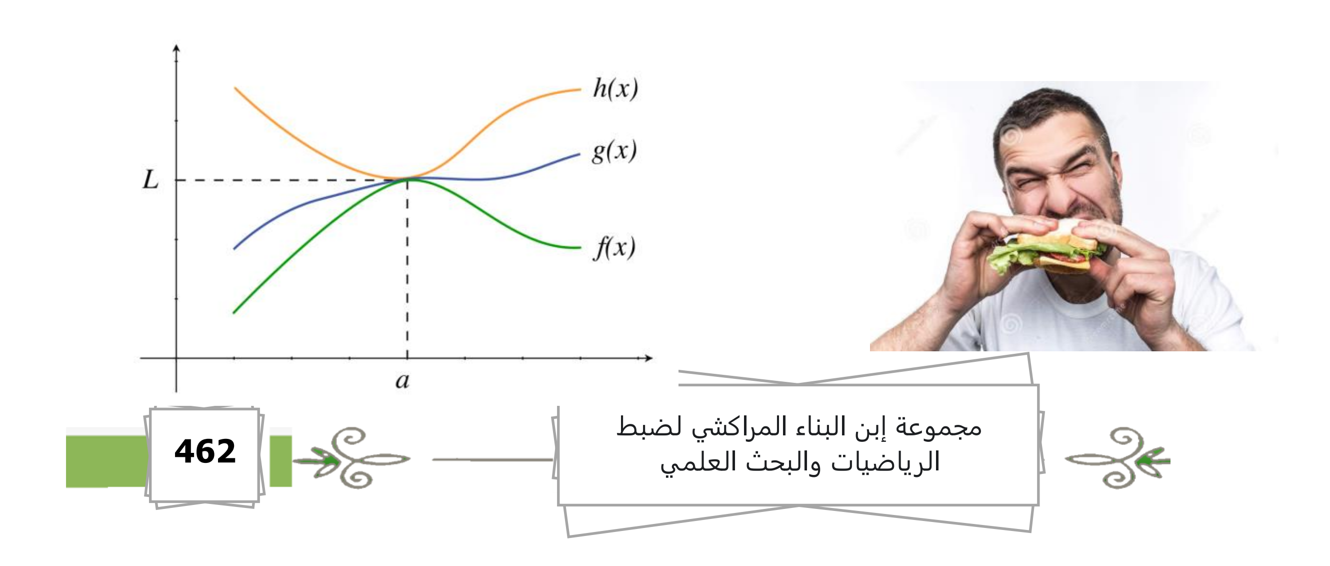
$$m \leq \liminf f(x) \leq \limsup f(x) \leq \liminf h(x) \leq \limsup h(x) \leq \liminf g(x) \leq \limsup g(x) \leq M$$

فإذا قبلت كل من f و g و h نهايات فيمكننا أن نكتب $\lim f(x) \leq \lim h(x) \leq \lim g(x)$

مراجع:

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8me_des...

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8me_du...



بين مبرهنة التزايدات المنتهية ومبرهنة المتوسط

من السهل الربط بين مبرهنة التزايدات المنتهية ومبرهنة المتوسط مرورا بالمبرهنة الأولى للتحليل.

مبرهنة التزايدات المنتهية تقول أنه إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال المغلق بين a و b وقابلة للإشتقاق على المجال المفتوح فإنه يوجد c بين a و b بحيث $f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$

أما مبرهنة المتوسط فتنص على أنه إذا كانت الدالة g مستمرة على المجال المغلق بين a و b فإنه يوجد c بين a و b بحيث $g(c)\,(b - a) = \int_{[a,b]} g(x)\,dx$

المبرهنة الأولى للتحليل تنص على أنه إذا كانت f' مشتقة الدالة f فتكاملها بين a و b يساوي الفرق بين قيمتي f عند a و b .

فعندها يمكن كتابة مبرهنة التزايدات المنتهية بالشكل

$$f'(c)\,(b - a) = f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} f'(x)\,dx$$

لكن إن كانت العلاقة ظاهرة حسابيا بين المبرهنتين فكيف يمكننا تفسير هذه المساواة هندسيا ؟

في الحقيقة لو تأملنا تكامل المشتقة هندسيا فهو المساحة المحصورة بين منحناها ومحور السينات.

لكن هذه المساحة هي أصغر من مساحة المستطيل الذي ارتفاعه القيمة القصوى للمشتقة وطوله طول المجال بين a و b وأكبر من مساحة المستطيل الذي إرتفاعه أصغر قيمة للمشتقة وطول المجال b , a

فالتكامل محصور بين مساحتي مستطيل أصغر و مستطيل أكبر.

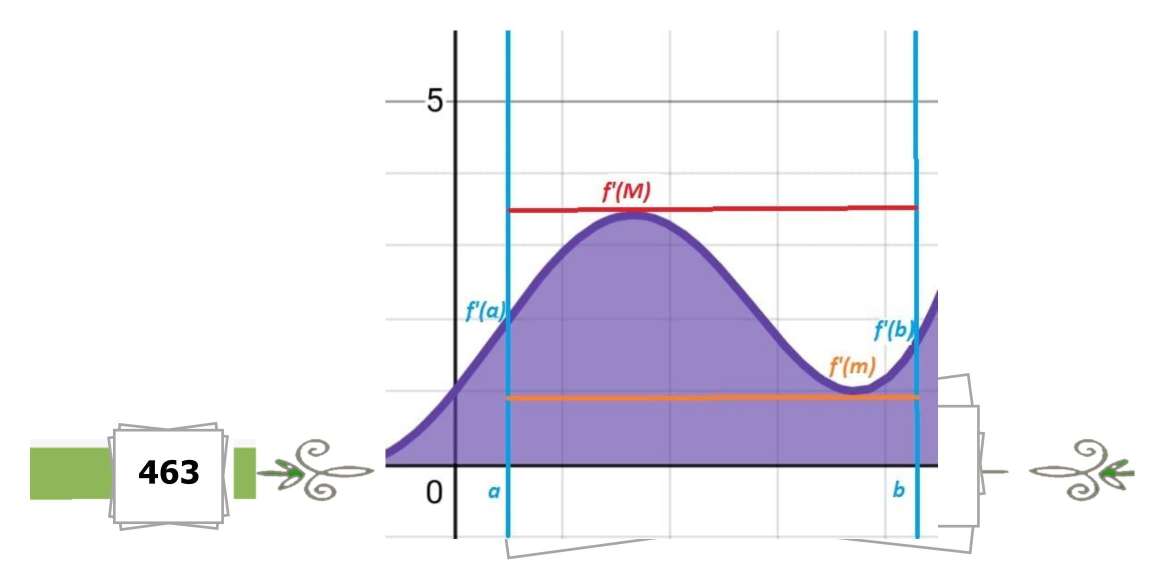
لكن المشتقة لكونها مشتقة فهي دالة لداربو ودوال داربو لها خاصية تحقيق مبرهنة القيم المتوسطة أي هي تمسح كل قيم المجال المغلق بين قيمتها الصغرى وقيمتها العليا.

يعني ذلك هندسيا أن المشتقة إذا تجولت على منحناها بين a و b فإن مساحة المستطيل الذي طوله هو طول المجال بين a و b وارتفاعه قيمة المشتقة ستتجول بين مساحة المستطيل الأصغر والمستطيل الاكبر.

وذلك يعني أنه حتما هناك مستطيل ستساوي مساحته المساحة المحصورة تحت المنحنى والذي هو تكامل المشتقة. واذا كتبنا وجود هذا المستطيل فسنكتبه بالشكل

$$f'(c)\,(b - a) = \int_{[a,b]} f'(x)\,dx$$

إذن في الحقيقة مبرهنة التزايدات المنتهية لها علاقة وثيقة بمبرهنة القيم المتوسطة بل هي مجرد مبرهنة القيم المتوسطة مطبقة على المساحات لذلك أمكن التعبير عليها بالتكامل.



من مبرهنة القيم المتوسطة ونحو مبرهنة التزايدات المنتهية.

مبرهنة القيم المتوسطة من المبرهنات التحليلية الأولى التي يدرسها التلميذ لسهولتها تمثيلا وموافقتها للحدس.

المبرهنة لها صيغ متعددة على R منها أن أي دالة مستمرة على مجال [a,b] فإنها تأخذ أي قيمة لما بين f(a) و f(b) وبصيغة أخرى صورة أي مجال بدالة مستمرة هو مجال.

حدسيا الاستمرار يربط بعدم الانقطاع فما دامت الدالة تنقلت من صورة a نحو صورة b فحتما هي تمر بكل القيم التي بينهما.

أو بالصيغة الطبولوجية المعممة صورة مترابط بواسطة تطبيق مستمر هو مترابط.

من هنا يتضح لنا أمر مهم جدا وهو أن مبرهنة القيم المتوسطة لا تتعلق فقط باستمرار التطبيق بل هي تتعلق كذلك ببنية الفضاء الطبولوجي لأننا اشترطنا هنا الترابط.

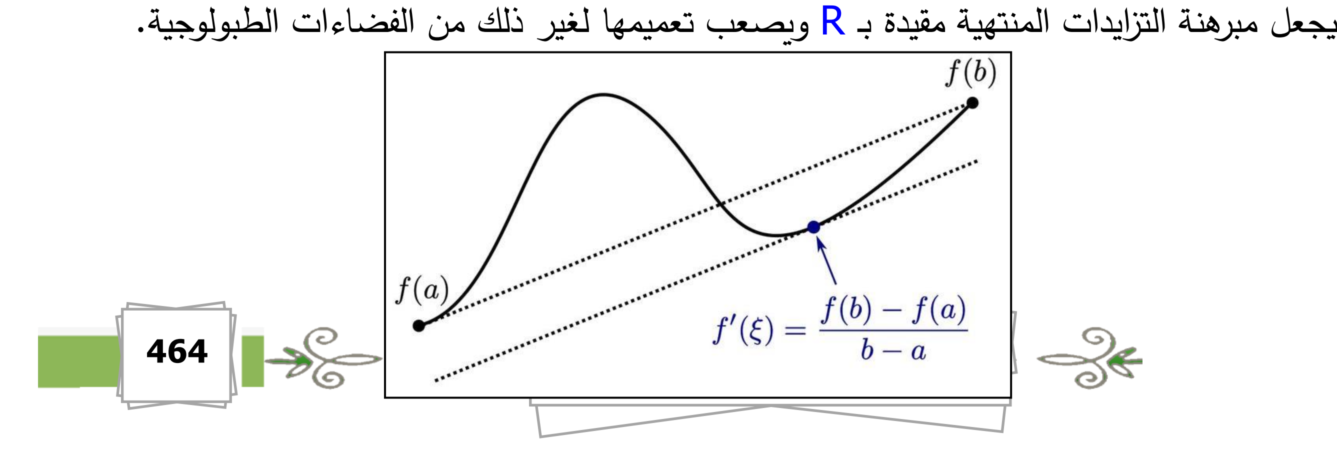
وبسبب فقدان هذا الشرط أن هذه المبرهنة غير موجودة على مجموعة الأعداد الناطقة

فمثلا $f(x) = x^2 - 2$ المعرف على Q لا يقبل اصفارا رغم انه على المجال [0,2] ينتقل من -2 نحو 2 لكن كون Q غير مترابط يجعلنا نفقد شرطا مهما وهو انقطاع الفضاء الأصلي يعطي انقطاعا في الصور. أما مبرهنة التزايدات المنتهية فهي أصعب فهما للوهلة الأولى إذا نظرنا إليها من الناحية التحليلية فهي تنص على أنه إذا كانت الدالة المستمرة على [a,b] قابلة للاشتقاق على]a,b[فإنه يوجد في الأخير عدد c بحيث $(f(b) - f(a))/(a - b) = f'(c)$

هذه المبرهنة تبرهن إنطلاقا من مبرهنة القيم المتوسطة لكنها صالحة فقط في R رغم أن مبرهنة القيم المتوسطة تعمم على أي فضاء طبولوجي مترابط.

العلاقة بين المبرهنتين تظهر جليا من التمثيل الهندسي فالقسمة $(f(b) - f(a))/(a - b)$ تمثل ميل الوتر بين $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ فإذا حركنا مماس المنحنى بين $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ فلابد أن نصل لقيمة c يكون عندها مماس المنحنى موازيا للوتر السابق الذكر وسبب ذاك عدم انقطاع الحركة أو بالأحرى استمرار الحركة بسبب استمرار المنحنى.

فاستمرار المنحنى مع قابلية الاشتقاق يعطي وجودا للمماس والذي نلاحظ أنه يغير اتجاهه أي يغير ميله أي قيمة المشتقة وهذا ما يجعله في نقطة ما موازيا للوتر أي المشتقة تساوي ميل الوتر فهذا الذي تعنيه المساواة $(f(b) - f(a))/(a - b) = f'(c)$ فنلاحظ هنا أنه لا نكتفي بالخصائص الطبولوجية R عن طريق استعمال مبرهنة القيم المتوسطة بل نتعدى ذلك بإستعمال الخصائص الهندسية في المستوى وهذا ما يجعل مبرهنة التزايدات المنتهية مقيدة بـ R ويصعب تعميمها لغير ذلك من الفضاءات الطبولوجية.



التقريب، التقريب التآلفي

يجب أن نعلم أنه في الرياضيات لا يوجد تقريبات حسية فلا تقبل في الرياضيات كتابة من الشكل:

$\pi \approx 3.14$

فالرياضيات علم دقة يتعامل مع الكميات بالمساواة أو الترتيب.

لذلك الرياضيات تعطي معنى للاقتراب الحسي بمساواة رياضية.

فإذا كانت الدالة تقترب لقيمتها عند نقطة عندما تكون بجوارها نسمي ذلك الاستمرار أي

$\text{Lim } f(x) = f(a) \mid x \to a$

وهذا يعني بالتعريف الإبسيلوني

$\forall \xi > 0 , \exists \delta > 0, \forall x \in Df : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \xi$

فالتعريف الإبسيلوني يعرف النهاية بالمتراجحات وهو يعني أنه مهما اخترنا مقياس الاقتراب ξ فيمكننا أن نقترب به نحو قيمة f عندما نكون بجوار a بقيمة δ

أي أنه لا يوجد اقتراب مطلق بل لابد أن نحدد ما معنى نقترب وذلك لا يكون إلا بوضع f بجوار $f(a)$ عن طريق الإبسيلون $- \xi < f(x) - f(a) < \xi$ لذلك لو أردنا أن نحسب قيمة تقريبية ل $\sqrt{2}$ لابد أن نحدد بتقريب كم ؟ عادة ما نسمي هذا في الفيزياء بالارتياب أو تقريب بعددين أو ثلاث بعد الفاصلة ذلك أننا نقرب بالأعداد العشرية لكثافتها في R .

فإذا أردنا أن نستغل استمرار الدالة $\sqrt{x}$ لحساب تقريبي ل$\sqrt{2}$ فلابد أن نكون بجوار $a=2$ بالقدر الذي نريده، مثلا يمكننا بعملية عكسية اختيار 1.414 الذي مربعه قريب من 2 أي $1.414^2 = 1.99936$ أي نحن اخترنا $|\sqrt{2} - \sqrt{1.99936}| < 0.000214$ فالابسيلون المختار هنا هو $\xi = 0.000214$

فإذا أردنا تقريبا أفضل لابد من تصغير الإبسيلون.

لكن كما نرى هذه الطريقة ليست فعالة خاصة إذا استعملنا دوال غير جبرية مثل اللوغارتم.

في الرياضيات طرق كثيرة للتقريبات التي تترجم بمفهوم النهاية منها التقريب التآلفي فنحن نعلم أنه الدالة إن قبلت الاشتقاق عند a فلدينا $\text{Lim } (f(x) - f(a))/(x - a) = f'(a)$

بالتعريف الإبسيلوني سنجد $- \xi <(f(x) - f(a))/(x - a) - f'(a) < \xi$

فإذا أخذنا $x - a > 0$ نجد

$-\xi (x - a) < f(x) - f(a) - (x - a) f'(a) < \xi (x - a)$

أي

$-\xi (x - a) < f(x) - (f(a) + (x - a) f'(a)) < \xi (x - a)$

وهذا ما نفسره بيانيا بالمماس عند a لمنحنى الدالة f : $y = (x - a) f'(a) + f(a)$

فنلاحظ هنا أن الاقتراب بعد أن كان بالإبسيلون في عبارة الاستمرار أصبح هنا $\xi (x - a)$

وهذا اقتراب أفضل لأن المقياس يصغر كلما اقتربنا بعكس الإبسيلون.



نكتب في الرياضيات ذلك عن طريق $f(x) = (x - a) f'(a) + f(a) + o(x - a)$

و $o(x - a)$ وهو o صغير نعني به باق يحقق $\lim o(x-a)/(x-a) = 0$

أي بالتعبير الإبسيلوني بجوار a

$$|o(x-a)| < \xi |x - a|$$

يسمى بالتقريب التآلفي نظرا لأنه تقريب هندسي لمنحنى الدالة عند a من مماسها هناك

و يعطى بالعبارة $f(x) = (x - a) f'(a) + f(a) + o(x - a)$

فإذا أردنا تقريب f عند قيمة أخرى b فلابد أن نختار المشتقة عند b

$$f(x) = (x - b) f'(b) + f(b) + o(x - b)$$

حتى يكون $o(x - b)$ صغيرا.

يمكننا تطبيق ذلك من أجل $f(x) = x^2$ عند 2 مثلا فنجد

$$f(x) = (x - 2) f'(2) + f(2) + o(x - 2)$$
$$= (x - 2) . 2 . 2 + 2^2 + o(x - 2)$$
$$= 4x - 4 + o(x - 2)$$

إذن يمكننا أن تقرب كل ما هو بجوار 2 أي يجب أن يكون $O(x - 2)$ صغيرا هناك من

يضع $x = a + h$ حتى يحصل على $f(x) = h f'(a) + f(a) + o(h)$

هكذا يكون التقريب دائما بـ h بجوار الصفر

والمسألة نفسها لكن الحسابات أبسط فلو أعدنا الحساب بالنسبة لتقريب x^2 بجوار 2 مع استعمال h سنجد

$$(2 + h)^2 = h . 2 .(2) + 4 + o(h)$$
$$= 4h + 4 + o(h)$$

إذن سنختار h صغيرا بالقدر الذي نريده وليكن $h = 0.01$ أي $x = 2.01$ فنجد

$$(2.001)^2 = 4 . 0.01 + 4 + o(0.01)$$
$$= 4.004 + o(0.01)$$

ولو قمنا بالحساب المباشر عبر التربيع سنجد $(2.001)^2 = 4.004001$ فتقريبنا جيد مع خطأ:

$$o(0.01) = 4.004001 - 4.004= 0.000001$$

الآن وقد جربنا مثالا سهلا لننتقل لما هو أصعب ، اللوغارتم مثلا وللتبسيط نأخذ $Ln(1+x)$

ولنقم بمحاولة حساب تقريب ل $Ln(2)$ لنكتب عبارة التقريب التآلفي عند $x = 0$

$$Ln(1+x) = x . Ln'(1+x) + Ln(1) + o(x)$$
$$= x/(1+x) + o(x)$$

نعوض الآن بواحد $Ln(2) = 1/2 + o(1)$ لكن لو حسبنا بالآلة الحاسبة سنجد $Ln(2)$

يقارب 0.6931

فتقريبنا $1/2$ ليس بجيد وذلك لأن $x=1$ بعيدة عن 0 فالتقريب يكون جيدا كلما اقتربنا من نقطة الاشتقاق

والتي هي هنا 0 .

لو حاولنا أن نقرب مثلا عند $x=0.01$ سنجد

$$Ln(1.001) = 0.01/1.001 + o(0.01)$$
$$= 0.00990099... + o(0.01)$$

أما بالآلة الحاسبة فنجد تقريبا ...0.00995 فنحن هنا بتقريب أفضل.

التقريبات تفيدنا في الواقع إذ نحن نتعامل مع كميات عشرية لذلك عند محاولة تطبيق الحسابات على الواقع لدوال ليست جبرية أو لا يمكن حسابها بجداء وضرب وطرح وقسمة نلجأ لتقريب صيغها عبر النهايات لدوال بسيطة نتقن حسابها و التي عادة ما تكون كثيرات حدود.

فالتقريب التآلفي هو أبسط هذه التقريبات إذ يقرب الدالة عند نقطة من مماسها فهو تقريب خطي.

هناك تقريبات من أنواع أخرى لكثيرات حدود أكبر درجة منها النشر المحدود مثلا فلدينا

$$e^x = 1/0! + 1/1!\, x + 1/2!\, x^2 + ... + 1/n!\, x^n + o(x^n)$$

وكما نلاحظ هنا أننا نستطيع اختيار خطأ يمكن مقارنته بـ x^n وهذا تقريب جيد جدا.

بل حتى الآلة الحاسبة تستعمل هذا النوع من التقريبات لحساب الدوال المألوفة.

التلميذ في الثانوي يدرس التقريب التآلفي لأنه بسيط لكنه لا يتعرض لمفهوم المقارنة

المقارنة Comparaison asymptotique الذي استعملنا منه ما يسمى بـ o صغير وهو يعني أنه عندما نكتب $f(x) = g(x) + o(x - a)$ أن $\lim o(x - a)/(x - a) = 0$

عندما يؤول x لـ a .

هناك ترميزات أخرى للمقارنة المقاربة يمكن الاطلاع عليها هنا

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Comparaison_asymptotique

في الثانوي يكتفي بوضع عبارة المماس

$$y = (x - a) f'(a) + f(a)$$

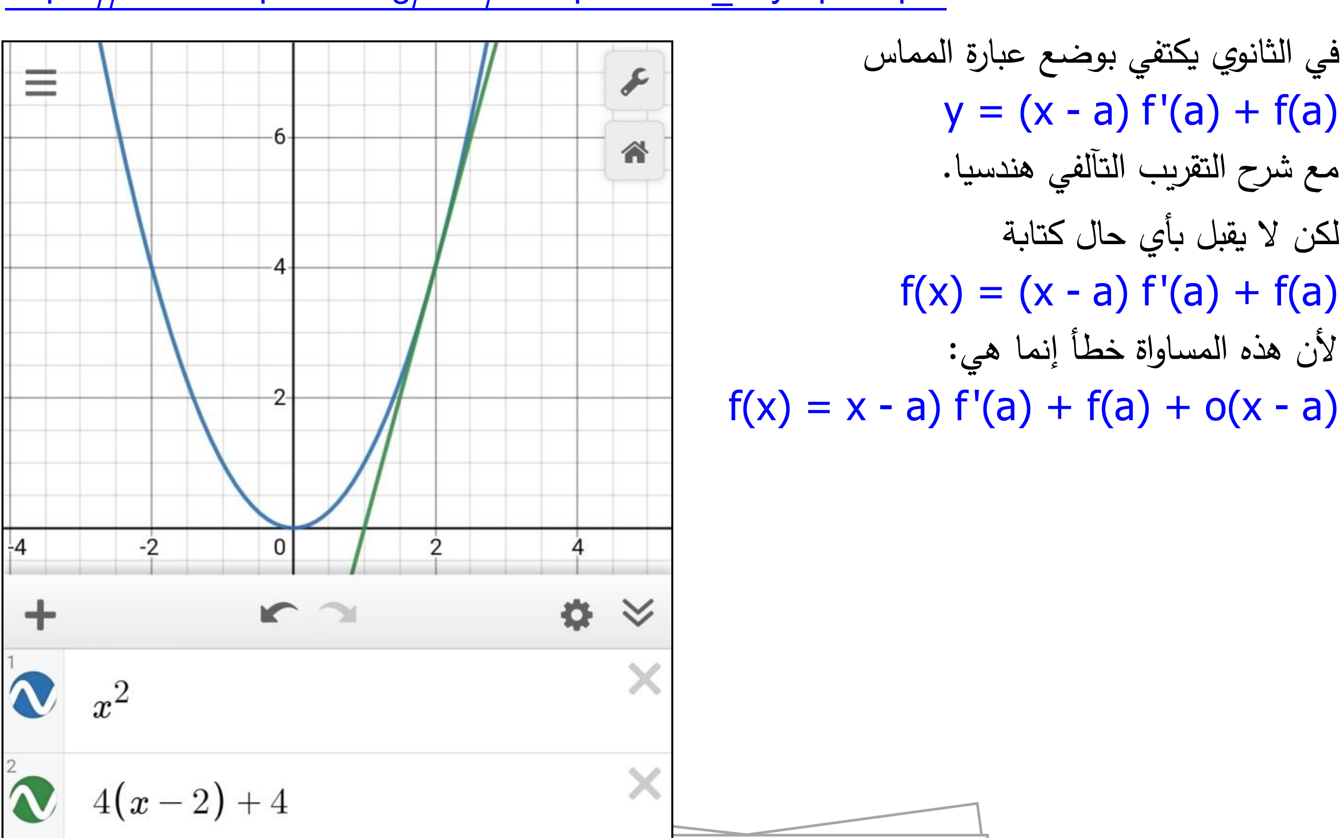
مع شرح التقريب التآلفي هندسيا.

لكن لا يقبل بأي حال كتابة

$$f(x) = (x - a) f'(a) + f(a)$$

لأن هذه المساواة خطأ إنما هي:

$$f(x) = x - a) f'(a) + f(a) + o(x - a)$$



الاشتقاق لماذا ؟

إن طبيعة البشر تجعلهم لا يدركون الأشياء جملة، لا يدركونها إلا واحدة بعد واحدة وبعدد منته فإذا أرادوا إدراك عدة أشياء قارنوا بينها.

لكن العقل البشري يعجز أمام **أمرين** : الأول الزمن والثاني العدد الهائل من الأشياء التي تبدوا للبشر وكأنها غير متقطعة.

أمام هذا العجز يقوم العقل البشري باستعمال اللاوعي مع العيش في الحاضر بالترتيب سابق ولاحق وذلك أن الشيء ما لم يتغير في الزمن يضعه العقل البشري في مكان اللاوعي كسابق باق على حاله سواء ثابت أو متحرك.

هذا نلاحظه عند قيامنا بأعمالنا اليومية كقيادة السيارة مثلا فمتى أرسل السائق السيارة في اتجاه واحد وضع ذلك في العقل اللاإرادي ثم قام بجانبه يعمل الأفعال الإرادية.

وهذا نلاحظه كذلك عند المشي فمتى اتجهنا في اتجاه معين اشتغلنا بالحديث مع من بجانبنا مع كون أرجلنا تسير بلا وعي في اتجاه محدد.

هذه الملاحظات التي قد تبدوا بديهية نستخلص منها عمليات معقدة عند تجريدها وتطبيقها على الواقع.

فمتى أردنا دراسة سير الأجرام مثلا يقوم عقلنا بتقطيع مسارها لقطع صغيرة مرتبة في الزمن حتى توافق الفهم البشري وكأن الجرم يسير نقطة نقطة فبذلك يمكننا إدراك حركتها.

لكن ما الذي يجعل الشيء يسير عندما ندفعه ولماذا الكتل الكبيرة تحتاج قوة أكبر لتحريكها ؟

الذي قام به الفيزيائي إسحاق نيوتن هو تجريد هذه الملاحظات حسب العقل البشري لتكميمها وإعطاء معادلات لتحديد مسارها.

فالذي يحرك الشيء الساكن هو القوة والقوة تعطي للشيء كمية سرعة حسب كتلته فكلما كانت الكتلة كبيرة احتجنا لقوة أكبر وكلما كانت القوة أكبر كانت السرعة أكبر إلا أن القوة التي نحتاجها لدفع الشيء لا نحتاجها مستمرة فما أن دفعنا الشيء اكتسب حركة ثابتة ما لم ندفعه أكثر.

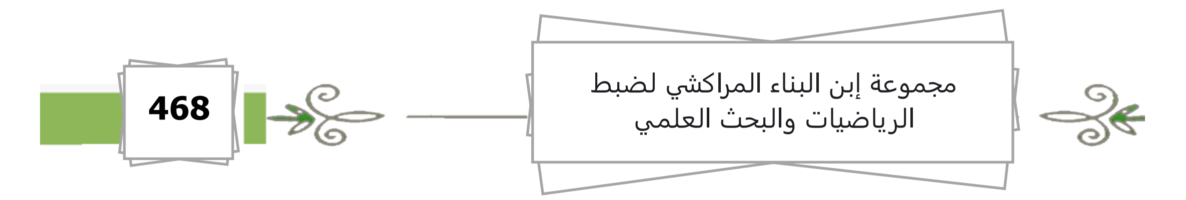
فإذا كممنا هذه المعطيات يمكننا إعطاء كمية للحركة تساوي الكتلة في السرعة والسرعة هي المسافة المقطوعة في الزمن.

فنحتاج قوة للحظة صغيرة جدا لتعطي فارقا في كمية الحركة أي:

F delta t = delta (M V)

القوة في زمن صغير تساوي التغير الصغير في كمية الحركة وهي الكتلة في السرعة وهنا نجد قانون نيوتن مجموع القوى يساوي الكتلة في التسارع.

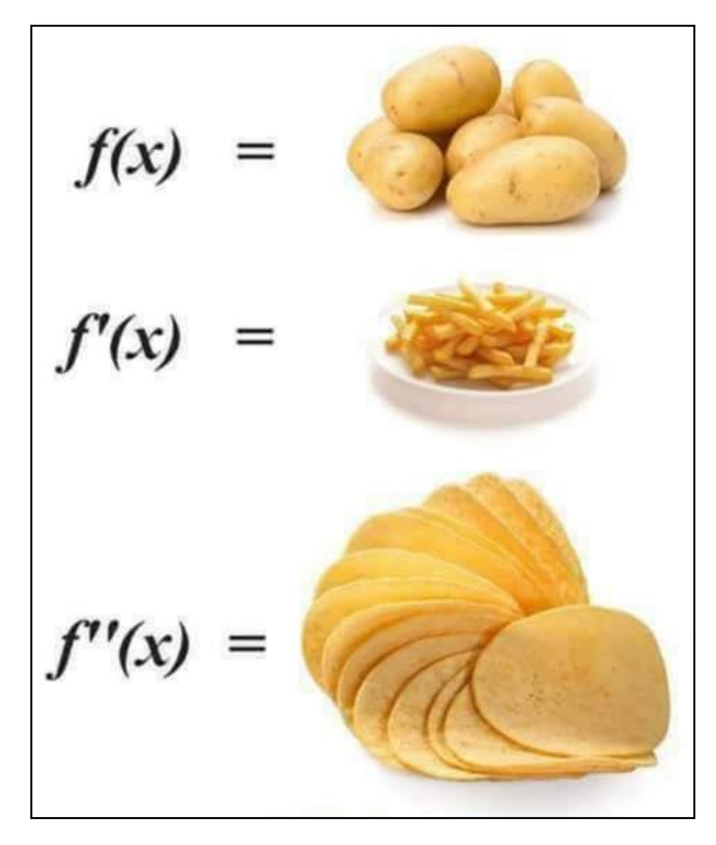
من هذه المعادلة نرى ظهور مفهوم الاشتقاق أو بالأحرى التفاضل فالتفاضل ما هو إلا اعتبار تغير الدالة كتغير دالة خطية أو بصيغة أخرى كأن الدالة تتحرك بزيادات خطية.

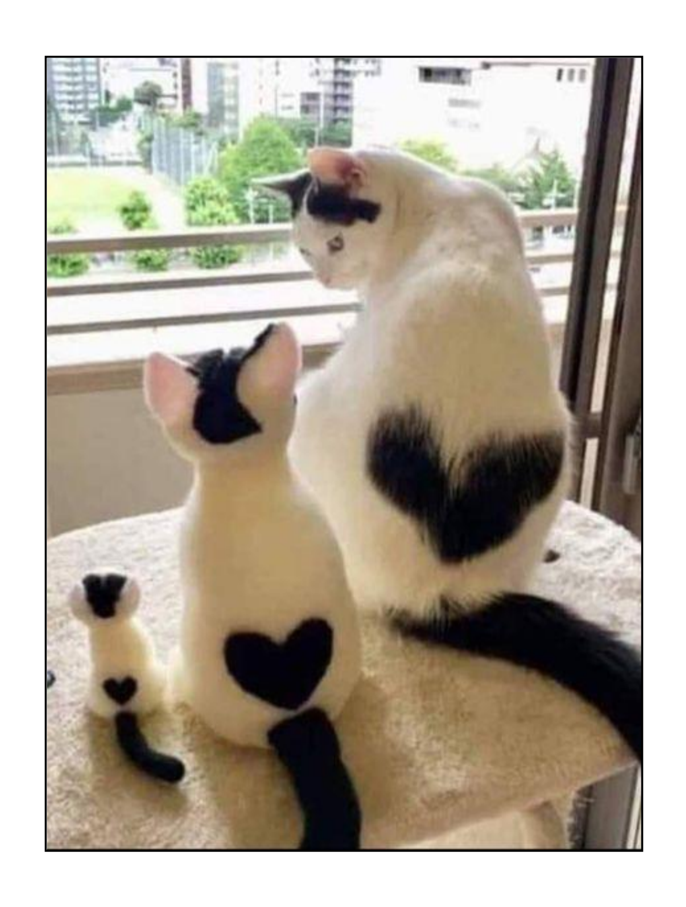


أي أننا نقرب منحنى الدالة من قطع مستقيمة صغير جدا متتابعة أو بتعبير رياضي المماس....
فمفهوم الاشتقاق في الحقيقة ما هو إلا نظرة البشر للتغير إذ البشر لا يمكنه إدراك التغير إلا عبر التغير الخطي من نقطة نحو نقطة فالتغير عند البشر ما هو إلا حالة سابقة وحالة لاحقة.
لكن ليوافق التغير الدالة لابد أن يكون في لحظة صغيرة جدا وهنا تظهر النهاية ويظهر مفهوم الاشتقاق أو التفاضل بصورة أعم.
إذا فهما هذا تبين لنا فوائد المشتقة ولماذا تعتبر كموجهة لمنحنى الدالة ولماذا ندرسها لرسم المنحنى فالمشتقة عند كل نقطة تعبر عن التقريب الخطي للدالة

$$d\, f(x) = f'(x)\, dx$$

او ما يعرف بالتقريب التآلفي.





النشر المحدود هو تقريب تآلفي متكرر فهو تقريب الدالة بمشتقتها والتي بدورها تقرب بمشتقتها وهكذا وهذا أصل اكتشافه.

يختلف النشر المحدود عن التقريب بكثيرات حدود ككثير حدود برنشتاين أنه تقريب مع باقي هندسي أي من درجة x^n وهذا يعني ان معاملات كثير الحدود ثابتة بتزايد درجة النشر على خلاف التقريب الاحتمالي أو التوافقي واللذان تتغير فيهما حدود كثير الحدود بتغير الدرجة.

كثيرات حدود برنشتاين هي تجسيد لمبرهنة ويرستراس والتي تقرب الدوال المستمرة على حامل متراص بمتتالية كثيرات حدود.

أما النشر المحدود فهو تقريب أقوى يتطلب قابلية الاشتقاق وإذا وجد فهو وحيد.

هندسيا النشر المحدود يعني ن التقارب ينطلق من نقطة ويسحب إليه منحنيات كثير الحدود من هذه النقطة مع زيادة درجة النشر كما هو ملاحظ في المنحنى وهذا على خلاف التقريبات بكثيرات الحدود الأخرى والتي تنسحب من نقاط مختلفة.

وجود باق هندسي يعطينا نصف قطر تقارب مما يمكننا من مقارنة الدالة بكثير حدود على مجال مع ثبوته عليها مما يضمن تقارب المشتقة كذلك ومشتقة المشتقة إلى درجة النشر وهذا أقوى من مجرد تقارب منتظم.

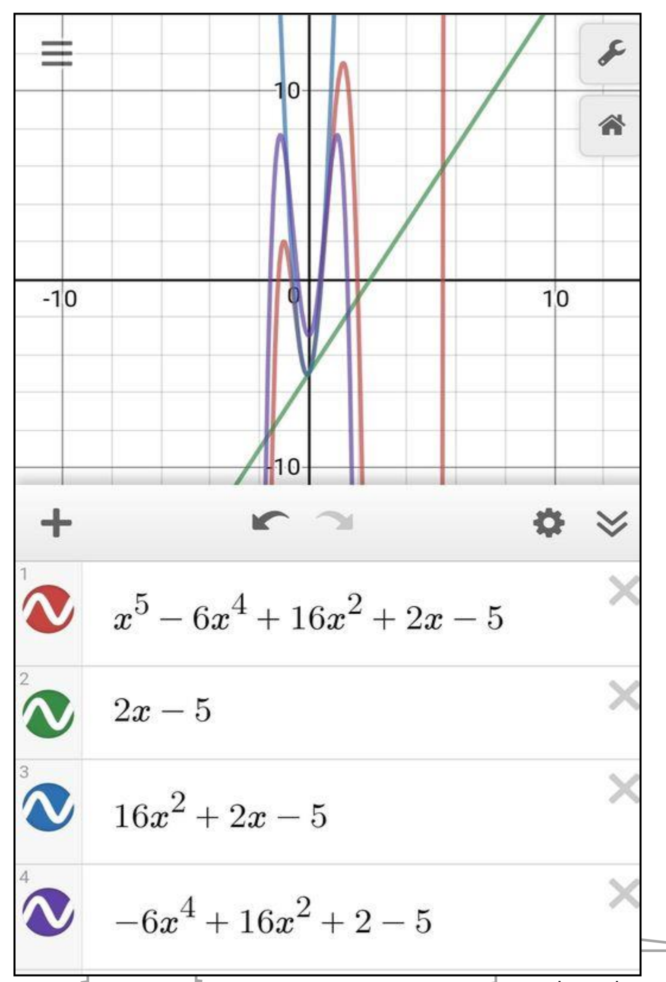
إذن النشر هو تقارب الدالة ومشتقاتها في مجال.

توجد دوال قابلة للاشتقاق لمالانهاية من مرة لكن نشرها لا يتقارب ماعدا عند المركز مثال ذلك الدالة الحقيقية المعرفة بالصيغة

$f(x) = e^{(-1/x^2)}$

على R^* والممدة بالصفر عند الصفر.

مشتقاتها معدومة عند الصفر مهما كانت الرتبة.



لنضبط الرياضيات معا : الفرق بين جذور كثير الحدود و أصفار الدالة، هل يوجد ما يسميه البعض بحل مضاعف ؟

مسألة الجذور والحلول والأصفار من المسائل التي كثر الخلط فيها لذلك يستوجب علينا لضبطها الرجوع للأساسيات بضبط التعاريف على نظرية المجموعاتZFC .

باستعراض سريع لبعض التعاريف التي نحتاجها لضبط هذا الموضوع سنرى أن المسألة بسيطة جدا.

فلنبدأ بكثير الحدود.

تعريف كثير الحدود:

لنعتبر الحقل K المزود بعمليتي الجمع والضرب، عادة ما يكون هذا الحقل R أو C لكن يمكننا اعتبار حقول أخرى ك Z/pZ حيث p أولي.

نسمي كثير الحدود P كل متتالية (a_n) عناصرها من K تنعدم ابتداء من رتبة ونسمى صيغته الكتابة

$$P(X) = a_m X^m + ... + a_0$$

حيث a_m هو أكبر حد غير معدوم في المتتالية (a_n) ونسمي m برتبة كثير الحدود أو درجته.

http://math.univ-lyon1.fr/.../02_3juillet_polynomes...

http://www.math.univ-toulouse.fr/.../Documents/polynomes.pdf

ملاحظة : هناك من يصطلح على رتبة كثير الحدود المعدوم بناقص مالانهاية.

مجموعة كثيرات الحدود على K تشكل حلقة إذا زودت بعمليتي الجمع والضرب (ينظر الروابط) نرمز لها بـ K[X] وكما هو معروف لدى الجميع يمكننا تحويل العمليات إلى خوارزميات على الصيغ مثل

$$(X + 1) (X - 1) = X^2 - 1$$

فالتعامل بصيغة كثير الحدود يسهل علينا الكثير من البراهين.

مفهوم كثير الحدود:

من ناحية المفهوم كثير الحدود هو تجريد لحسابات خطية من مزج قوى عدد X في الحقل K .

فكيفية الحساب الخطي بواسطة قوى X جردناها على شكل متتالية منتهية لمحاولة دراستها جبريا من حيث كيفية كتابتها.

لذلك مجموعة كثيرات الحدود تعتبر فضاء شعاعي أساسه وحيدات الحد من النوع X^n

يمكننا تعويض X في صيغة كثير الحدود بأي عدد من K لإنتاج عدد فيK .

بهذه الطريقة الحسابية يمكننا تعريف ما نسميه بدالة كثير الحدود.

فكثير الحدود نفسه هو تجريد لهذه العملية الحسابية.

تعريف جذر كثير حدود:

إذا أمكن تفكيك P غير معدوم في حلقة كثيرات الحدود بالشكل $P(X) = Q(X) . (x - a)$



حيث Q كثير حدود.

فنسمي a جذر لكثير الحدودP .

ويمكننا تعريف الجذر انطلاقا من دالة كثير الحدود بالعنصر الذي يعدمها فالتعريفان متكافئان فيمكن برهنة ذلك بسهولة عن طريق كتابة $P(X) = P(X) - P(a)$ ثم إخراج $X - a$ كعامل مشترك.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Racine_d%27un_polyn%C3%B4me

الجذر لفظ خاص بكثير الحدود فقط ولا نقول جذور دالة إنما هي جذور كثير الحدود وهي متعلقة بالتفكيك كما تقدم ذكره.

تعريف الجذر المضاعف:

نسمى رتبة جذر كثير حدود غير معدوم أكبر رتبة m غير معدوم يمكن بها تفكيك كثير الحدود P غير المعدوم في حقل كثيرات الحدود على الشكل $P(X) = Q(X)\,(X-a)^m$ حيث Q كثير حدود.

إذا كان m يساوي الواحد فالجذر بسيط وإن كان أكبر من ذلك فهو مضاعف.

مثال ذلك كثير الحدود P على الحقل $Z/2Z$

$P(X) = X^2+1$ يقبل 1 كجذر مضاعف ذلك أن $P(X) = (X+1)^2$ فلدينا

$$P(1) = 1^2+1 = 1+1 = 0$$

للتذكر حقل $Z/2Z$ هو حقل باقي القسمة على 2 وهو مكون من الصفر و الواحد ونظير الواحد هو نفسه أي $1+1=0$

سنقتصر فيما يلي على كثيرات الحدود الحقيقية إلا إذا أشير إلى خلاف ذلك.

مما تقدم ذكره يمكننا تعريف دالة كثير الحدود ونلاحظ عندها أنه إذا كان a جذر مضاعف لكثير حدود P فمشتق دالته وهو كثير حدود كذلك يقبل a كجذر

$$\begin{aligned} P(X) &= Q(X)\,(X - a)^m \Rightarrow \\ P'(X) &= Q'(X)\,(X - a)^m + m\,Q(x)\,(X - a)^{m-1} \\ &= (X - a)^{m-1}\,[Q'(X)\,(X - a) + m\,Q(X)] \end{aligned}$$

وهذا يقودنا لمحاولة تعميم هذا التعريف على الدوال.

تعريف أصفار دالة:

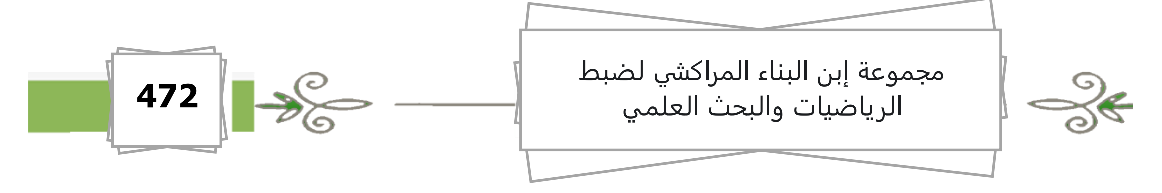
صفر دالة هو القيمة a التي تنعدم عندها لذلك نقول أصفار الدالة زيتا مثلا.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Z%C3%A9ro_d%27une_fonction

فصفر الدالة f يعود لحل المعادلة $f(x) = 0$

على غرار الجذر المضاعف نعرف الصفر المضاعف وهو صفر الدالة التي تنعدم فيه مشتقاتها إلى رتبة معينة أكبر أو يساوي 1 .

فنقول صفر بسيط إذا لم تنعدم المشتقة وصفر مضاعف إذا انعدمت المشتقة على الأقل عنده.



مثال ذلك الدالة المعرفة بالصيغة $f(x) = \ln(1+x^2)$ هي تقبل الصفر كصفر مضاعف.

تكمن أهمية الأصفار المضاعفة في دراسة الدالة بجوارها فإذا كان a صفر من الرتبة n لدالة f من صنف C^n فلدينا النهاية عند a باستعمال قاعدة لوبيتال مكررة n مرة :

$$\text{Lim } f(x)/(x - a)^n = 1/n!\ f^{(n)}(a)$$

حيث $f^{(n)}$ مشتقة f من الرتبة n .

في حالة كثيرات الحدود صفر الدالة وجذر الدالة يتوافقان وكذلك رتبهما.

من حيث المفهوم صفر الدالة هو طريقة تستعمل لتقريب الدالة من كثير الحدود محليا فهو تعميم للتقريب التآلفي لكنه أبسط من النشر.

بقي الآن مصطلح : حل مضاعف ؟

في الحقيقة لا يوجد شيء اسمه حل مضاعف إنما هذا من الخلط بين صيغة كثير الحدود ومعادلة كثير الحدود فالحل لا يتضاعف ذلك أن حلول معادلة هي مجموعة والعنصر في المجموعة لا يتضاعف.

تعريف المعادلة:

فالمعادلة هي قضية بمتغير معرفة على مجموعة من خلال المساواة.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation

مثال ذلك المعادلة التفاضلية المعرفة على الدوال الحقيقية القابلة للاشتقاق: $y' = y\ ,\ y(0) = 1$

نسمي حلول المعادلة المجموعة الجزئية المكونة من العناصر التي تحقق صحة القضية.

مثال ذلك مجموعة الأعداد الطبيعية نعرف عليها المعادلة التالية انطلاقا من مميزة أولر:

$$\varphi(n) = n - 1\ ,\ n > 1$$

مميزة أولر تعرف بأنها الدالة التي ترفق لكل عدد طبيعي n غير معدوم بعدد الأعداد الأولية معه من 1 إلى n .

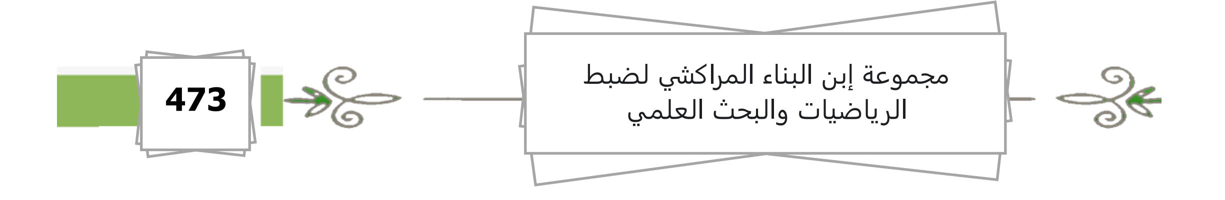
حلول معادلتنا هي بالضبط مجموعة الأعداد الأولية ذلك أن العدد n يكون أوليا إذا كان أوليا مع جميع الأعداد من 1 إلى $n - 1$.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Indicatrice_d%27Euler

بما أن المعادلة معرفة من قضية فيمكن صياغتها بأكثر من شكل مثال ذلك في الأعداد الحقيقية

$$\begin{aligned} x^2 = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x|} \times \sqrt{|x|} = 0 \\ \Leftrightarrow x^4 = 0 \\ \Leftrightarrow x^4+1 = 1 \\ \Leftrightarrow \ln(1+x^4) = 0 \end{aligned}$$

فإذا علمت ذلك فهمت التفريق بين الصياغة والمعادلة وأن حلول المعادلة مجموعة وأنه لا معنى لحل مضاعف في معادلة فلا الحل يتكرر داخل مجموعة ولا صياغة المعادلة وحيدة.



إنما وقع الخلط عند البعض من تعويض لفظ جذر مضاعف لكثير حدود بحل مضاعف.

وهو شيء يتساهل فيه إذا كان قائله يميز بين المفاهيم فالجذر هو حل كذلك للمعادلة المرفقة بكثير الحدود كما تقدم ذكره وتعويض لفظ بمرادفه جائز لغة ما دام المقصود معروف.

لكن إذا كان مستعمل اللفظ لا يميز بين المعادلة والصيغة وبين الجبر والتحليل فهذا خطأ في ضبط المفاهيم.

مثال ذلك القصاصة المرفقة مع المنشور (صورة 2) والتي حاول فيها الكاتب تعريف الحلول المضاعفة من غير ضبط فوقع في خلط شديد، فكان مما كتب فيها:

"كل معادلة يمكن كتابتها على أحد الشكلين $E1(x) . E2(x) = 0$ أو $E1(x) . E2(x) . E3(x) = 0$ حيث تنعدم $E1$ و $E2$ أو $E1$ و $E2$ و $E3$ عند a فإنها تقبل a كحل مضاعف"

وهذا **خلط** سببه عدم التفريق بين المعادلة والصيغة ولا معنى له رياضيا إذ كيفما كتبت معادلة حقيقية من الشكل $E(x) = 0$ فيمكن كتابتها بالشكل $E(x) . Iz(X) = 0$ حيث Iz دالة تأخذ القيمة 0 عند أصفار E و 1 عند غيرها.

فرياضيا ما كتب لا معنى له.

وحتى على المعادلات المألوفة في الثانوي مثل $\ln(1+x^2)=0$ فالصفر هنا صفر مضاعف لكن لا يمكن تفكيك صيغة المعادلة جبريا على المألوف.

وكما تقدم لدينا

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x|} \times \sqrt{|x|} = 0$$
$$\Leftrightarrow x^4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^4+1 = 1$$
$$\Leftrightarrow \ln(1+x^4) = 0$$

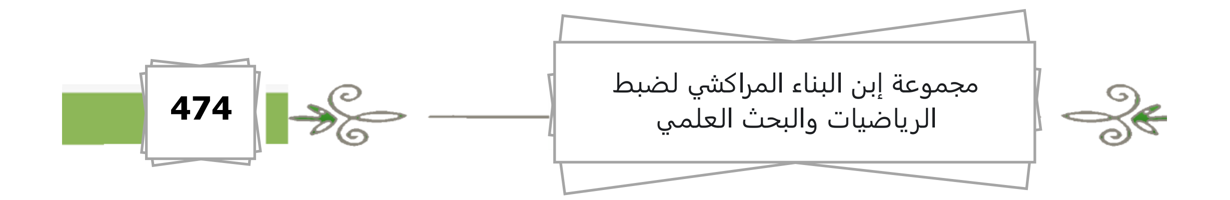
فالتفكيكات غير منتهية:

$$|x| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x|} \times \sqrt{|x|} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{|x|} \times \sqrt{|x|} \times \sqrt{|x|} \times \sqrt{|x|} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{|x|} \times \ldots \times \sqrt{|x|} = 0$$

إذن الخلط يأتي من عدم التفريق بين كثير الحدود والصيغة والمعادلة بل في القصاصة عدم تمييز بين الجبر والتحليل.

ومن الظاهر أن الكاتب حاول تجسيد تعريف أصفار الدالة من تجربته فلم يوفق في ذلك ، ذلك أنه اعتمد على حدسه بدل الرجوع إلى تعاريف أهل الرياضيات.

استعمال الصيغة طريقة من طرق تعريف الدوال والمعادلات وهي ليست جبرية فقط كما تقدم بمثال مميزة أولر.



فلدينا معادلات تكاملية وتفاضلية ....

النقص في فهم معنى المعادلة وحلولها راجع لعدم ضبط مفهوم المجموعة لذلك نجد جملا لا معنى لها كالمكتوبة في القصاصة السابقة الذكر:

"كل حلين متساويين لمعادلة "

فهذا لا معنى له لأن الحل عنصر من مجموعة تحقق صحة المساواة والعناصر في المجموعة لا تتكرر.

بالرجوع للتعريفات نجد المسألة سهلة جدا نلخصها في ما يلي:

جذور كثير الحدود غير معدوم تعرف عبر تفكيكه $P(X) = Q(X) . (X - a)^m$

حيث m غير معدوم وهي توافق القيم التي تنعدم عندها دالة كثير الحدود المرفقة به.

أكبر رتبة m غير معدومة التي يمكن بها تفكيك كثير الحدود على الشكل المذكور تسمى رتبة الجذر فإذا كانت أكبر من 1 يسمى الجذر بالمضاعف.

أصفار دالة تعرف تحليليا على غرار جذور كثير الحدود بالقيم التي تنعدم عندها الدالة.

إذا انعدمت كذلك مشتقات الدالة إلى رتبة معينة عند صفر من أصفارها فيسمى هذا الصفر بصفر مضاعف.

أصفار الدالة هي تعميم تحليلي لجذور كثير الحدود.

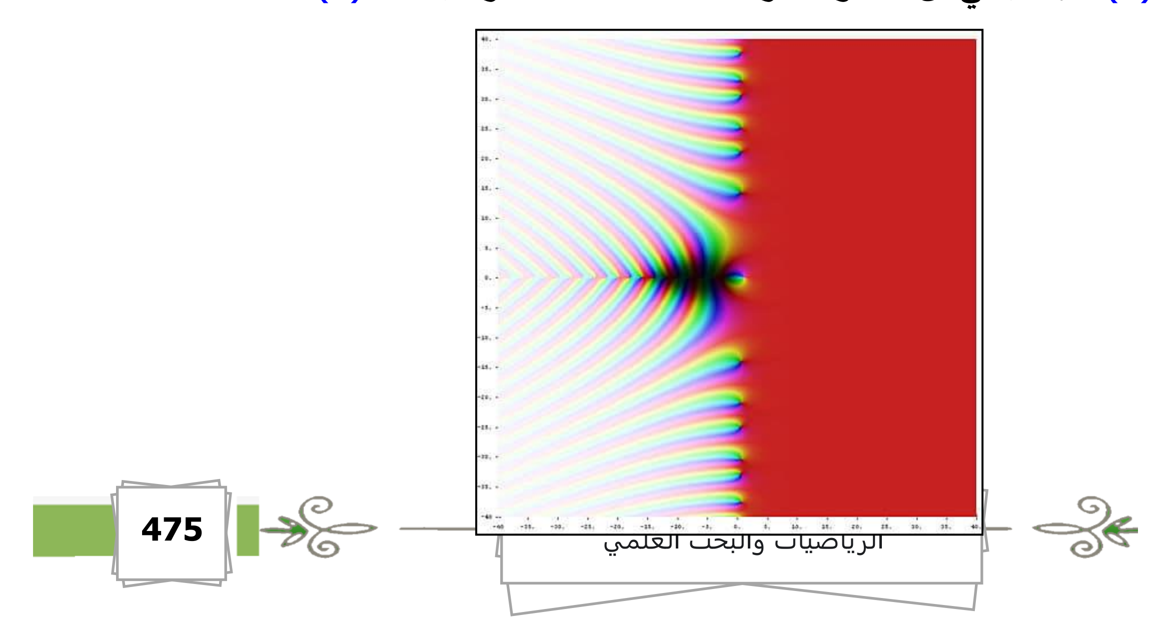
لا يوجد شيء اسمه حل مضاعف فالحلول لا تتضاعف مثال ذلك المعادلة الحقيقية $X^2 -2X + 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا هو 1 .

كذلك 1 يمثل جذرا مضاعفا لكثير الحدود $P(X) = X^2 - 2X + 1$ و 1 يمثل صفرا مضاعفا للدالة المعرفة بالصيغة $Ln(X^2 - 2X + 2)$ أنظر التمثيل البياني في الصور.

ملاحظة:

عندما نحرك مستقيم أفقي في معلم متعامد ومتجانس معادلته $y = c$ ونجده يلمس منحنى دالة f قابلة للاشتقاق في نقطة a من غير أن يخترقه فهذا يعني أن هناك ذروة محلية وهذا مماسها أي أن المشتقة تنعدم $f'(a) = 0$

وبما أن $f(a) = c$ فهذا يعني أن a هو صفر مضاعف للدالة المعرفة بـ $f(x) - c$



قصاصة كمثال عن قلة الضبط وعدم التفريق بين الجبر والتحليل

1. هناك من لا يميز بين الجذور والحلول بصفة عامة **(غموض)**.
2. هناك من يعتقد جازما أن " المضاعف" صفة خاصة بالجذور دون الحلول **(ليس)**.
3. هناك من لا يعلم أن الحل المضاعف يمكن أن يكون لمتراجحة **(تصور خاطئ)**.
4. أغلبية المتفاعلين انصبت تدخلاتهم حول عبارات على شكل كثيرات الحدود أو نحت نحو التفسير البياني دون مراعاة لمتطلبات ذلك وخاصة الذين ربطوا الأمر بالمماس **(تصور خاطئ)**.
5. كما أن فيه من ربط الحل المضاعف بانعدام المشتقة الأولى من أجل قيمته **(تصور خاطئ)**.
6. هناك أيضا من ربط الحل المضاعف برتبة التضاعف (*l'ordre de multiplicité*) الخاص بالجذور **(الثلاثة معا)**.
7. أنبه لقاعدة رياضياتية مهمة، وهي : من أجل كل عددين حقيقيين a و b وكل عدد طبيعي n غير معدوم، فإن: $(a^n=b^n)$ تكافئ [$(a=b)$ لما n فردي أو $(|a|=|b|)$ لما n زوجي)].
8. الجذور خاصة فقط بكثيرات الحدود، في حين الحلول خاصة فقط بالمعادلات أو المتراجحات.

ثانيا إليكم إجابة لأسئلة المنشور الأربعة (من منظور جبري):

1. كل حلين متساويين لمعادلة أو متراجحة، يسميان حلا مضاعفا.

أمثلة:

أ. الحل المضاعف للمعادلة: $x(e^x-1)=0$ هو "0" الصفر.

ب. الحل المضاعف للمعادلة: $(e^x-e)(x+2)\ln x=0$ هو "1" واحد.

تنبيه: كل معادلة يمكن كتابتها على أحد الشكلين: $E_1(x)\times E_2(x)=0$ أو $E_1(x)\times E_2(x)\times E_3(x)=0$ حيث $E_1(\alpha)=0$ و $E_2(\alpha)=0$ و $E_3(\alpha)\neq 0$ فإنها تقبل α كحل مضاعف.

ج. الحل المضاعف للمتراجحة: $|\ln(x-1)|\times\sqrt{|2-x|}\leq 0$ هو "2" اثنان.

2. الجذر المضاعف لأي كثير حدود $P(x)$ هو حل مضاعف للمعادلة $P(x)=0$.
3. الحل البسيط عبارة عن حل واحد، بينما الحل المضاعف عبارة عن حلين متساويين.
4. كلمة "مضاعف"، تفيد جبريا في عدد الحلول. فمثلا، إذا قبلت معادلة حل مضاعفا α وحلين آخرين متمايزين β و γ نقول أن المعادلة تقبل أربعة حلول، في حين مجموعة الحلول هي: $S=\{\alpha;\beta;\gamma\}$ يظهر وكأن عدد الحلول ثلاثة (عدد الحلول أكبر هنا من عدد عناصر مجموعة الحلول ب واحد).

1 Les polynômes

Dans toute la suite, $\mathbf{K}$ désignera un corps (commutatif). Penser à

$$\begin{cases} \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Q} \text{ de caractéristique } 0 : & k\times 1=0 \Leftrightarrow k=0 \\ \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \text{ de caractéristique } p \ (p \text{ premier}) : & k\times 1=0 \Leftrightarrow k\in p\mathbf{Z} \end{cases}$$

Une liste de définitions/vocabulaires :

1. Un *polynôme* P à coefficients dans $\mathbf{K}$ est une « suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ indexée sur $\mathbf{N}$ d'éléments de $\mathbf{K}$ tous nuls sauf un nombre fini » (les *coefficients* de P). Plus habituellement, on note

$$P=\sum_{k=0}^{d} a_k X^k = a_d X^d + \ldots + a_1 X + a_0.$$

Dans tout ce chapitre K désigne les corps $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1 Définition

Je soupçonne que tout lecteur de ce cours a déjà une idée de ce qu'est un polynôme. Il a notamment fréquenté l'«indéterminée» X sans que cela ne lui pose de problème. Mais s'est-il demandé si on lui a un jour défini proprement cette indéterminée ? Je vais m'attacher ici à fournir une définition «propre» de l'indéterminée X. Cela va me conduire à tomber dans un des travers du matheux de base : je vais être, dans un premier temps, un peu **formel**. I am so sorry !

3.1.1 Définition de l'anneau des polynômes

Définition 3.1 *Un polynôme à coefficients dans K est une suite d'éléments de K nulles à partir d'un certain rang.*

On munit maintenant l'ensemble des polynômes de trois lois :

•La somme :

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) \overset{\text{déf.}}{=} (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots).$$

•Le produit :

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \times (b_0, b_1, b_2, \dots) \overset{\text{déf.}}{=} (c_0, c_1, c_2, \dots),$$

avec :

$$\forall n \geqslant 0, \qquad c_n \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

•Le produit par un scalaire : pour tout $\lambda \in K$:

$$\lambda \times (a_0, a_1, a_2, \dots) \overset{\text{déf.}}{=} (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \dots).$$

Définition équivalente[1] — Une racine dans A du polynôme P est un élément α de A tel que $P(X)$ soit divisible par $X - \alpha$ (dans $A[X]$).

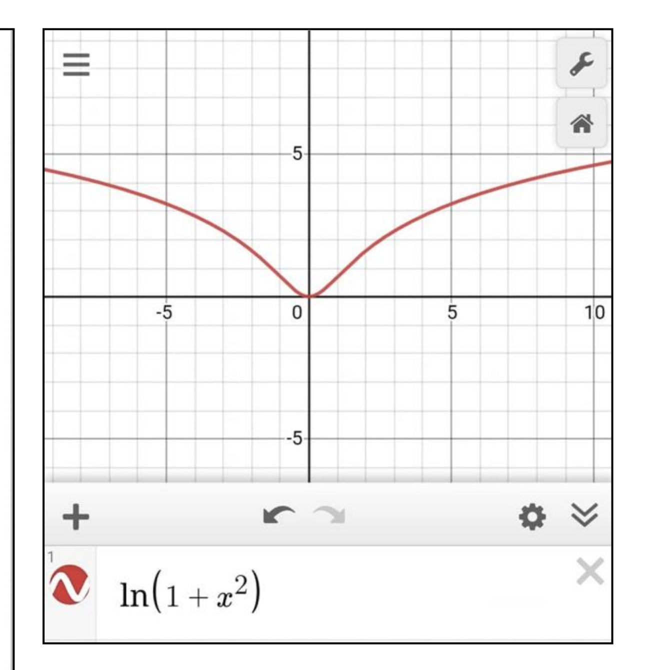
Définition de racine[1],[2] — Une racine dans A du polynôme P est un élément α de A tel que, si l'on substitue à l'indéterminée X la valeur α, on obtient une expression nulle dans A.

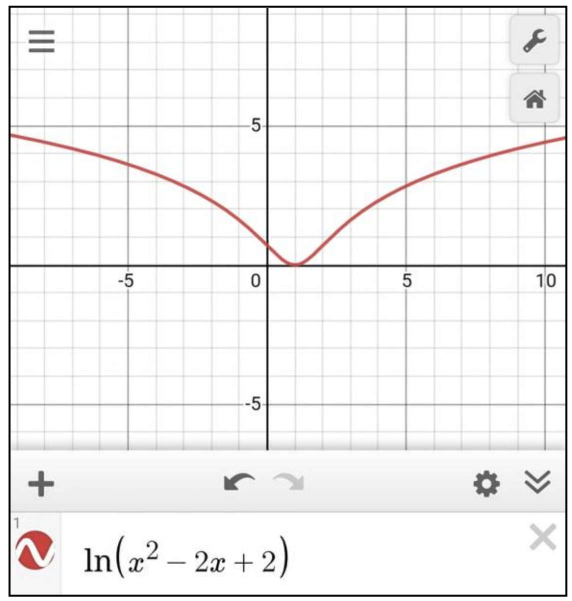
- $\varphi(8) = 4$ car parmi les nombres de 1 à 8, seuls les quatre nombres 1, 3, 5 et 7 sont premiers avec 8 ;
- $\varphi(12) = 4$ car parmi les nombres de 1 à 12, seuls les quatre nombres 1, 5, 7 et 11 sont premiers avec 12 ;
- un entier $p > 1$ est premier si et seulement si *tous* les nombres de 1 à $p - 1$ sont premiers avec p, c.-à-d. si et seulement si $\varphi(p) = p - 1$;
- $\varphi(1) = 1$ car 1 est premier avec lui-même (c'est le seul entier naturel qui vérifie cette propriété, si bien que pour tout entier $n > 1$, on peut remplacer non seulement $m \in \mathbb{N}^*$ par $m \in \mathbb{N}$ mais $m \leq n$ par $m < n$, dans la définition ci-dessus de $\varphi(n)$).

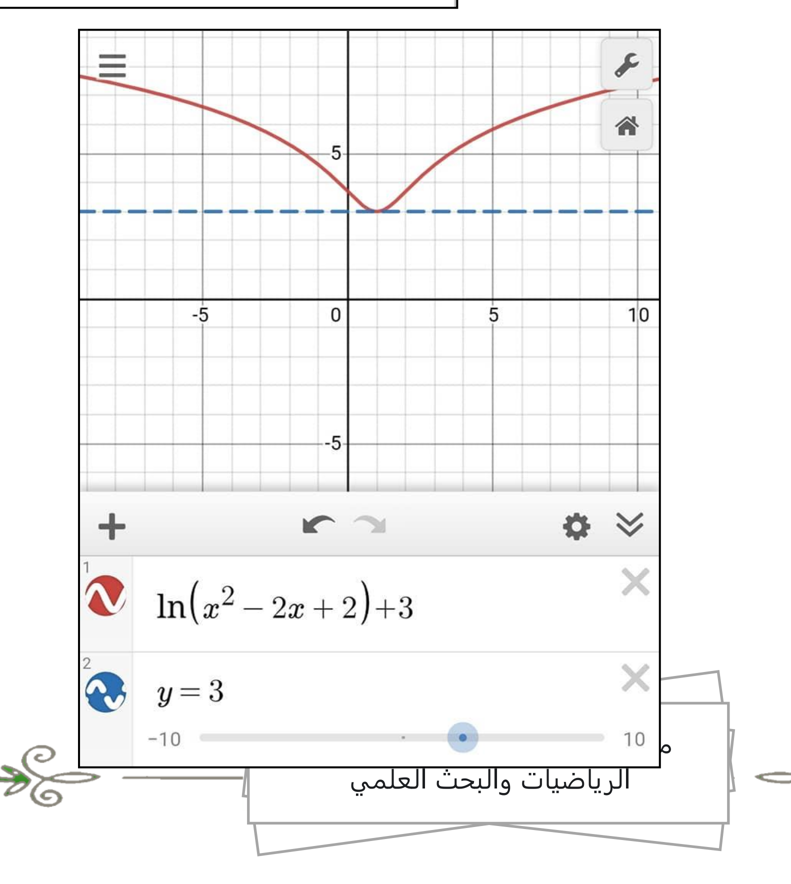


Ordre de multiplicité, racine simple, racine multiple[1] — Si P est non nul alors, pour tout élément α de A :

- le plus grand entier m tel que $P(X)$ soit divisible par $(X - \alpha)^m$ est appelé l'ordre, ou la multiplicité, de α relativement à P ;
- cet entier m est caractérisé par l'existence d'un polynôme Q tel que $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$ et $Q(\alpha) \neq 0$;
- on dit que α est racine simple de P si $m = 1$, et racine multiple si $m > 1$.







ما لم يذكره الأستاذ للتلميذ حول الدوال المثلثية

بسم الله الرحمن الرحيم

التلميذ : يا أستاذ حدثني عن الدوال المثلثية ؟

الأستاذ : يا ولدي ما الدوال المثلثية إلا ما تراه حولك من تناسق الفضاء.

التلميذ : كيف ذلك ؟

الأستاذ : يا ولدي لن أوجع رأسك بتعريف هذه الدوال و حساباتها فقد أشبعتكم الدراسة بذلك لكن سأخبرك عنها بما لم يحدثك به قبل أستاذ، لكن أخبرني من أين يأتي الظل ؟

التلميذ : عندما ترسل الشمس الضوء فالضوء إذا اصطدم بشيء لا يمر مما يجعل ما بعده مظلما فهذا ما نراه على سطح الأرض

الأستاذ : لكن لما ظلك أقصر من ظل الشجرة ؟

التلميذ : لأن الشجرة أطول فظل الشيء يتناسب مع طوله.

الأستاذ : هذه الملاحظة مهمة جدا فقد جمعت بين ارتفاع الشيء و طول الظل فوق الأرض فكلاهما طول لكن أحدهما في بعد الارتفاع و الثاني في بعد السطح، فقولك أن هناك تناسبا بين الطولين ما يعني إلا أن فضاءنا متجانس وأن الأبعاد تؤثر في بعضها فهي غير منفصلة عن بعضها، فأنظر مثلا، لو أخذت عصا فأشرت بها شرقا ثم شمالا ثم وجهتها للأعلى فهل يتغير طولها ؟

التلميذ : لا ، لا يتغير

الأستاذ : كون الطول لا يتغير حسب الأبعاد يعني أن الطول كخاصية في كوننا بين الأبعاد متجانسة أي له نفس القواعد و هذا التجانس يظهر جليا في مبرهنة فيثاغورث ألا ترى أن مربع طول الضلعين في مثلث قائم يساوي مربع طول الوتر و كل من الضلعين في بعد مختلف أما الوتر فهو مكون من البعدين، فهذه المبرهنة ما كانت لتكون لولا تجانس الفضاء ، هذا ما نسميه الفضاء الإقليدي.

لقد لاحظ الإنسان منذ القدم أن الشمس عندما تشرق يحدث ضوؤها ظلا للأشياء و أن الظل يطول و يقصر حسب موضع الشمس في السماء، كما أنهم لاحظوا أنه عندما تكون الشمس في موضع فطول ظل الشيء يتناسب مع طول الشيء أي إذا كان لك شجرة طولها مترين و أخرى متر فسيكون طول ظل الأولى ضعف طول ظل الثانية.

قد يبدو الأمر بديهيا لكن استعمالاته مكنت البشر من القيام بالعديد من الأشياء كحساب طول الجبال مثلا إذ يكفي أن تحسب طول ظل الجبل لتعرف طول الجبل، و كصناعة الساعات الشمسية، إذ يكفي معرفة طول شيء لتعرف موضع الشمس في السماء فتحدد به الساعة.



عندما لاحظ القدماء الظل و الشمس فأول شيء قاموا به هو محاولة فهم هذه الخاصية فالبشر بطبعهم عندما يرون مسائل متشابهة يقربون بينها فأنت مثلا يا ولدي لو قلت لك هذه الكلمات : برتقالة، تفاحة، قمر فماذا يتبادر إلى ذهنك ؟

التلميذ : كلها كروية

الأستاذ : ها أنت بمجرد جمع أشياء متشابهة استطعت وصفها و إيجاد وصف مشترك بينها فجعلت له وجودا في ذهنك فكلها كروية، فهذه هي الرياضيات، ما تقوم به هو النظر إلى هذه الأوصاف فتجردها و تعطيها مفهوما رياضيا و عليه تبني مبرهنات فتقول عندما البطيخة تتدحرج لا لأن لونها أخضر إنما تتدحرج لأنها كروية فأي شيء كروي ستحكم عليه بالتدحرج.

ما فعله القدماء لما شاهدوا أن ارتفاع الجسم و طول الظل هو تجريد المفهوم و محاولة رسمه ، فأصبح في ذهنهم مجرد مثلث قائم إذ الضلع القائم هو ارتفاع الشيء و الضلع النائم هو طول الظل و الوتر هي أشعة الشمس....

التلميذ : لكن لماذا قاموا بذلك ؟

الأستاذ : لأنك متى عرفت على ما تقوم الظواهر الطبيعية أمكنك عزل هذه الخصائص و دراستها فتثبت أن كل ظاهرة تظهر فيها هذه الخصائص تعطي نفس النتائج فالمسألة لا تعلق إلا بارتفاع الشيء و طول الظل كما قلت سابقا أن الكرة تتدحرج لأنها كروية فتحكم بذلك على كل جسم كروي.

قام البابليون من حوالي أربعة آلاف سنة بصناعة جداول تعطي طول الضلعين القائمين في المثلث ذلك أن القسمة لم تكن متطورة كاليوم ، ففي زمانهم يضعون جداول لكل طول ارتفاع يقابلونه بطول ضلع فبهذه الطريقة يستطيعون الحساب و التحويل من طول لطول.

التلميذ : أليس هذا تطبيق لكل طول يرفق طول ؟

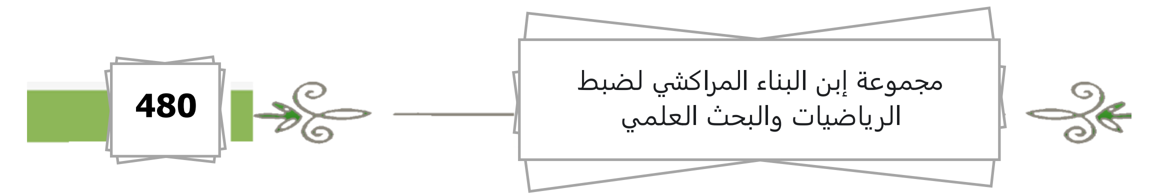
الأستاذ : نعم يا ولدي إنما جده الأول فيمكن مقارنته بالديناصور.

التلميذ : لكن أين الزاوية ؟

الأستاذ : نعم كان لابد من إعطاء مفهوم لضوء الشمس مقابل ارتفاع الأشياء فكان من السهل ملاحظة أنه عندما تنظر للشيء ثم للشمس فأنت تقوم برفع عينيك و رأسك فقط بشكل دائري لكن بين هذه الملاحظة إلى الوصول لمفهوم الزاوية طريق طويلة.

الإنسان كعادته يرسم ما يراه على سطح فمتى أردت تمثيل دوران الشمس في السماء فتجرده فستحصل مباشرة على مفهوم الدائرة و عند النظر إلى المثلث ترى مباشرة أن الوتر مع الضلع القائم يشكل شيئا فبينهما كأنها فرجة تتغير بدوران الشمس فعندما تكون الشمس في ارتفاع معين في السماء فهذه الفرجة هي نفسها في جميع المثلثات الناتجة من الأشياء و ظلالها، و متى لاحظ البابليون ذلك أعطوا وجودا لهذه الخاصية.

التلميذ : كيف قاموا بذلك ؟



الأستاذ : طريقتهم بدائية ، ما فعلوه سهل جدا، رسموا دائرة و قسموها على ستين قطعة ، فكلما رفعت الوتر لقطعة من القوس زدت في فرجته فصنعت زاوية.

التلميذ : أليس هذا قيس الزاوية.

الأستاذ : نعم يا ولدي لكن للوصول لتجريد الأشياء الذي وصلنا إليه اليوم من التفريق بين الزاوية و الضلعين و قيسها لابد من قرون من العمل.

التلميذ : إذن من تقسيم البابليين جاءت الساعات و الثواني ؟

الأستاذ : نعم حسابنا الزمني الحالي هو ميراث من عند البابليين، في الحقيقة قد ورثنا الكثير من الأمور من عشرات القرون من ماضي البشرية.

ما لاحظه البابليون لاحظه غيرهم كالإغريق و الهنود فكلهم ربطوا تغير الظل بالمثلثات و ساعدهم على ذلك مراقبة النجوم.

فمثل البابليين قام الإغريق بربط طول القوس من الدائرة بوتره فكما ترى الكل متفق أن هناك شيء بين قوس الدائرة و أطوال الأضلاع لكن كل كيف يراه.

لكن التقدم الأكبر في ميدان الدوال الجيبية كان من نصيب الهنود فهم أول من عرف ما نسميه اليوم بجيب الزاوية، إذ ربط الهنود بين نصف القوس أي نصف الزاوية و نصف وترها فهذا لو ترجمناه بالرسم وجدناه الجيب المعروف لدينا لأن نصف الوتر و نصف القوس لرسمهما تحتاج لمحور أي زاوية قائمة.

بل عرف الهنود كذلك جيب التمام فصنعوا جداول حسابية تربط بين أطوال الأقواس و أنصاف الأوتار.

التلميذ : لكن لماذا دائما طول القوس ؟

الأستاذ : لأن القوس مربوط ببعدين فلا يمكنك رسم قوس إلا إذا استدرت أي تعاملت بأكثر من بعد في الفضاء فالقوس يمثل تجانس الأبعاد مع بعضها و ما الزاوية إلا شيء من هذا فالزاوية هي نتيجة شعاعين في الفضاء في بعدين مختلفين فكان قياس هذا التداخل بينهما لا يتم إلا بالقوس، فاحفظ هذه النقطة : تجانس الفضاء يظهر في قياس تداخل الأبعاد فيما بينها أو تأثيرها على بعضها لأني سأقص عليك لاحقا ماذا أصبحت هذه الفكرة فهي أكبر من مجرد زاوية نراها في واقعنا.

ورث العرب حساب المثلثات عن الهنود فدرسوه ، لكن صعوبة حساب القيم في الجداول دفعهم إلى البحث عن طرق أسهل لاستنتاجها من بعضها و من هنا ظهرت القواعد المثلثية، فهذه القواعد ما هي إلا لتسهيل حساب الجيوب ببعضها فمتى حسبت بعض قيم جيوب الزوايا أمكن استنتاج الباقي.

لكن بوضعهم هذه الجداول و استنتاج العلاقات بين الزوايا و قيم الدوال المثلثية كانوا اخترعوا بداية مفهومين : مفهوم الدالة و مفهوم اللوغارتم.

التلميذ : و لكن أين اللوغارتم ؟

الأستاذ : عندما تقول أن جمع جيبي تمام يساوي إثنين ضرب جيبي تمام فقد قمت بتحويل عملية جمع إلى



ضرب ، ألا يذكرك ذلك بشيء ؟

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin((a+b)/2)\cos((a-b)/2)$$

التلميذ : أه نعم اللوغارتم فمجموع اللوغارتمين يساوي لوغارتم الضرب

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b) \; ; \; a , b > 0$$

الأستاذ : نعم فقد قام العرب بتسهيل حساب المثلثات باكتشاف الكثير من العلاقات بين الدوال المثلثية و جيوبها عبر عمليات حسابية سهلة.

لكن الذي ساعد العرب في حساباتهم تبنيهم للكتابة العشرية في التقريبات فمع تطور علم الحساب عندهم وضعوا جداول دقيقة بأربع أرقام بعد الفاصلة و هذا ما مهد لظهور مفهوم الدوال الحقيقية فالدالة ما هي في الواقع إلا جدول حسابي لكل قيمة تعطيك قيمة عددية نعبر عليها واقعيا بقيمة عشرية تقريبية.

كما استعملوا العلاقات المثلثية لتحويل الجمع بين قيم الجيوب إلى ضرب والعكس فيعتبر هذا تمهيد لجداول اللوغارتم التي تحول الضرب إلى جمع.

ورث الأوروبيون علم المثلثات من العرب و مع تطويرهم لمجموعة الأعداد الحقيقية و مفهوم الدالة و النهايات و الاستمرار و الاشتقاق بلغت الدوال الجيبية نضوجها فأصبحت ما تراه اليوم من دوال مثلثية معرفة بالدائرة المثلثية بعد أن كانت مرتبطة بالمثلثات و بحسابات حقيقية.

ثم حسبوا عليها النهايات و الاشتقاق لكنها بقيت دوال مجردة ليست سهلة الحساب ككثيرات الحدود، و هنا قام الأوروبيون بقفزتين نوعيتين في المفاهيم

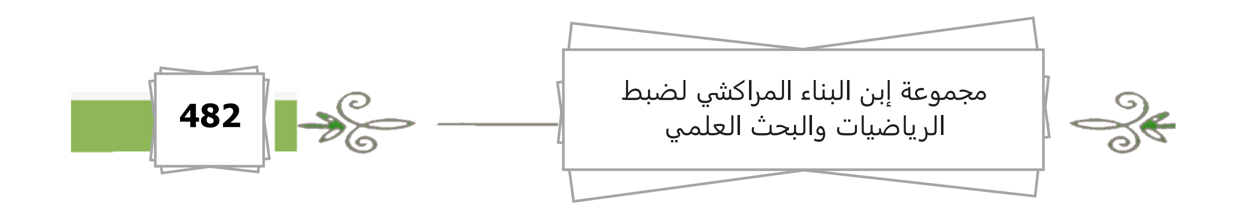
الأولى : بما أن الاشتقاق مجرد تقريب دالة بدالة تآلفية قاموا بتقريب الدوال الجيبية بذلك بل ذهبوا إلى أبعد من ذلك ذهبوا إلى تقريبها بكثير حدود و هذا ما نسميه النشر فبهذه الطريقة خرجوا من الجداول الحسابية التي تعتمد على أشكال هندسية إلى حسابات تحليلية بكثيرات حدود !!! و من هنا تركت الدوال الجيبيه الهندسة لتلتحق بالتحليل.

بل أكثر من ذلك ، استطاع أولر انطلاقا من نشر الدالة ربط الدوال الأسية بالدوال الجيبية عن طريق الأعداد العقدية فبالنشر أصبحنا نتعامل مع الدوال الجيبية ككثيرات حدود و كدوال أسية وهنا كان ميلاد التحليل العقدي.

والقفزة الثانية وهي الأعظم : عندما درس الأوروبيون الحركة فسرعان ما ربطوا الدوال المثلثية بالموجات، و تداخل الموجات في بعضها، ألا يذكرك ذلك بشيء ؟

التلميذ : أليس هذه مسألة تأثير الأبعاد في بعضها ؟

الأستاذ : نعم، فتداخل موجتين يشكل موجة هذا ملاحظ على سطوح البرك، لكن الموجة ربطوها بالدوال الجيبية فمن يقول تداخل موجات سيقول تداخل دوال و ما تداخل الدوال إلا جمع بينهم بطريقة أو بأخرى.



سنة 1750 نتيجة دراسة الأوتار المهتزة توصل آلمبر، أولر و برنولي إلى نتائج مختلفة فمنهم من تحصل على معادلة موجية و آخر معادلة بمجموع دوال مثلثية فكان لابد من البحث عن جمع للمفهومين، و كما يبدوا من النتيجتين للمسألة علاقة بالدوال الدورية.

سنة 1807 إلى سنة 1811 قام فوريه بدراسة معادلة الحرارة فأدخل فيها مجاميع الدوال المثلثية المسماة مجاميع فوريه حيث أعلن أن كل دالة يمكن كتابتها كمجموع غير منته لعوامل حقيقية مضروبة في دوال مثلثية.

و إن كان ما قاله فورييه ليس على عمومه إلا أن زمانه لم تكن الدوال المعروفة تخرج عن الدوال المستمرة و القابلة للاشتقاق في غالبية مجموعة تعريفها.

لم يكن يعلم فورييه حينها أن ما قام به يعتبر بداية ولادة الحساب التكاملي الحديث لكن كان يجب انتظار ريمان ليعرف التكامل كما نعرفه اليوم.

التلميذ : لكن ما علاقة الدوال المثلثية بتكامل ريمان ؟

عندما يقول فورييه أن أي دالة يمكن أن تكتب كمجاميع غير منتهية لدوال مثلثية فهو يقول أن أي دالة هي مجرد تداخل موجات لكن تحتاج لكل منها لمعامل تأثير، هذا المعامل هو عدد حقيقي حسابه يحتاج لتكامل و هذا الذي فعله ريمان فلحساب هذا المعامل اضطر إلى تعريف تكامل ريمان الشهير.

فلاحظ يا ولدي كيف بدأ الإنسان من مجرد تأثير بعد في بعد لاحظه من ظل شيء تحت ضوء الشمس إلى تداخل تأثيرات أمواج فيبدو أن عالمنا مكون من تأثيرات مختلفة لظواهر أولية تظهر لنا على شكل ظواهر طبيعية.

وهذا ما توصل إليه العلم الحديث فما نسميه ميكانيك الكم ما هو إلا وليد لهذه الفكرة.

ففي بداية القرن العشرين اكتشف العلماء الطبيعة الكمية الموجية للضوء ثم عمموها للكثير من الجسيمات فظهر بما يسمى بميكانيك الكم فكان لزاما على الفيزيائيين البحث عن إطار رياضي للتعبير عن هذا العلم الحديث الذي يقوم على تداخل تأثيرات الجسيمات كموجات بينها، و هنا قام أتباع هلبرت باختراع نوع جديد من الفضاءات سموه على اسمه.

لو تتذكر قلنا أن هذه الدوال الجيبية ما تعبر إلا على تأثير بعد في بعد أو شعاع في شعاع، فهل يذكرك ذلك بشيء ؟

التلميذ : أليس هذا الجداء السلمي ؟

الأستاذ نعم، فالجداء السلمي ما هو إلا تأثير شعاع في شعاع أو ما نسميه اسقاط الشعاع على بعد معين، بل يمكنك كتابة شعاع بدلالة تأثيراته في كل بعد و هذا ما نسميه الإحداثيات الديكارتية.

لو رجعنا لما قاله فورييه أن كل دالة يمكن كتابتها كسلسلة مجموع لدوال مثلثية فهو ما يقول إلا أن الدالة مجموعة تأثيرات أمواج .



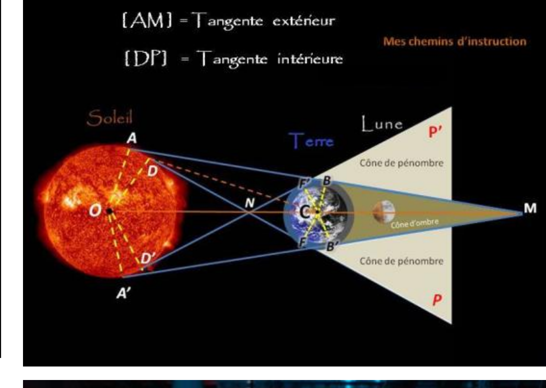
فهذه التأثيرات يمكن رؤيتها كإسقاط للدالة أو إحداثية للدالة على كل بعد والممثل بموجة الدالة الجيبية أي يمكنك حساب هذا التأثير بواسطة مفهوم شبيه بالجداء السلمي،

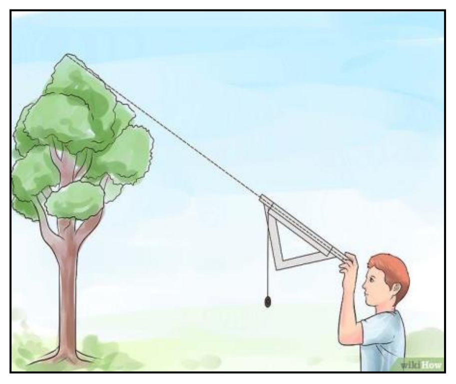
و هذا ما قاموا به في فضاءات هلبرت إذ عمموا الفضاءات الإقليدية فبدل الكلام عن أشعة في فضائنا المعهود اعتبروا فضاء كيفيا أين تكون الأشعة لها مفاهيم كيفية كدوال مثلا و عندها يمكننا بتعريف جداء سلمي كتابة أي شعاع من الفضاء كمجموع تأثيرات في كل بعد من الفضاء أي الدالة ما هي إلا سلسلة تاثير دوال أولية قد تكون جيبية او غيرها فالفضاء مولد من قاعدة أولية تفسر لنا جميع ظواهره سواء كانت أشعة او دوال أو دوال تعبر عن جسيمات فيزيائية.

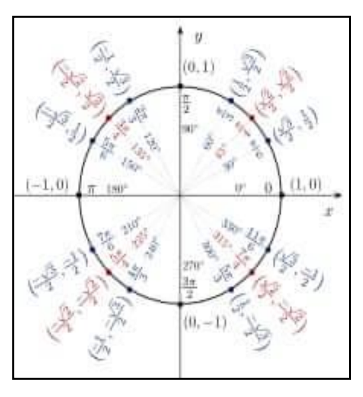
فتكون التجب cos هي مقدار تناسب تأثير شعاع على شعاع في اتجاهات معينة و هذا بالضبط ما يحتاجه ميكانيك الكم فميكانيك الكم يتعامل مع الجيسمات كأمواج فعندما تتداخل مع بعضها فهي تؤثر في بعضها كأمواج فتكون الظاهرة نتيجة تداخل تأثيرات طبيعات موجية للجسيمات.

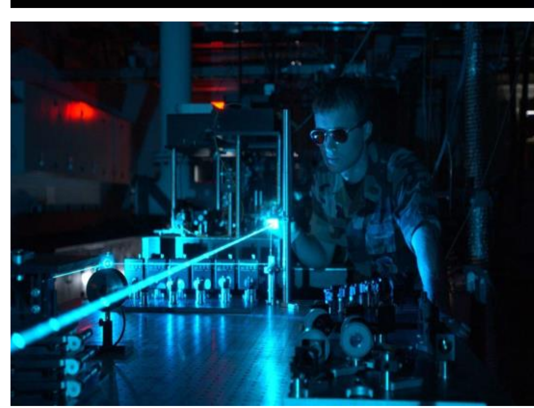
قد يبدو الأمر معقدا وهو كذلك لكن الفكرة هي ذاتها بدأت بإسقاط ظل بضوء الشمس من الارتفاع نحو السطح لتنتهي بإسقاطات لأشعة على أشعة كل بعد من الفضاء، فكل هذا ما هو إلا نتيجة لتجانس الفضاء في جميع اتجاهاته.

الدوال المثلثية يا ولدي مجرد مقدار تناسب طول بعد مع طول بعد آخر فهي تعبر عن التأثير الموجود بين بعدين و ما نسميه زاوية ما هو إلا تعبير عن اتجاهين.













لماذا تظهر الدوال المثلثية في غير المثلثات ولماذا نستطيع كتابتها بالدالة الأسية ؟

الدوال الجيبية تعبر عن خاصية في كوننا وهي تأثير الابعاد في بعضها سلميا، أو إذا نظرنا إليها بالعكس : مسألة تناسب الابعاد فيما بيننها.

هذه الخاصية تظهر جليا في مفهوم الجداء السلمي.

أول أمثلة تقابلنا لمثل هذا التأثير هي المثلثات لسهولتها فندرسها من الصغر لكن ذلك لا يعني غياب المفهوم في الظواهر الكونية الأخرى.

المسألة مسألة قدرة البشر على قياس خصائص الظواهر فالبشر مجبولين على إدراك المسافات والتناسب بينها على عكس الظواهر الأخرى غير المرئية.

فالدوال المثلثية لا تختص بالمثلثات بل نجدها في كل ميدان دخل فيه مفهوم تأثير الأبعاد كسلسة فورييه مثلا.

ولذلك نجدها متعلقة بالدالة الأسية والأعداد المركبة لتواجد مفهوم الابعاد في الأعداد المركبة مع مفهوم الجمع بين القوى وهو تأثير للأبعاد في بعضها بالدوران والذي يتجسد في جمع الزوايا.

المفاهيم تلتقي مع بعضها فمتى وجد مفهوم ظهر الكائن الرياضي المبني عليه.

لذلك في الظواهر الكونية نبحث عن المفاهيم لكي نستطيع ربطها بخصائص رياضية يمكننا بها بناء نظرية تعبر عن كيفية تغير الخصائص الكونية.







الدوال المثلثية لماذا تأخذ قيما سالبة وأصلها تحسب بأقيسة أضلعة مثلث موجبة ؟

لو تأملنا في الصورة في المثلث abc فسنلاحظ أن $Sin(x)$ تبدأ من الصفر عندما x تساوي الصفر ثم تتزايد نحو 1 لما x تصل ل$\pi/2$

فلو قكنا بالعملية العكسية فبدأنا من $\pi/2$ ثم ننزل للصفر فسنجد sin تبدأ من 1 فتصل ل الصفر بتناقص. فالظاهر أنها دالة مستمرة وبما أنها تتناقص من 1 نحو الصفر ستواصل التناقص إذا نزلنا تحت الصفر لتصل لناقص واحد كأقصى حد.

فهنا نلاحظ أن ذلك يوافق الاتجاه العكسي لمقابل الوتر من المثلث فإعطاؤه إشارة يكون ذو معنى ولهذا سنفكر في إدخال معلم لتحديد الإشارة وسيكون المقابل للوتر ممثلا على محور التراتيب فنجد أن الدالة sin فردية: $\sin(-x) = -\sin x$

بالنسبة ل cos فهي تنطلق من 1 عند 0 لتصل ل 0 عند $\pi/2$ فهي تتناقص لذلك ستواصل التناقص إذا تعدينا $\pi/2$ وهذا يوافق الضلع العكسي الموافق لمجاور الوتر فهو يوافق محور الفواصل.

لكن لو عكسنا السير فبدأنا من $\pi/2$ ستبدأ cos من 0 ثم ننزل للصفر لتصل ل 1 فإذا نزلنا فإن cos بطبيعتها لن تتجاوز 1 فلابد لها من النزول للوصول ل 0 عند $-\pi/2$

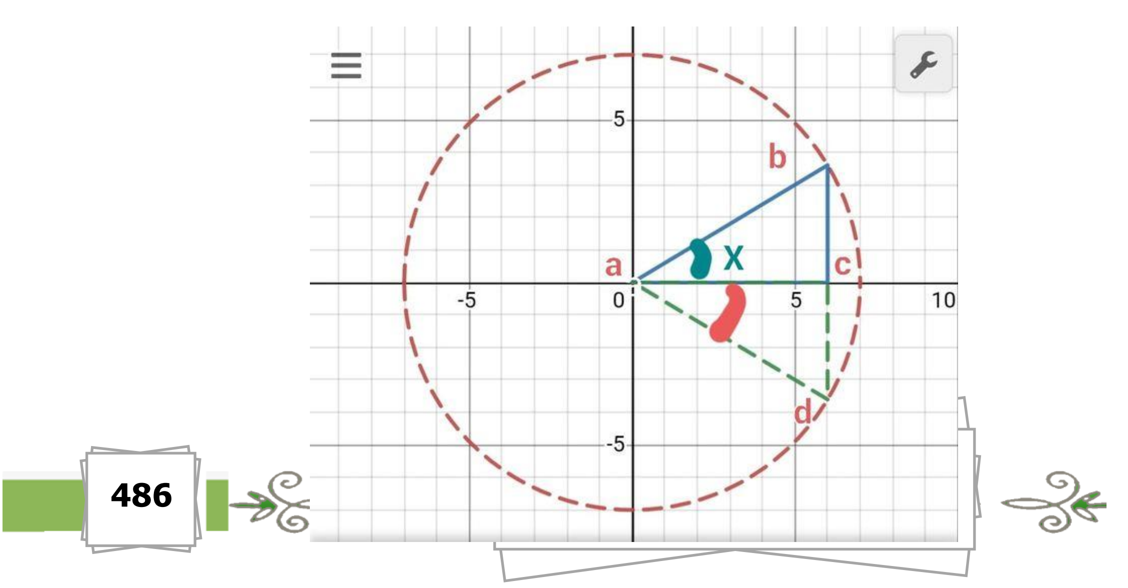
وهنا نستنتج أنها زوجية: $\cos(-x) = \cos x$

فالإشارة في الدوال الجيبية تظهر لموافقة الاستمرار ولطبيعة هذه الدوال من تزايد وتناقص مع موافقة أصلها وهو حسابها بالنسبة لأضلاع مثلث قائم لذلك تعريفها عن طريق إدخال إشارة لإتجاه أقيسة الأضلاع له معنى.

تبقى الإشارة إلى أن تعريف هذه الدوال المضبوط رياضيا والذي تبنته مجموعة بورباكي يمر عبر سلاسل النشر ذلك أن تعريفها هندسيا يحتاج لهندسة إقليدس والتي لا تقوم على نظرية المجموعات ZFC كما أن كائناتها تبدأ ببناء حدسي فهذا مشكل في البناء الرياضي.

بالنسبة للثانوي فيتم تعريفها عن طريق الدائرة المثلثية وهذا كاف لهم لدراستها ذلك أنهم يمرون عبر هندسة إقليدس لأنها بين الحدس والنظام المسلماتي فهي تدريب جيد لنقلهم من الحس و الحدس للتجريد.

ثم يختمون ذلك بالتمثيل الهندسي للأعداد المركبة والذي يمثل بوابة التجريد للبنى الجبرية والتحليل العددي ثم العقدي.



نظرات في الفروع اللانهائية لمنحنى دالة بجوار المالانهاية

لقد تطرقنا في كثير من المواضيع إلى محاولة الرياضياتيين لتبسيط الدوال وتقريبها من دوال مألوفة ككثيرات الحدود ذلك أن كثيرات الحدود بسيطة الدراسة لسهولة حساب قيمها جبريا.

وطريقتهم الأولى في التقريب استعمال النهايات والاشتقاق.

فالتقريب التآلفي ما هو إلا تقريب محلي للدالة بمماسها وهو مستقيم ذو معادلة خطية بسيطة:

$$y = f'(x0)\ (x - x_0) + f(x_0)$$

هذا المستقيم لا يمثل تقريبا فحسب بل هو تمثيل لاتجاه منحنى دالة قابلة للرسم عند نقطة.

وكما هو معروف اتجاه المستقيم يعرف بميل الزاوية التي يصنعها مع محور السينات فلذلك عندما نكتب

$$Delta1 : y = a\ x + b$$
$$Delta2 : y = a\ x + c$$

فالمستقيمان متوازيان ولهما نفس الاتجاه ويصنعان نفس الزاوية $alpha$ بحيث $tan(alpha) = a$

إذا كان الاشتقاق يعطي جوابا بسيطا لمشكلة تبسيط الدوال محليا عند نقطة ففي جوار المالانهاية الأمر مختلف.

فإذا أردنا أن نعرف سلوك منحنى الدالة في جوار المالانهاية بمحاولة مقارنته بمستقيم ذو معادلة:

$$y = a\ x + b$$

يمكننا التأكد من ذلك بالنهايات عن طريق حساب الفرق: $lim\ f(x) - (a\ x + b) = 0$

لكن المشكل أنه يجب ان نعرف مسبقا معادلة هذا المستقيم وهذا الأمر قد يكون سهلا في دوال ذات صيغة مألوفة كالدالة $f(x) = 1/x + 3\ x - 2$ فنلاحظ هنا أن المستقيم هو $3\ x - 2$ لكنه عموما غير واضح من أجل أي دالة.

نلاحظ من النهاية السابقة أنه للحصول على الميل a يكفي حساب النهاية بجوار المالانهاية $Lim\ f(x)/x = lim\ (\ a\ x + b)/x = a$ وللحصول على b

$$Lim\ f(x) - ax = b$$

فكأننا نحسب ميل منحنى الدالة بجوار المالانهاية للحصول على a ثم نتأكد من اقتراب الدالة من مستقيم بحساب $lim\ f(x) - ax = b$ فهذه الطريقة تعطينا دراسة أولية لسلوك منحنى الدالة.

وقد نلاحظ هنا أن مبرهنة التزايدات المنتهية المعممة عن طريق قاعدة لوبيتال تعطينا طريقة لمعرفة العدد a في حالات خاصة ذلك أنه إذا وجد نهاية المشتقة في جوار المالانهاية فإن $Lim\ f(x)/x = lim\ f'(x)$

لكن ماذا يحدث عندما نتحصل على مالانهاية عند حساب نهاية $lim\ f(x)/x$ هذا يعني أن الميل a يساوي المالانهاية أي أن $tan(alpha) = infini$ أي أن $alpha = pi/2$ أو $alpha = -pi/2$

وهذه زاوية مستقيم مواز لمحور العينات أو التراتيب أي أن منحنى الدالة في جوار المالانهاية يتجه لصنع زاوية قائمة مع محور السينات أي يتجه في اتجاه محور التراتيب.



وماذا يحدث لو وجدنا أن $\lim f(x)/x = a$ لكن $\lim f(x) - a x = \text{infini}$ هذا يعني أن الدالة لها نفس ميل المستقيم $y = a x$ بجوار المالانهاية لكنها لا تقترب منه لذلك نقول أن المنحنى يتجه باتجاه $a x$ ولا نقول أنه يقترب منه.

يمكننا تعميم هذه الدراسة إلى مقارنة الدالة بكثيرات الحدود فنلاحظ مثلا أن

$$f(x) = 1/x + 3 x^2 - 2 x + 5$$

منحناها يقترب في جوار المالانهاية من دالة كثير الحدود $3 x^2 - 2 x + 5$ لأن

$$\lim f(x) - (3x^2 - 2x + 5) = \lim 1/x = 0$$

ونلاحظ هنا أنه لإيجاد كثير الحدود $3x^2 - 2x + 5$ يجب أن نبدأ بحساب النهاية $\lim f(x)/x^2 = 3$

ثم $\lim (f(x) - 3 x^2)/x = -2$ ثم $\lim f(x) - (3x^2 - 2x) = 5$

لكن كيف نعرف درجة كثير الحدود التي يجب أن نستعملها ؟

الجواب هو استعمال اللوغارتم إذ نلاحظ أن

$$\lim (f(x)/x^n) = a \Rightarrow$$
$$\lim \ln |f(x)/x^n| = \ln |a| \Rightarrow$$
$$\lim \ln(|f(x)|) - n \ln|x| = \ln |a| \Rightarrow$$
$$\lim \ln(|f(x)|)/\ln(|x|) = n$$

بعكس الحسابات يمكننا استنتاج n ثم a و بتكرار هذه الخوارزمية على $f(x) - a x^n$ ثم على ما يليها عدة مرات يمكننا حساب كثير الحدود المطلوب.

يمكننا رؤية كثير الحدود المتحصل عليه كنشر للدالة بجوار المالانهاية.



يا أستاذ هل هناك قسمة على الصفر في النهايات ؟

$1/0 = \infty$

كل ترميز رياضي لابد أن يخضع لتعريف مسبق ففي الرياضيات لا نستخدم المعاني الحدسية للرموز في البرهنة لتعلق ذلك بالذوق البشري.

لكن عند حساب النهايات قد تعودنا أو عودونا أن ننظر لحالات القسمة على الصفر و المالانهاية وكأننا نتعامل مع أعداد.

قبل الخوض في شرح هذا المشكل لابد أن نعود للتعريف الرياضي للقسمة.

فالقسمة رياضيا هي تطبيق ثنائي السابقة معرف عن طريق عملية الضرب في النظير أي

$a/b = a * b^{-1}$

فلكي نتكلم عن القسمة لابد من بنية جبرية والتعامل مع عناصر منها.

أما في النهايات فما نسميه 0 ومالانهاية في الحالات السابقة الذكر ليست أعدادا وسنعود لشرح هذا لاحقا.

المسألة الثانية مشكلة القسمة على الصفر داخل حلقة فالحلقة بتعريفها لا يمكن فيها للصفر أن يقبل مقلوبا (وهنا لا نتكلم عن الحلقة التافهة)

لذلك كيف يمكن أن نعبر عن قسمة في النهايات غير موجودة في حلقة فهذه المالانهاية وهذا الصفر الموجودان في النهاية لا ينتميان ل R .

قد يقول أحدهم كيف ذلك و 0 عنصر من R ؟

الجواب في النهايات نتعامل مع صفرين:

الصفر كعدد من R وهو قيمة النهاية.

و0 كخاصية لمتتالية تؤول للصفر فهذا الصفر يمكننا أن نراه كصنف تكافؤ مثله مثل المالانهاية فيمكننا بسهولة تعريف علاقة تكافؤ على المتتاليات غير المعدومة والتي لا تغير الإشارة بـ $\lim U_n/V_n = 1$

فإذا صنعنا هذا أمكننا التعامل مع جميع الأعداد غير المعدومة كممثلين للمتتاليات التي تنتهي إليهم.

وزيادة على ذلك أضفنا عناصر جديدة وهي أصناف تكافؤ المتتاليات التي تؤول للصفر وأصناف تكافؤ المتتاليات التي تؤول إلى المالانهاية.

فيكون $(1/n)$ ممثل عن صنف تكافؤ لكل المتتاليات التي تحقق.

$\lim n U_n = 1$

والمتتالية (n) ممثلة ل

$\lim U_n /n = 1$

ويمكننا إضافة الصفر كصنف لوحده مع هذه الأصناف وبهذا تكتمل المجموعة.

وبما أننا نحسن الضرب والقسمة بين المتتاليات أمكننا تمديد ذلك لهذه العناصر أي

$(1/n) \times (n) = (1/n \times n) = (1)$



الأقواس لنراها كأصناف تكافؤ ، فهنا يظهر لنا نظير لما كنا نراه ك $+0$ و $+\infty$

ويصبح لذينا كذلك $(1) / (n) = (1/n)$ وهو ما نسميه تجاوزا بـ $+0$ لكنه غير وحيد.

ما فعلناه هنا هو أننا عبرنا عن الحدس الذي نستعمله عند حساب النهايات بصيغ رياضية مضبوطة.

فما كنا نسميه $1/+\infty = 0+$ ما هو إلا شيء من الشكل $(1)/(n) = (1/n)$

لكن لماذا لا نستعمل هذا في دراستنا ؟

الجواب أن هذا موجود فعلا بشكل أعم فيما يسمى بالتحليل غير الإعتيادي.

أما ما ندرسه في الثانوي فلا يمكن إدخال فيه هذه المفاهيم لصعوبة استيعابها للتلاميذ إن لم نقل استحالة وعموما نتساهل في حساب النهايات بالطريقة الحدسية لأن الحالات خاصة جدا ونتائجها مضبوطة كترميزات اصطلاحية.

أي يمكننا النظر ل $1/0+$ كترميز وليس كعملية مكونة من قسمين ويمكننا اعطاؤها معنى بشكل $1/0+ = +\infty$

ويمكننا برهنة صحة هذا المعنى عن طريق التعريف وهذا الذي نقوم به فعلا في الثانوي والجامعة.

كخلاصة :

لا يوجد قسمة بالمفهوم الجبري في مثل هذه الحالات.

الشرح المرفق لها والذي يربطها بالقسمة هو شرح حدسي غير مضبوط رياضيا.

يمكننا ضبط هذا الشرح بطريقتين : إما جعل هذه الكتابة كترميز لا عملية حسابية وهذا الذي نقوم به في الثانوي وفي السنوات الأولى من الجامعة.

وإما بتعريف كائنات جديدة فنعطي معنى لهذه القسمة وهذا ما يفعله التحليل غير الاعتيادي.



المشتقات، مبرهنة داربو، مبرهنة بير للنهاية البسيطة، شرط لوبيغ لوجود تكامل ريمان.

كل ما يلي في مجال مغلق محدود.

كل مشتقة لدالة حقيقية هي دالة لداربو ودوال داربو هي التي تحقق مبرهنة القيم المتوسطة أي صورة مجال بها هو مجال.

فكل مشتقة هي دالة لداربو حسب مبرهنة داربو وإن كان ليس شرطا أن تكون مستمرة.

حسب مبرهنة النهاية البسيطة لبير كل مشتقة هي مستمرة ماعدا على مجموعة مغلقة قياسها معدوم.

مبرهنة لوبيغ لوجود تكامل ريمان تنص على أن دالة قابلة للمكاملة حسب ريمان على مجال إذا وفقط إذا كانت مستمرة ماعدا على مجموعة مهملة أي قياسها معدوم.

وجود تكامل ريمان لا يعني وجود الدالة الأصلية إلا إذا كانت الدالة مستمرة فإذا كانت مستمرة فدالتها الأصلية هي تكامل ريمان مع المتغير في طرفه الأعلى.

وجود الدالة الأصلية وإن كان الدالة غير مستمرة يعني وجود تكامل ريمان ويساوي الفرق بين قيمتي الدالة الاصلية عند طرفي المجال.

يمكن ربط نتائج المبرهنات السابقة ببعضها:

فمشتقة دالة حسب بير هي مستمرة ما عدا على مجموعة مغلقة قياسها معدوم إذن هي قابلة للمكاملة حسب مبرهنة لوبيغ لأن مجموعة عدم إستمرارها مهملة.

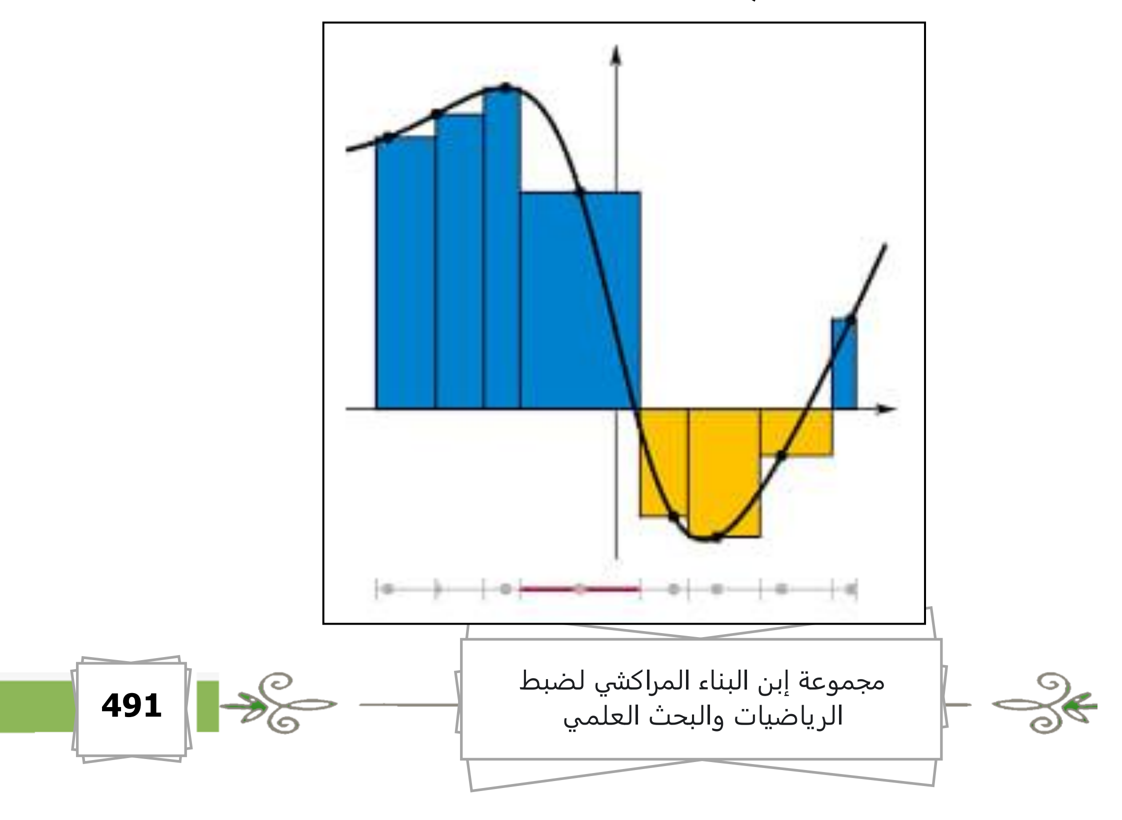
كخلاصة : وجود الدالة الأصلية لا يعني الإستمرار

وجود تكامل ريمان لا يعني وجود الدالة الأصلية

وجود الدالة الاصلية يعني وجود تكامل ريمان

دالة مستمرة تقبل دالة أصلية وتكتب بتكامل ريمان

الدوال التي لا تنقل مجال لمجال ليست لداربو إذن لا تقبل دوال أصلية.



معضلة ربط استمرار دالة حقيقية بامكانية رسم منحناها بدون رفع القلم.

دوال ويرستراس والحركة البراونية.

رسم منحنى دالة حقيقية في الواقع معضل ذلك أن الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد أما النقاط التي يمكن وضعها فوق الورق فمنتهية.

لذلك أسقاط رسم منحنى دالة مستمرة بدون رفع القلم على الواقع محال.

لكن يمكن أن نقول أنه رسم ذهني مع تمثيل في الواقع كما نمثل للمستقيم والمثلث والمربع.

مشكلة التمثيل في الواقع أنه لا يمكننا إصابة عين منحنى دالة إلا بالتقريب لأننا غير قادرين على تعيين إلا الأعداد القابلة للإنشاء.

فعلى هذا الذي نفعله هو تقريب منحنى الدالة برؤوس قطع مستقيمة صغيرة بقيم قابلة للإنشاء نتصور اتصالها، وعادة ما تكون القيم عشرية.

لكن عدم رفع القلم الذهني أي عدم الانقطاع إنما هو تعريف الترابط لا الاستمرار ذلك أن الدوال التي تنقل مجالا لمجال تسمى دوال داربو وفيها دوال غير مستمرة بل كل دالة قابلة للاشتقاق هي دالة لداربو وإن كانت غير مستمرة.

أما تقريب منحنى بقطع مستقيمة فيعود للتقريب التآلفي أي الدالة لابد أن تكون قابلة للإشتقاق.

فعلى هذا الدوال غير قابلة للاشتقاق كدوال ويرستراس حيثما كان لا يمكن رسمها.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_Weierstrass

https://fr.m.wikipedia.org/.../Fonction_continue_nulle...

هذه الدوال لم ترق للكثير من الرياضياتيين حين تم اكتشافها بل كانت تعد كغريبة من غرائب الرياضيات مما لا وجود له في الواقع، قال شارل هرميت سنة 1893

exemple Charles Hermite qui déclara en 1893 :

أنحرف بخوف ورعب عن هذا الجرح المقرح للدوال المستمرة التي ليس لها مشتقات.

« Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées »

لكن اكتشاف هذه الدوال ساهم بشكل مباشر في صناعة الطبولوجيا ونظرية القياس ورياضيات العصر الحديث.

إلى عهد قريب كان يظن البعض أن هذه الدوال لا مكان لها في الواقع وأنها تخالف الحدس والحس إلى أن تم دراسة الحركة البراونية أين تظهر بشكل طبيعي هذه الدوال المستمرة غير قابلة للاشتقاق حيثما كان.

يبدو أن الحدس البشري الرافض لهذه الدوال إنما هو متأثر بما اعتاد عليه أما الواقع ففيه من الخبايا ما تكتشفه الرياضيات بالحسابات وتوافقه التجربة يوما بعد يوم، أليس ميكانيك الكم مثال واقعي من هذه الغرائب.

لكن ماذا عما ندرسه اليوم للتلاميذ من ربط الاستمرار بالرسم ؟

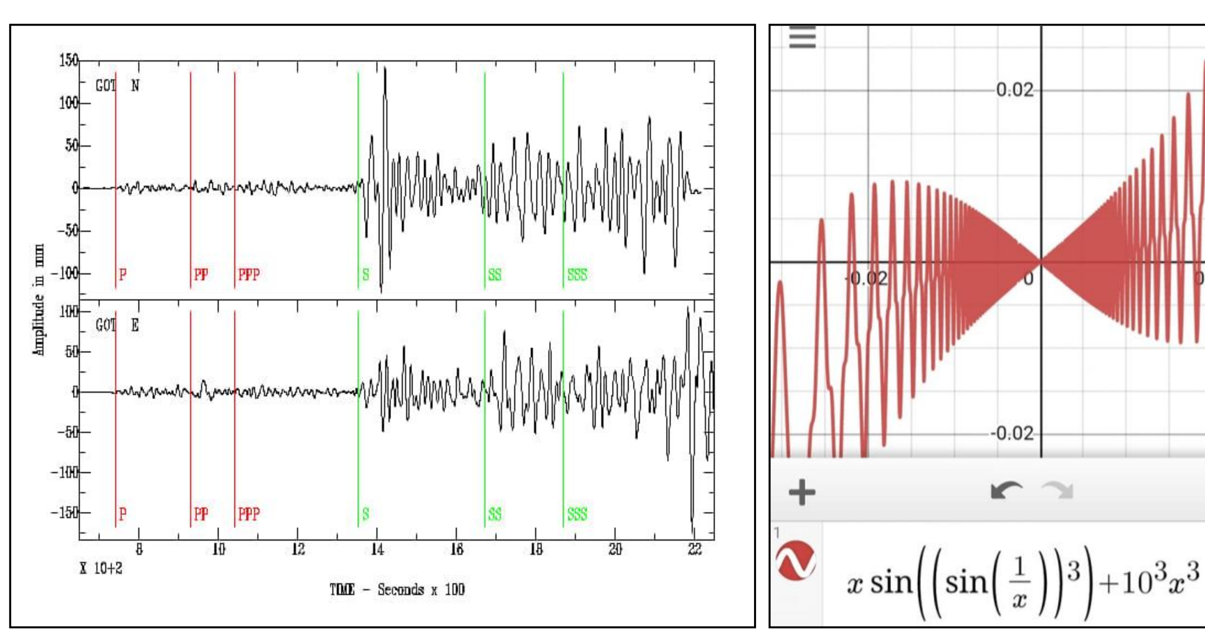
بالنسبة للتلاميذ فلا يمكنهم استيعاب غير الدوال المألوفة في هذه المرحلة فربط الاستمرار بالمنحنى يبقى وسيلة فعالة لتقريب الفهم وإن كانت رياضيا قضية خاطئة.

إلا أنه لا ننسى أن الرياضيات احتاجت قرونا لصناعة هذه الدوال وفهمها فلا يمكن أن نقفز بالتلاميذ عن هذه المرحلة اللازمة للمرور من الحدس للتجريد والتي عادة ما تمر بالهندسة.

الدوال التي يدرسها التلاميذ دوال مألوفة على مجالات مستمرة وقابلة للاشتقاق ما عدا على نقاط منتهية لذلك لا يعطى للتلاميذ ما لا يمكنهم استيعابه.

فلا التلميذ يمكنه إدراك عدم قابلية العد ولا وجود دوال غير قابلة للاشتقاق حيثما كان ولا وجود دوال معرفة على غير مجالات.

أما الأستاذ فلابد أن يدرك الحقائق الرياضية حتى يضبط ما يقوله للتلاميذ من الناحية الرياضية ويتجنب ايقاعهم فيما لا يمكنهم فهمه من الناحية البيداغوجية.





قابلية تمثيل منحنى دالة

رسم منحنى دالة على مجال محدود يتم بتمثيلها عن طريق مجموعة منتهية من القطع المستقيمة التي تربط بين نقاطها الحرجة ومن بينها نقاط تغير اتجاهها ويضاف لها نقاط مختارة تساعد على بيان اتجاه منحنى الدالة .

فالغرض من رسم المنحنى تقريبه بقطع مستقيمة تبين مسار المنحنى.

ومن هنا يتبين أن النقاط الحرجة لابد أن تكون منتهية في المجال المحدود وهذا يعني أن الدالة لابد أن تكون من نوع C^1 في المجال ماعدا عند بعض النقاط.

لذلك ما يدرسه تلاميذ الثانوي أن إستمرار الدالة يعني إمكانية رسم منحناها دون رفع اليد خاطئ فهذه قابلية إشتقاق إلا في نقاط منتهية وليس مجرد إستمرار.

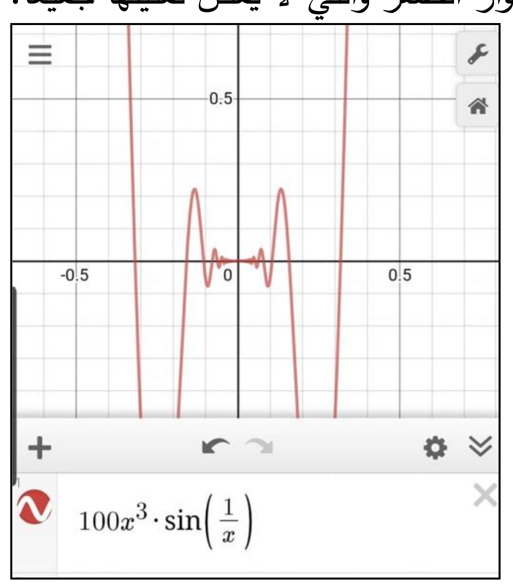
لكن التلاميذ لابد لهم من هذا التصور كمرحلة لفهم الإستمرار لأن الدوال التي يدرسونها قابلة للإشتقاق عموما.

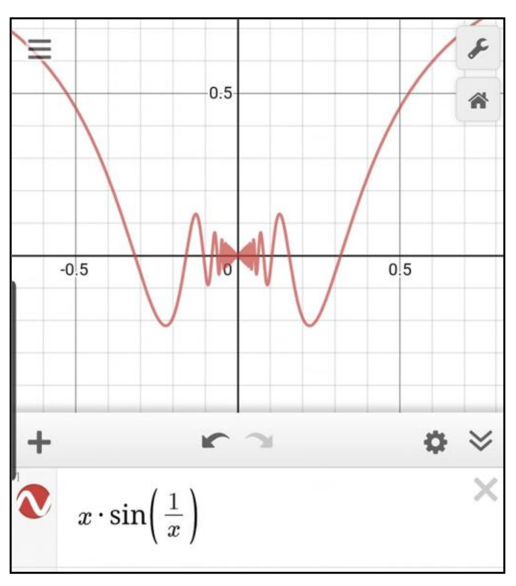
فتدريس هذا المفهوم من باب التشويه المنهجي للتعاريف والمفاهيم ثم يصحح المفهوم لاحقا في الجامعة.

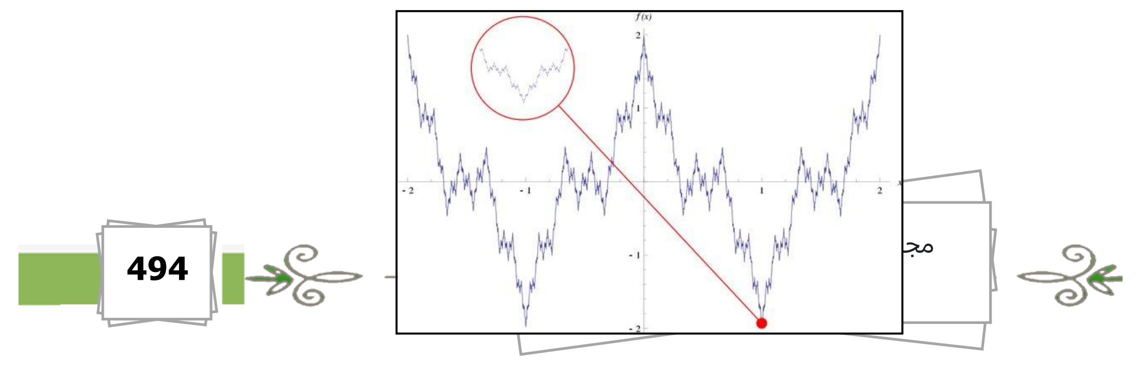
أشهر دوال مستمرة غير قابلة للتمثيل دوال ويستراس.

يمكننا كذلك التمثيل بدالة بسيطة وهي الدالة المعرفة بالصيغة $x \sin(1/x)$ والممدة بالإستمرار عند الصفر بالصفر. فهذه الدالة غير قابل للرسم بجوار الصفر رغم أنها مستمرة.

بل يمكن أخذ عوض الصيغة السابقة الصيغة $100x^3 \sin(1/x)$ وهي دالة قابلة للإشتقاق ومشتقتها مستمرة ورغم ذلك غير قابلة للتمثيل بجوار الصفر لأنها تقبل مالانهاية من النقاط الحرجة وهي الذروات بجوار الصفر والتي لا يمكن تمثيلها جميعا.







بعض المفاهيم حول رسم منحنى دالة : الاستمرار – الاشتقاق – نقطة الانعطاف:

الكلام عن رسم المنحنى يقودنا لإمكانية رسمه و لقابليته للاشتقاق ذلك أنه لا يمكن رسم منحنى ليس من نوع C^1 ما عدا عند نقاط منتهية فنحن نعلم أن هناك دوالا مستمرة غير قابلة للاشتقاق حيثما كان عند أي نقطة مثل دوال ويرستراس فمثل هذه الدوال لا يمكننا رسمها لأن الرسم يتم بتقريب المنحنى بقطع مستقيمة أي للمنحنى مماسات موجهة أي قابل للاشتقاق وهذا غير متوفر فيها.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_Weierstrass

هنا ننبه إلى أن ربط الاستمرار برسم المنحنى الذي يشرح به الاستمرار في الثانوي هو تشويه للرياضيات لتقريب التصور ليتوافق ذلك مع تصور تلاميذ الثانوي.

أما رياضيا فهذا غير صحيح **لأمرين:**

أن عدم الانقطاع طبولوجيا يوافق الترابط وبالضبط مبرهنة القيم المتوسطة بصياغتها الطبولوجية : صورة كل مترابط بتطبيق مستمر هو مترابط، لكن إذا كان الفضاء الطبولوجي غير مترابط فالمسألة غير صحيحة.

ومن الأمثلة على ذلك الدالة المعرفة بالصيغة

$$f(x) = x \sin(1/(\sin(1/x))) \ , \ x \in R^* \setminus \{1/(n\,\pi) : n \in Z^*\}$$
$$f(0) = 0$$

فهذه الدالة مستمرة عند الصفر إلا أنها غير معرفة على مترابط يشمل الصفر فلا يمكن رسم منحنى يشمل الصفر دون رفع القلم.

إلا أنه في الثانوي يتحرز من هذه الدوال بدراسة دوال مستمرة على مجال فيشترط الترابط ضمنيا. الأمر الثاني كما أشرنا له هنا هناك دوال غير قابلة للرسم لكنها مستمرة مثل دوال ويسترإس وكذلك درج كنتور.

https://fr.m.wikipedia.org/.../Continuit%C3%A9_(math%C3...

فهذه الدوال لا يمكن رسمها رغم أنها مستمرة فالرسم يتطلب أكثر من الاستمرار إذ يحتاج للتوجيه أي للاشتقاق. إلا أن مثل هذه الدوال لا تدرس في الثانوي.

فربط الاستمرار برسم المنحنى تمثيل مقبول في المرحلة الثانوية لأنه يوافق الدوال المألوفة التي يدرسونها ويهيئهم لمراحل أخرى.

https://fr.m.wikipedia.org/.../Continuit%C3%A9_(math%C3...

بالنسبة لنقطة الانعطاف Point d'inflexion فتعرف بنقطة تغير اتجاه تحدب المنحنى من كونه محدبا نحو التقعر أو التقعر نحو التحدب.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Point_d%27inflexion

هندسيا يعني ذلك أن الشعاع الموجه لتحدب المنحنى و هو الشعاع العمودي على مماس المنحنى يغير من اتجاهه من أعلى لأسفل أو أسفل لأعلى كما هو في الصورة.



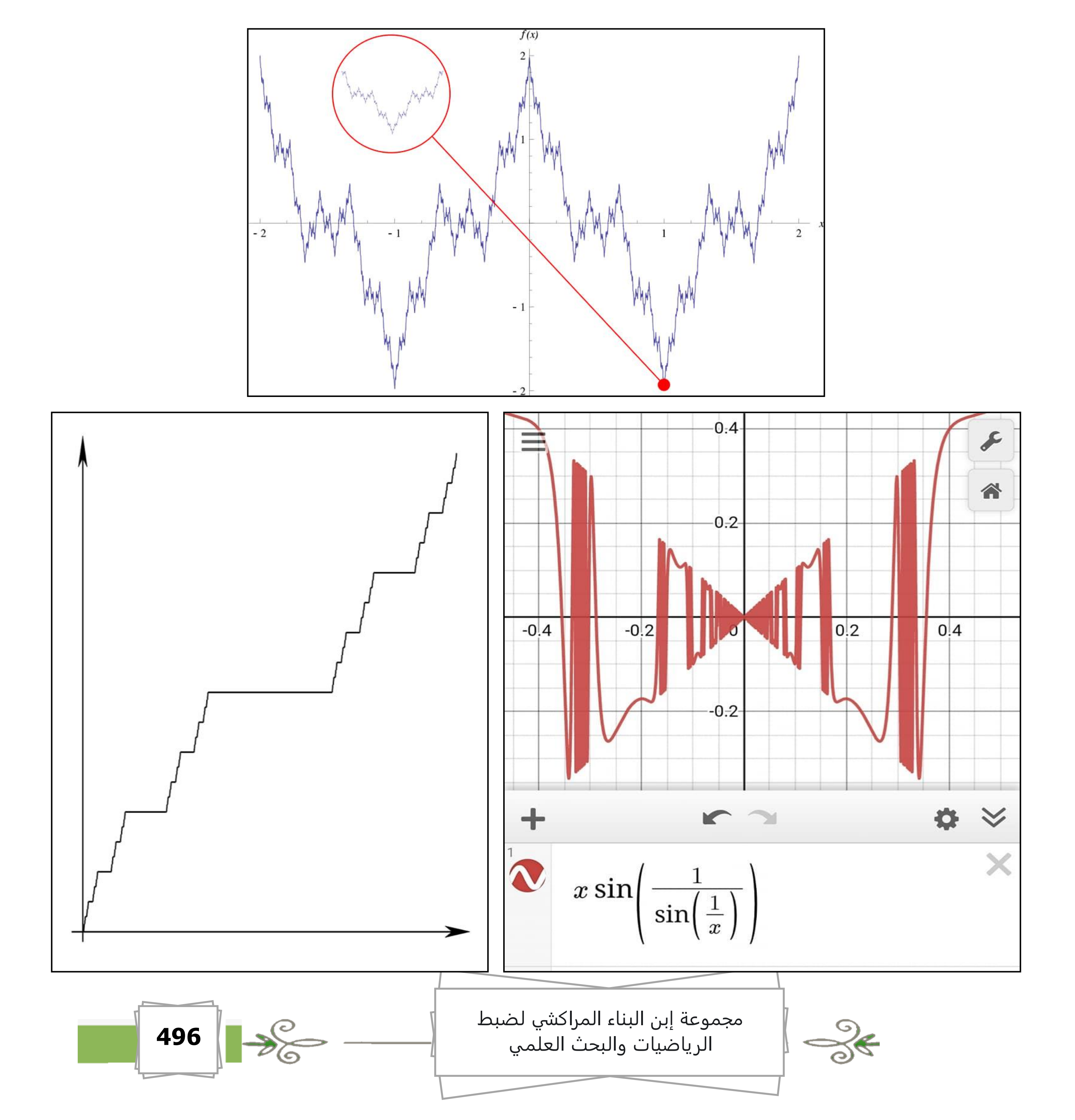
وتوجه هذا الشعاع يعطى بالمشتقة الثانية إن وجدت لذلك ندرس تغير إشارتها، و يعبر ذلك عن تغير اتجاه ميل مماس المنحنى كذلك.

لذلك نلاحظ أنه عندما يخترق المماس المنحنى فميله يتناقص ثم يتزايد أو العكس أي لا يغير الإشارة لكن تزايده و تناقصه يتغير لذلك تتغير إشارة المشتقة الثانية.

تبقى هذه الشروط كافية لكن غير لازمة، إنما تكون لازمة إذا كانت الدالة تقبل مشتقة ثانية أما في غير هذه الحالة فهذه الشروط لا تلزم لوجود نقطة انعطاف.

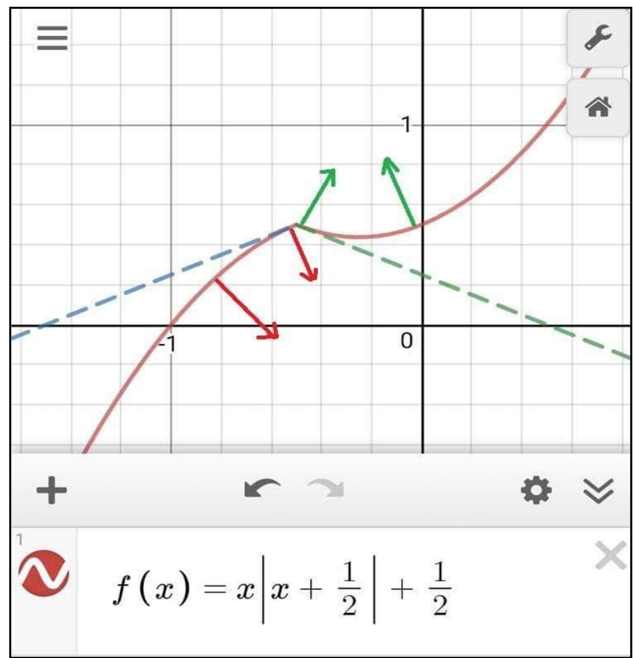
وقد تكون نقطة الإنعطاف نقطة زاوية كذلك كما في الصورة الأخيرة.

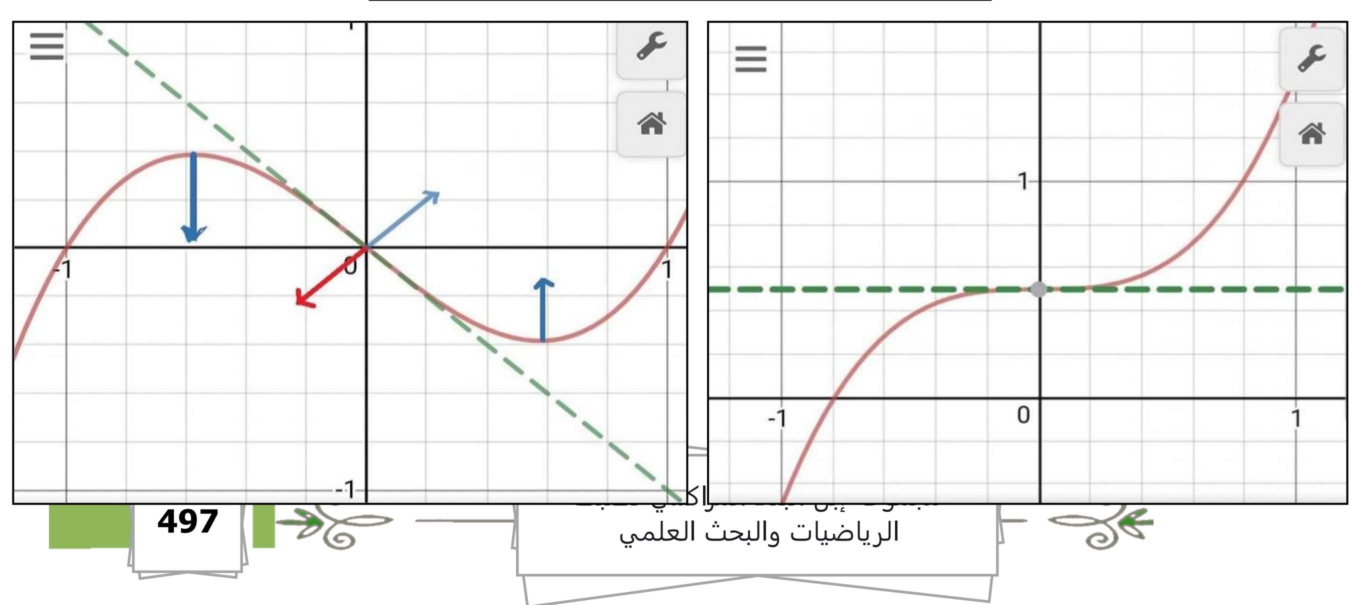
يجب التنبيه إلى أن تعريف نقطة الانعطاف بخواص المشتقة ومشتقتها لا يعتبر تعريفا رياضيا إنما هذه آليات حسابية في حالات خاصة أما المفهوم الأصلي فهو مرتبط بالمنحنى وتغيراته وهو أعم من ذلك.



La continuité est associée à la notion de *continuum* dont l'origine est géométrique. Dans un continuum géométrique, comme le plan ou l'espace, un point peut se déplacer continument pour s'approcher à une précision arbitraire d'un autre point. La notion de continuité est définie de manière rigoureuse en mathématiques.

Le premier exemple de fonctions continues concerne des fonctions réelles définies sur un intervalle et dont le graphe peut se tracer *sans lever le crayon*. Cette première approche donne une idée de la notion (la fonction ne *saute* pas) mais n'est pas suffisante pour la définir, d'autant plus que certains graphes de fonctions pourtant continues ne peuvent pas se tracer de cette manière, telles par exemple des courbes ayant des propriétés fractales comme l'escalier de Cantor.





طول منحنى دالة:

توجه منحنى دالة متعلق بالمشتقة لذلك كان طوله يعطى بالعبارة التي في الصورة إذا كانت الدالة قابلة للإشتقاق ومشتقتها مستمرة.

فإذا تأملنا جيدا منحنى دالة فهمنا حدسا أنها إذا تذبذبت بشكل غير منتهي تحصلنا على طول غير منته.

التذبذب غير المنته يعني تذبذبا غير منته في إشارة المشتقة مما يجعلنا نفكر في دالة جيبية من قبيل $\sin(1/x)$ لكن لجعلها مستمرة عند الصفر يمكننا ضربها في x

$f(x) = x \sin(1/x)$

هذه الدالة مستمرة ويمكن تمديدها بالإستمرار عند الصفر لكن منحناها يتذبذب كلما اقترينا من الصفر.

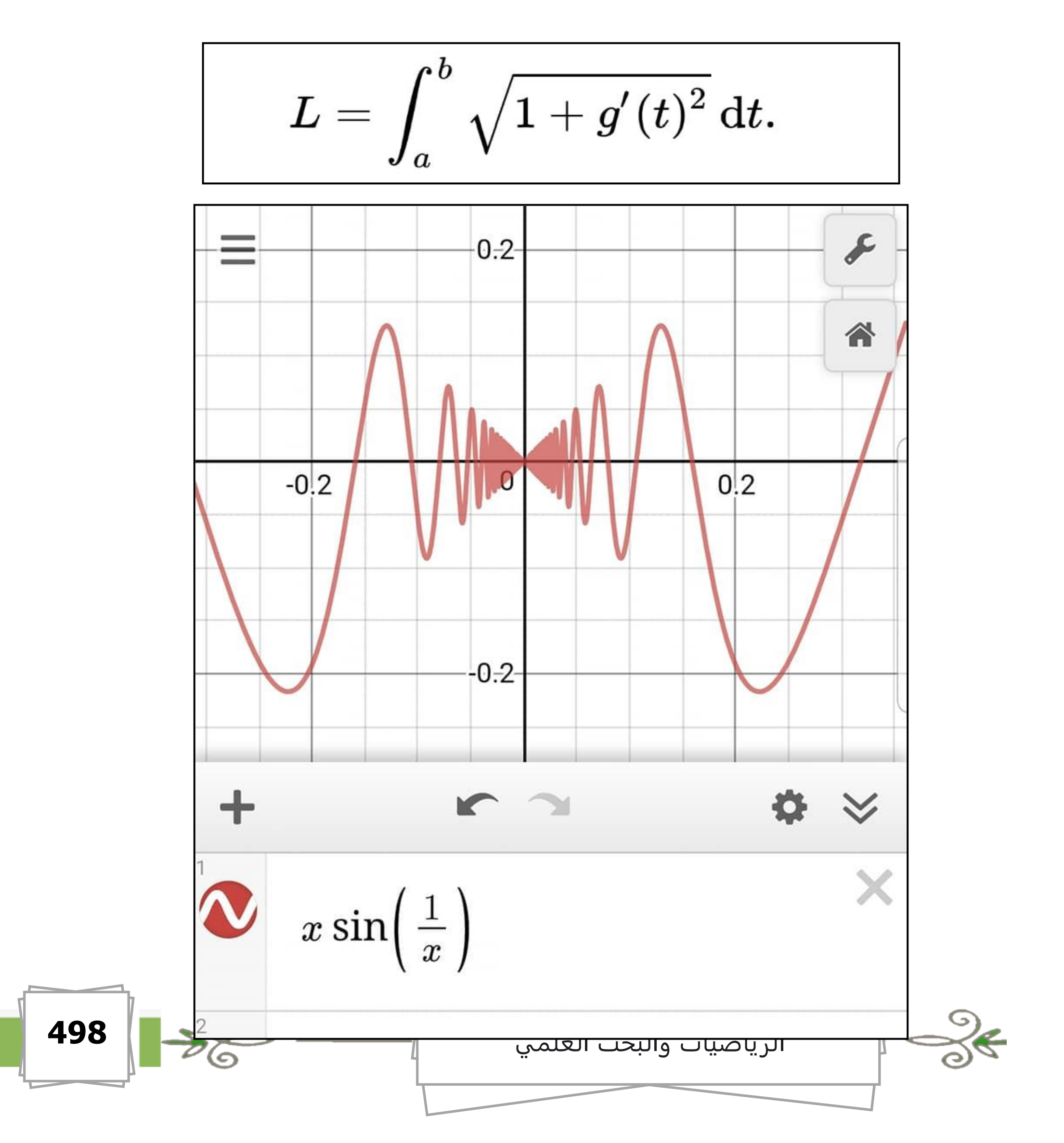
نلاحظ ذلك عند كل قيمة من الشكل $2/(n\,\pi)$ ويمكننا ملاحظة ذلك كذلك حسابيا من مشتقتها

$f'(x) = \sin(1/x) - \sin(x)/x$

في الحقيقة يمكننا صناعة الكثير من هذه الدول فمن قبيلها دوال ويسترلس المستمرة والتي لا تقبل الاشتقاق عند أي نقطة.

بالنسبة لطول منحنى دالة يمكن مراجعته في هذا الرابط:

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Longueur_d%27un_arc



لنضبط الرياضيات معا : مبرهنة القيم المتوسطة ، الاستمرار، دوال داربو ... لننظر للمبرهنة بشكل مختلف عن المعتاد.

مبرهنة القيم المتوسطة بشكلها الطبولوجي تنص على أن صورة كل مترابط بتطبيق مستمر هو مترابط.

والمترابط كما يدل عليه اسمه لا يمكن كتابته على شكل اتحاد مفتوحين منفصلين كالمجالات في R .

المفتوح المقصود هنا هو المفتوح بطبولوجيا الأثر.

مبرهنة القيم المتوسطة تعتبر مدخلا جيدا للتحليل بالنسبة لتلاميذ الثانوي ذلك أنها توافق الحدس وصياغتها في R على مجال سهلة:

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a,b]$ فمن أجل كل k بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد c بين a و b بحيث $f(c) = k$.

من السهل شرح هذه المبرهنة في حالتها الخاصة المكافئة للعامة لدالة تغير الاشارة فبرسم بياني يدرك التلميذ أن منحنى دالة تنطلق من قيم سالبة نحو موجبة أو العكس فلابد أن يمر بمحور الفواصل.

وبما أن التلميذ يربط الاستمرار بعدم انقطاع المنحنى سيربط هذه الخاصية بالاستمرار.

إلا أنه في الحقيقة المسألة متعلقة بالترابط لا الاستمرار فنقل مترابط لمترابط لا يحتاج قطعا للاستمرار.

كان الرياضياتيون في القرن التاسع عشر يعتقدون أن هناك تكافؤا بين الاستمرار و خاصية مبرهنة القيم المتوسطة إلى أن جاء داربو فبين سنة 1875 أن هناك دوالا تنقل كل مجال إلى مجال إلا أنها غير مستمرة وبين أن كل دالة مشتقة لأخرى تحقق هذه الخاصية.

فمنذ ذلك الحين نسمي دوال داربو كل دالة تحقق خاصية مبرهنة القيم المتوسطة أي تنقل كل مجال لمجال.

كمثال على ذلك يمكننا ذكر الدالة f المعرفة:

$$f(x) = \sin(1/x) , x \in R^*$$
$$f(0) = 0$$

فهذه الدالة غير مستمرة عند الصفر لكنها تنقل مجال لمجال.

بل صنع داربو دالة غير مستمرة عند كل عدد ناطق تحقق الخاصية.

في هذا المنشور سنعطي شروطا أضعف من الاستمرار لمبرهنة القيم المتوسطة.

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[a,b]$ إذا حققت f الشرطين:

النهاية العليا ل f على اليسار أي بقيم أصغر عند كل نقطة c من $]a,b]$ تحقق

$$\text{Lim sup}(c-)\ f(x) \geq f(c)$$

والنهاية السفلى ل f على يمين كل نقطة c من $[a,b[$ تحقق

$$\text{Lim inf}(c+)\ f(x) \leq f(c)$$

فهي من دوال داربو.

البرهان:

لنفرض

$f(a) < f(b)$ وليكن k بين $f(a)$ و $f(b)$

وليكن c الحد الأعلى لمجموعة العناصر غير الخالة التي تحقق $f(x) < k$ ومنه عند c بفرض أنه يختلف عن b يمكننا كتابة

$\text{Lim sup}(c-)\, f(x) \leq k$ و $\text{Lim inf}(c+)\, f(x) \geq k$

ومن شروط المبرهنة نجد كذلك

$\text{Lim sup}(c-)\, f(x) \geq f(c)$ و $\text{Lim inf}(c+)\, f(x) \leq f(c)$

بضم المتراجحات نجد

$$k \leq \text{Lim inf}(c+)\, f(x) \leq f(c) \leq \text{Lim sup}(c-)\, f(x) \leq k$$

ومنه $f(c) = f(k)$ وهو الطلوب.

بالنسبة لحالة $c = b$ فلدينا

$\text{Lim sup}(b-)\, f(x) \leq k < f(b)$ و $\text{Lim sup}(b-)\, f(x) \geq f(b) > k$

وهذا مستحيل.

نلاحظ أن الدوال المستمرة تحقق شرط المبرهنة فشروطها أضعف.

وكذلك الدالة السابقة المعرفة بـ $\sin(1/x)$ تحقق شروط المبرهنة.

عموما يمكن صناعة دوال لداربو غير مستمرة عند كل نقطة مثل دالة: Conway

https://fr.m.wikipedia.org/.../Fonction_de_Conway_en_base_13

بل هناك دوال لداربو غير قيوسة

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8me_de...

فربط خاصية مبرهنة القيم المتوسطة بالاستمرار وإن كان يريده الحدس إلا أن الرياضيات تأباه ففي مجموعة الأعداد الحقيقية من الغرائب ما يعارض الحدس.

لذلك هذه المبرهنة غير مقبولة في المنطق الحدسي لأنها تصنع من مبدأ الثالث المرفوع ولا تعطي طريقة بنائية.



كيف نفسر وجود دوال تحقق خاصية مبرهنة القيم المتوسطة رغم أنها غير مستمرة ؟

تابع لدوال داربو

المقال يحتاج قراءة بهدوء مع الاعادة ومحاولة تصور المسائل.

قد تطرقنا في منشور سابق لمبرهنة القيم المتوسطة والتي تنص بشكلها الطبولوجي على أن صورة كل مترابط بتطبيق مستمر هو مترابط.

وقد بيّنا أنه في R توجد دوال تنقل مترابط أي مجال نحو مجال رغم أنها غير مستمرة.

بصفة عامة الدوال التي تنقل مجال لمجال تسمى دوال داربو.

برهن داربو أن المشتقة هي دالة لداربو وإن لم تكن مستمرة دائما.

لكنها ليست الدول الوحيدة لذلك سنهتم في هذا المقال ببنية خاصية مبرهنة القيم المتوسطة وطبيعة دوال داربو غير المستمرة

مبرهنة القيم المتوسطة تنص على أن صورة كل مترابط هو مترابط بتطبيق مستمر ففي هذه المبرهنة نحتاج لخاصيتين:

الترابط وهي خاصية للفضاء الطبولوجي نفسه

والاستمرار وهو خاصية للتطبيق.

فلو نظرنا مثلا للدالة المعرفة على مجموعة الأعداد الناطقة Q

$$f(x) = x^2-2$$

سنجد

$$f(1) = -1$$
$$f(2) = 2$$

ورغم أن الدالة مستمرة على Q وتغير الإشارة إلا أنها لا تنعدم في Q فالمشكل هنا هو مشكل عدم ترابط Q

ذلك أننا يمكننا فصل Q على مفتوحين غير متقاطعين:

$$A = \{x \in Q : x^2 < 2\}$$
$$B = \{x \in Q : x^2 > 2\}$$
$$Q = A \cup B$$

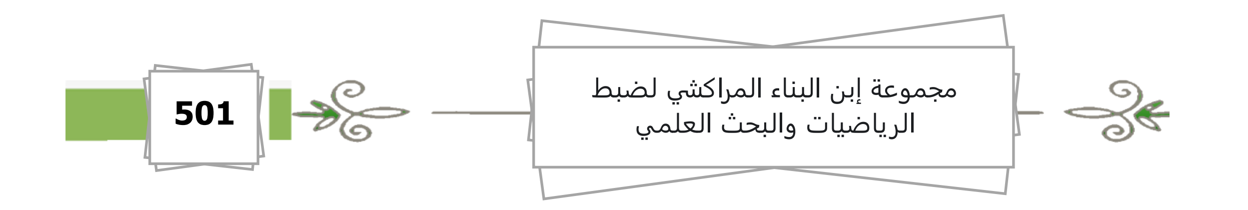
فالترابط شرط مهم في مجموعة البدء.

بقي دور الاستمرار:

الاستمرار بتعريفه يجعل صور السوابق التي بجوار نقطة a متلاصقة بصورة a وهذا ما نعبر عليه بـ

$$\lim f(x) = f(a)$$

فكون الصور متلاصقة ببعضها يشكل لنا مترابط لكن لو تأملنا جيدا هذا الشرط لوجدنا أننا لا نحتاج بالضبط أن تتلاصق الصور بـ f(a)



بل يكفي أن تتلاصق الصور ببعضها فقط وإن اختلف بعضها على صورة f عند a .

لذلك سنجد دوالا تحقق هذا الشرط وغير مستمرة لكنها تنقل مترابط لمترابط مثال ذلك الدالة

$$f(x) = \sin(1/x) , x \in R^*$$

$$f(0) = 0$$

فهذه الدالة غير مستمرة عند الصفر لكننا نجد أن الصور بجوار الصفر متلاصقة ببعضها فهي بين -1 و 1 تتلاصق لتشكل مترابط وإن كان الكثير منها لا يتلاصق مع $f(0) = 0$ لكن تشكل مجالا $[-1,1]$ وهذا كاف لتحقيق المبرهنة.

يبقى هذا المثال في التلاصق منتظما ذلك أننا عندما نقترب من الصفر الدالة تبقى قابلة للاشتقاق فمشكلة هذه الدالة عند الصفر فقط أما عند غيره فهي، من صنف C^INFINI لنأخذ مثالا على دالة أكثر شذوذا من هذه ولتكن معرفة بالطريقة التالية على المجال $[0,1[$ فمن أجل كل x نعتبر كتابته العشرية

$$x = 0.a_1a_2a_3.....$$

فإذا لم يظهر فيها الرقم 7 سنضع $f(x) = 1$ وإذا ظهر رقم 7 وليكن أول ظهور له من الشكل

$$x = 0.a_1a_2...a_m7b_1b_2....$$

فنضع $f(x) = 0.b_1b_2.....$ اي ننزع الأرقام إلى الرقم 7 .

فمثلا لدينا

$$f(0.7) = 0$$

$$f(0.0071) = 0.1$$

$$f(0.005) = 1$$

نحتاج بعض التركيز في الحسابات القادمة.

يمكننا أن نبرهن بسهولة أن الدالة غير مستمرة عند أي عدد لا يظهر فيه الرقم 7: $a = 0.a_1a_2....$

فنضع $U_n = 0.a_1a_2...a_n7$ أي كتابة x إلى الرتبة n ثم نضيف الرقم 7 على اليمين.

فحسب تعريف الدالة $f(U_n) = 0$ و $f(a) = 1$ و $\lim U_n = a$

لكن: $\lim f(U_n) = 0 \neq f(\lim U_n) = f(a) = 1$

يمكننا كذلك أن نبين أن الدالة غير مستمرة عند كل عدد لا يظهر فيه العدد 7 إلا في آخره

$a=0.a_1a_2...a_m7$ فلدينا $f(a) = 0$ لكن بوضع $U_n = 0.a_1a_2...a_m699999...9$

الرقم 9 يتكرر لرتبة n فلدينا $f(U_n) = 1$ لأنه لا يظهر فيه الرقم 7 و $\lim U_n = a$

لكن: $\lim f(U_n) = 1 \neq f(\lim U_n) = f(a) = 0$

وأخيرا نلاحظ أن الدالة مستمرة عند الأعداد من الشكل: $0.a_1a_2...a_m7b_1b_2...$

مع $b_1b_2....$ غير معدومة.

الآن سنبرهن أن هذه دالة لداربو.

إذا أخذنا مجال كيفي من $]0,1[$ وليكن $[a,b]$ فإذا كان الرقم 7 لا يظهر في a أو b أو يظهر في كليهما لكن ليس في نفس الرتبة فستظهر حتما بينهما أعداد بشكل $0.a_1a_2...a_m7b_1....$

فصورها هي $0.b_1....$ وبما أن b_1 ينتقل من القيمة 0 إلى 9 فسنجدها تتغير من 0.0 إلى ...0.99999

أي أن الصورة تعطينا المجال $]0,1[$أما باقي الأعداد التي لا يظهر فيها 7 ستعطينا صورتها 1 أي

$$f([a,b]) = [0,1]$$

أما إذا كان 7 يظهر في كل من a و b من نفس الرتبة أي

$$a = 0.a_1a_2...a_m7b_1b_2....$$
$$b = 0.a_1a_2...a_m7c_1c_2....$$

فلدينا الدالة مستمرة عند هذا النوع من الأعداد كما تقدم ومنه $f([a,b]) = [0.b_1b_2.. , 0.c_1c_2..]$

إذن دالتنا دالة لداربو تنقل مجال لمجال رغم أن نقاط انقطاعها كثيرة جدا فلا يكاد يسلم مجال منها ما عدا المجالات من الشكل الأخير الذكر.

لكن كيف أمكن لهذه الدالة ان تحقق صورة مجال لمجال مع عشوائيتها ؟

ذلك ممكن لأنها تستعمل قوة المستمر أي قوة R فهي لا تسير في خط واحد متزايد أو متناقص كما عهدنا مع الدوال القابلة للاشتقاق لكن من أجل كل الأعداد من الشكل: $0.a_1a_2...a_m7b1....$

تعطينا المجال $]0,1[$ فهي تتفرع وتستعمل كثافة هذه الأعداد مع قوة المستمر لتمر على المجال $]0,1[$ بشكل عشوائي وبما أننا حتى وإن صغرنا المجال يكفي ظهور أعداد من الشكل: $0.a_1a_2...a_m7b_1....$

ليخرج لنا المجال $]0,1[$ لكن هل هذا ينافي الحدس ؟

في الحقيقة هو لا ينافيه من حيث كثافة عشوائية هذه الدالة فهي تقفز محليا لتعيد رسم مجال الوحدة لكنها لا ترسمه بشكل متزايد أو متناقص هي ترسمه بشكل عشوائي فلا يمكننا أن نتصور هذه الدالة تسير برتابة محددة محليا إلا في المجالات من نحو a b من نوع

$$a = 0.a_1a_2...a_m7b_1b_2....$$
$$b = 0.a_1a_2...a_m7c_1c_2....$$

إذا تأملنا جيدا هذه الدالة ورجعنا لمبرهنة القيم المتوسطة المربوطة بالاستمرار لفهمنا أن حدسنا الأول الذي كان يظن أنه لابد أن تكون الدالة مستمرة لتحقق المبرهنة هو حدس خاطئ بني على كون الدالة تسير في مسار رتيب لكن عندما ننزع هذه النقطة ونتصور دالة عشوائية تقفز هنا وهناك لكن تمر بجميع النقاط فسنصنع كذلك مجالا مترابطا من كثرة القفز في جميع النواحي.

أليس بهذه الطريقة نقوم بتلوين الصور ؟ فنحن نحرك قلم التلوين في جميع النواحي بشكل عشوائي ذهابا وإيابا حتى نمر بجميع نقاط التلوين.

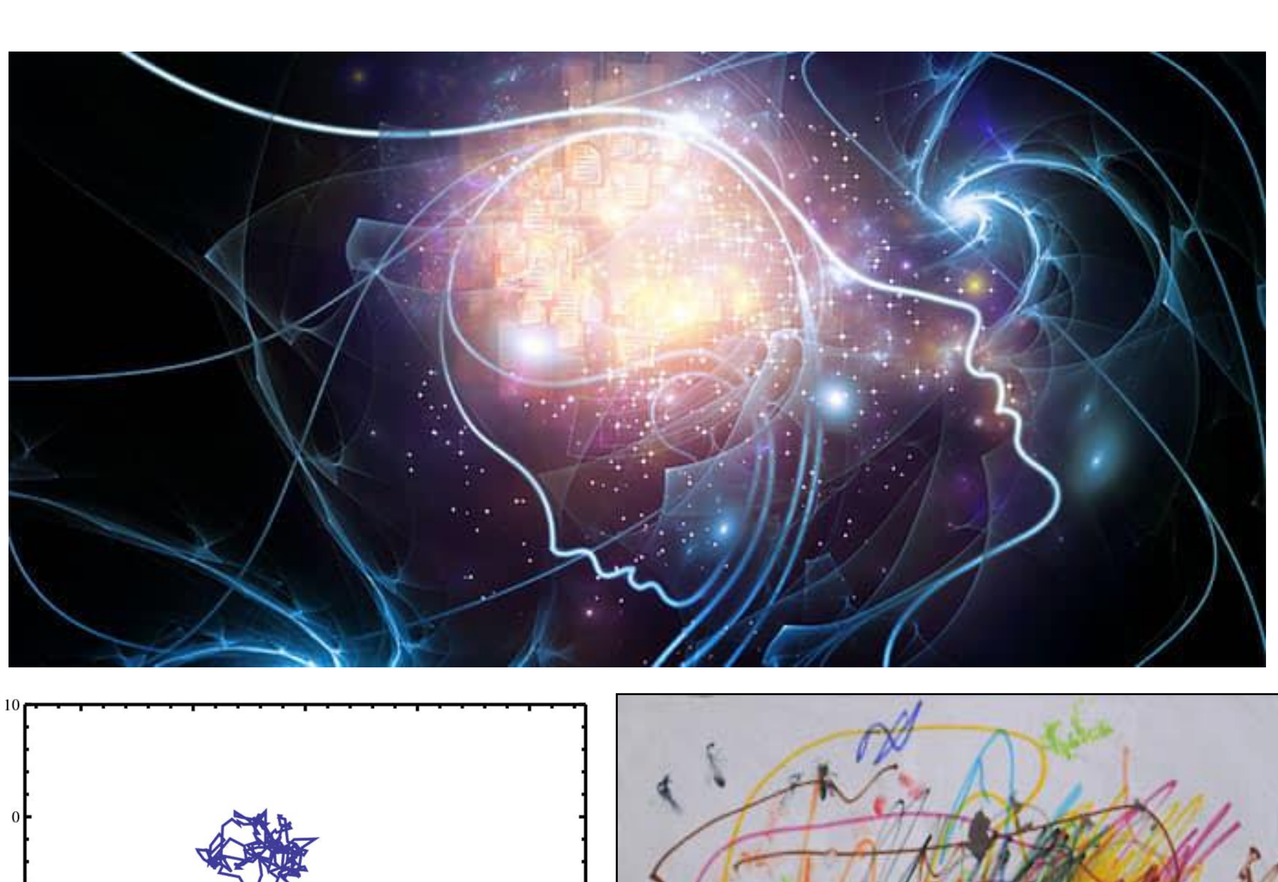
دالة هذا المثال الذي سقناه مستوحاة من دالة كونوي في النظام 13 لكنها بشكل مبسط.

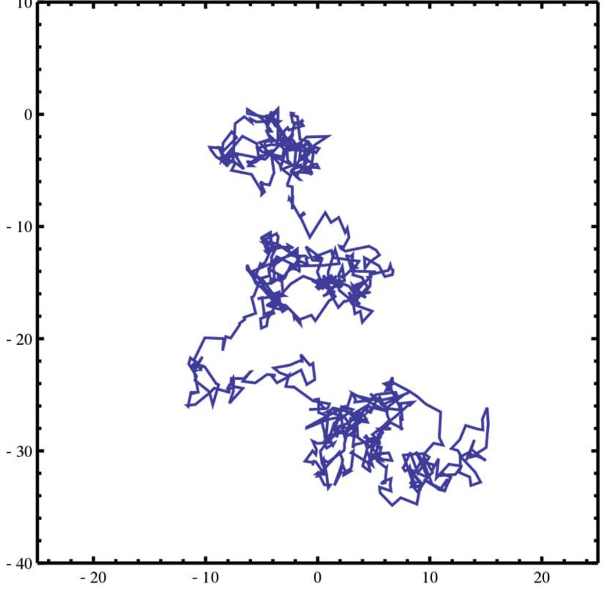


دالة كونوي تصنع بطريقة مشابهة لمثالنا و أكثر عشوائية فهي غير مستمرة عند أي نقطة.

https://fr.m.wikipedia.org/.../Fonction_de_Conway_en_base_13

الذي أردت أن أشير له في هذا المقال أن الحدس البشري قد ينخدع بالمعتاد فالتخلص من هذه الشوائب ليس بالأمر الهين.







هل كل دالة لداربو تقبل دالة أصلية ؟

نحن نعلم أن كل دالة تقبل دالة أصلية هي دالة لداربو فماذا عن العكس هل كل دالة لداربو تقبل دالة أصلية ؟ للتذكير دوال داربو هي الدوال التي تنقل كل مجال لمجال فهي تحقق نتائج مبرهنة القيم المتوسطة وليس شرطا أن تكون مستمرة فدوال داربو تشمل الدوال المستمرة وقسما آخر غير مستمر.

من مثل هذه الدوال الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \sin(1/x) \ , \ x \neq 0$$
$$f(0) = 0$$

فهذه الدالة غير مستمرة عند الصفر لكنها تنقل كل مجال لمجال بسبب أن الصفر نقطة تراكمية لصور f بجوار الصفر ذلك أن $\sin(1/x)$ بجوار الصفر تتأرجح بين -1 و 1 .

نعلم كذلك أن كل مشتقة لدالة هي من دوال داربو وهذا لا يعني أنها مستمرة كذلك مثال ذلك الدالة g المعرفة بـ

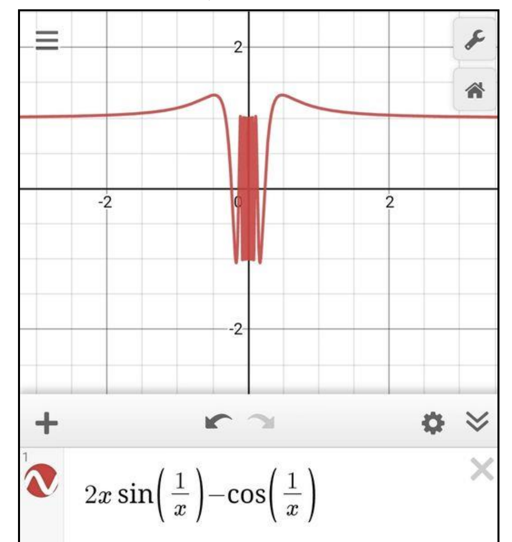
$$k(x) = x^2 \sin(1/x) \ , \ x \neq 0$$
$$k(0)$$

فهي تقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها بما فيها الصفر لكن مشتقتها غير مستمرة عند الصفر

$$k'(x) = 2\, x \sin(1/x) - \cos(1/x) \ , \ x \neq \ k'(0) = 0$$

يمكننا أن نستنتج من هذا الشرط أن كل دالة ليست لداربو لا يمكنها أن تقبل دالة أصلية.

لكن السؤال الذي يطرح نفسه : إذا كانت كل مشتقة هي دالة لداربو فهل كل دالة لداربو هي مشتقة لدالة أي بصياغة أخرى هل تقبل دالة أصلية ؟



للجواب على هذا السؤال يمكننا النظر لهاتين الدالتين:

$$f(x) = \sin(1/x) \ , \ x \neq 0$$
$$f(0) = 0$$

و

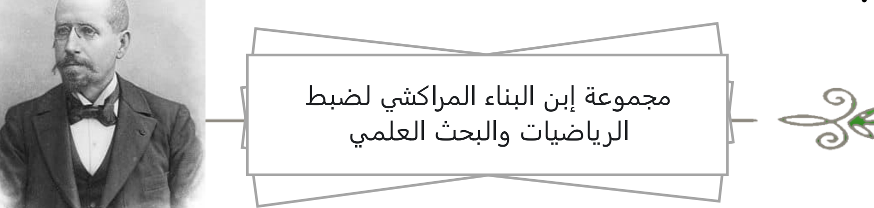
$$g(x) = \sin(1/x) \ , \ x \neq 0$$
$$g(0) = 1$$

فكلتا الدالتين هما دالتين لداربو لكن لو نظرنا للفرق بينهما نجد أن

$$f(x) - g(x) = 0 \ , \ x \neq 0$$
$$f(0) - g(0) = -1$$

وهذه ليست دالة لداربو لأن مجموعة وصولها ليست مجال فهي لا يمكنها أن تكون مشتقة لدالة إذن هي لا تقبل دالة أصلية وهذا يعني أن إحدى الدالتين f أو g على الأقل لا تقبل دالة أصلية (لأننا نعلم أنه إذا قبلت دالتين كل منها دالة أصلية فالفرق بينهما كذلك يقبل دالة أصلية وهذا غير محقق في حالتين) .

إذن f أو g لا تقبل دالة أصلية وكلاهما لداربو وهذا يجيب على سؤالنا بالنفي فكون الدالة لداربو لا يضمن وجود دالة أصلية.



بنية الدالة الأسية بين الجبر و الطبولوجيا، لننظر إلى الدالة الأسية بطريقة مختلفة : بُنيتها وعلاقتها بالدوال الجيبية ....

الدالة الأسية من الدوال المشهورة في التدريس لكن رغم شهرتها قليل من يتأمل في تركيبتها وسبب قوتها.

فمن أين جاءت قوتها التي تضاهي قوة كل كثير حدود في جوار المالانهاية ؟

لما الدالة الأسية تساوي مشتقتها ؟

لما تظهر الدالة الأسية في الطبيعة ؟

ما العلاقة بين الدالة الأسية والدوال الجيبية ؟

سنحاول في هذا المقال إلقاء بعض الضوء على هذه الدالة ومحاولة تفسير بعض خواصها.

للدالة الأسية خمس تعريفات كلها متكافئة

تعريف ينطلق من الدالة العكسية للدالة اللوغارتمية بشرط تعريف اللوغارتم كدالة أصلية لمقلوب x التي تنعدم عند 1 .

وهذا التعريف يعتمد على تعريف اللوغارتم بالمبرهنة الأساسية الأولى في التحليل : إذا كانت الدالة مستمرة فهي قابلة للمكاملة حسب مفهوم ريمان ودالة تكاملها هي دالة أصلية لها.

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8me...

ثم نمر لتعريف الدالة العكسية.

التعريف الثاني ينطلق من نهاية سلسلة النشر المحدود $x^n/n!$

وهو التعريف الذي تبنته مجموعة بورباكي وهذه السلسلة هي المستعملة في برهنة مبرهنة كوشي ليبشيتز القادمة الذكر.

التعريف الثالث ينطلق من نهاية متتالية $(1+x/n)^n$

وهو تعريف تاريخي قليل الاستعمال لأنه لا يظهر الخواص التحليلية للأسية.

التعريف الرابع ينطلق من حل معادلة تفاضلية $y'=y\ ,\ y(0)=1$

وهو يعتمد على مبرهنة كوشي ليبشيتز في المعادلات التفاضلية.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_de_Cauchy

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8me_de...

التعريف الخامس ينطلق من خاصية تحويل الجمع لضرب بدالة مستمرة

$f(x+y)=f(x)\ .\ f(y)\ ,\ f(1)=e$

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Fonction_exponentielle

لنلقي نظرة على التعريف الأخير، فخاصية تحويل الأسية الجمع إلى جداء خاصية أساسية فيها بل كما نرى يمكن بناء هذه الدالة انطلاقا منها.

لكن ماذا تعني هذه الخاصية ؟

هذه الخاصية تخبرنا بأن الدالة الأسية تمثل تماثلا طبيعيا بين زمرة الأعداد الحقيقية المزودة بالجمع و زمرة الأعداد الحقيقية الموجبة تماما المزودة بالضرب.

فالأسية مجرد نقل خواص الزمرة الجمعية إلى الزمرة الضربية وبما أن مجموعة الأعداد الحقيقية زمرة طبولوجية كان ظهورها طبيعي بين العمليتين.

فالضرب مجرد تكرار للجمع والجمع مجرد تكرار للوحدة.

فالدالة الأسية نتيجة طبيعية لتكرار التكرار لذلك نجدها بسهولة في الطبيعة فالطبيعة مبنية على تكرار المتماثلات بطريقة تراجعية ، كتوالد البكتيريا والتي بدورها تتوالد وتتكاثر فنقع طبيعيا في تكرار التكرار.

بل هذه الخاصية تفسر سبب نهاية المتتالية $(1+x/n)^n$

نحو الأسية، فهذه المتتالية تعبر عن موازنة بين الجمع والضرب.

إذ نضيف للواحد جزء من n جزء ل x ثم نضربه n مرة فنحنا نوازن بين جمع الجزء مع الضرب فكان الناتج تقاربا متعلق بالجمع والضرب.

وهذا التوازن ظاهر إذا لجانا لأشتقاق هذه المتتالية والذي يعطي

$$((1+x/n)^n)' = n * 1/n * (1+x/n)^{n-1}$$
$$= (1+x/n)^{n-1}$$

فنلاحظ أن المتتالية توازنت بمشتقتها لتعطي متتالية قريبة منها تعطي نفس النهاية ولعل هذا ما يفسر مساواتها لمشتقتها فيظهر ذلك طبيعيا ،

أليست الأسية تكرار التكرار التكرار .... فإذا قسمناه على تكرار بقي تكرار تكرار .... وكأنها تكرر نفسها.

قوة الأسية أمام كثيرات الحدود يمكن تفسيرها بنهاية $(1+x/n)^n$

كأنها كثير حدود لا نهائي الدرجة.

بل حتى نشر الدالة الأسية جمع متتالي موجب لضرب ممثل في قوى بشكل سهل $x^n/n!$

شكل الأسية يدفعنا كذلك لمقارنتها بالمتتاليات الهندسية فلو كتبنا مجموع متتالية هندسة أساسها e فسنجد

$$1+e+e^2+...+e^n = (e^{n+1} - 1)/(e - 1)$$
$$= (e^n - 1/e)/(1 - 1/e)$$

وكأن مجموع الأسية يعطي عبارة قريبة من الأسية فهذا يذكرنا بالتكامل فكأن تكاملها يشابهها

لكن ماذا يحدث لو قارنا جمع الحدود حدا حدا بالواحد فالعدد $e > 1$ ومنه

$$e^{n+1} - 1 > (e^{n+1} - 1)/(e - 1) = 1+e+e^2+...+e^n \geq 1 + 1 + ... +1 = n+1$$

وكأننا نرى العلاقة $e^x \geq 1 + x$ بل يمكننا تكرار المقارنة لكن هذه المرة بـ $e^n \geq n+1$



فنجد

$$e^{n+1} \geq 1 +(1 +1) + (2 +1)+ (3 +1)+ ..+ (n + 1)$$

ومنه

$$en+1 \geq 1 + n + 1/2\ n\ (n+1)$$

وكأننا نرى بداية نشر الأسية

$$e^x \geq 1 + x + 1/2\ x^2$$

فالدالة الأسية أكبر من كثير حدود من الدرجة الثانية

ولو واصلنا المقارنة بنفس الطريقة فسنبين أن الدالة الأسية أقوى من أي كثير حدود ولصنعنا مثير حديود يشبه إلى حد ما نشر الأسية.

الملاحظ هنا أننا أستعملنا الجمع والضرب فقط لبرهنة هذه النتائج فخواص الأسية تنبع من عمليات جمع وضرب بسيطة.

السؤال المطروح الآن إن كانت الدالة الأسية تظهر طبيعيا من تحويل الجمع إلى ضرب فما علاقتها بالدوال الجيبية والأعداد العقدية ؟

وهنا الحدس يقودنا لربط ذلك بالأعداد المركبة،

أليس ضرب عددين مركبين يجمع بين الزوايا فهو تحويل للضرب نحو الجمع.

بل تحويل الجمع إلى ضرب والعكس نجده في الدوال الجيبية:

$$\sin a \cos b = 1/2 (\sin (a+b) + \sin(a-b))$$

ثم أليس مشتقة الأسية مرتين هو نفسها أما مشتق الدالة الجيبية مرتين $(\sin x)'' = - \sin x$ هو ناقص نفسها ؟

ألا يذكرنا هذا الناقص بالعدد التخيلي $i^2 = -1$ فلو تصورنا الدالة $e^{(a x)}$

فمشتقتها مرتين هي $(e^{(a x)})'' = a^2 e^{(a x)}$

فلو تخيلنا $a = i$ نجد $(e^{i x})'' = i^2 e^{i x} = - e^{i x}$

فنحصل على ناقص الدالة وهذا شبيه بالمشتقة الثانية للجيبية.

فالدالة الأسية والجيبية متشابهتان في الكثير من النواحي وللمسألة علاقة بالعدد التخيلي i فذلك يدفعنا للبحث عن العلاقة بينهما من خلال الأعداد المركبة وهذه العلاقة تظهر جليا من خلال نشر كل منهما فعند التعويض في النشر نجد صيغ أولر الشهيرة

$$\cos x = (e^{ix} + i\ e^{-ix})/2$$

$$\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$$

مما سبق نجد أن خواص الدالة الأسية نابعة من العمليات الجبرية سواء في حقل الأعداد الحقيقية أو في حقل الأعداد المركبة فهي دالة طبيعية متعلقة بالبنية الجبرية للحقلول العددية.



وهنا نتساءل هل توجد دوال أسية في حقول أخرى ؟

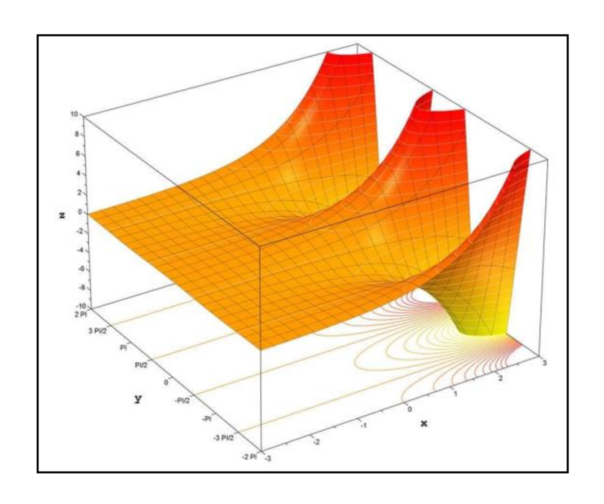
الجواب نعم فمتى وجد الجمع والضرب والنهاية أمكننا تعريف الأسية عن طريق نشرها لذلك نجد لها تعريفا في المصفوفات وفي المؤثرات التفاضلية وفي المنوعات وفي جبر باناخ.

https://fr.m.wikipedia.org/.../Exponentielle_d%27une_matrice

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Alg%C3%A8bre_de_Banach

بل يمكننا تعميمها انطلاقا من R نحو زمرة طبولوجية ففي النهاية الأسية مجرد تماثل بين زمرتين طبولوجيتين.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Application_exponentielle



Exponentielle d'un opérateur différentiel 

On peut de même définir l'exponentielle d'un opérateur différentiel D par :

$$\exp(D) = \mathrm{e}^D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k.$$

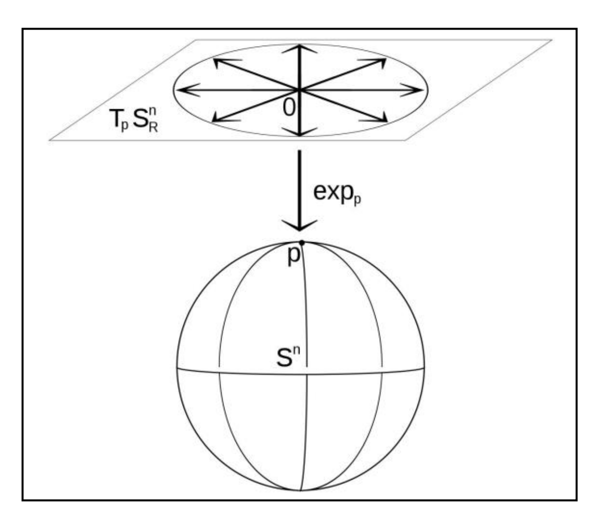
Par exemple, quand $D = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ où a est une constante :

$$\exp\left(a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) = \mathrm{e}^{a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\right),$$

si bien que pour toute fonction $f(x)$ analytique, on a

$$\mathrm{e}^{a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} f(x) = f(x+a),$$

un avatar de la formule de Taylor[5].





سئلت عن مسألة اختلطت فيها المفاهيم وهي كيف يمكن تعريف الدالة الأسية بالنشر والنشر يحتاج للاشتقاق ؟

فكان الجواب كالتالي:

أصل المشكلة عدم التفريق بين الدالة وصيغتها، فالدالة هي علاقة ثنائية بين مجموعتين بحيث ترفق لكل عنصر من مجموعة البدء صورة على الأكثر في مجموعة الوصول.

فالدالة بتعريفها هي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي بين مجموعة البدء في مجموعة الوصول.

مثال ذلك الدوال من R نحو R فهي مجموعات جزئية من $R \times R$.

هذا يعني أن الدوال موجودة أصالة في $R \times R$ موجودة من المسلمات الأصلية لنظرية المجموعات ZFC .

لكن ماذا يعني أن نعرف دالة f مثلا بالشكل $f(x) = x^2$

فالصيغة الجبرية x^2 هي مجرد طريقة حسابية أظهرنا بها f لكن f موجودة حتى قبل كتابة هذه الصيغة إنما كل ما فعلناه هو تحديدها وتسميتها.

ولذلك الدالة عندها أكثر من صيغة فيمكنك أن تكتب

$f(x) = x^2 = x^2+x - x = (x^4)^{1/2} = (1/3\ x^3)'$ .....

فالدالة موجودة ومشتقتها موجودة في $R \times R$ حتى قبل أن نضع $f(x) = x^2$

لذلك نتكلم عن مجموعة الدوال.

نفس الشيء مع الأسية فهي موجودة في $R \times R$ إنما كل ما فعلناه هو تعريفها بصيغة وصيغها كثيرة منها النشر ومنها بالنهايات ومنها بالدالة العكسية للوغارتم .... فكلها تعريفات متكافئة أي تحدد نفس المجموعة الجزئية من الجداء الديكارتي والتي تمثل الدالة.

فالسلاسل معرفة بصيغتها ولا تحتاج لدالة مألوفة لكن يحدث أن السلاسل تمثل طريقة حسابية تساعدنا على تعريف دالة مألوفة كالأسية فيوافق نشرها ولا يعني ذلك أنه يصنعها من مشتقاتها.

النشور موجودة وتكون كدوال على غير المجموعة الخالية إذا كانت متقاربة وبعضها يوافق طرق صياغة مختلفة لدوال ك sin و cos وln فهذا يعني أن طريقة صياغة هذه الدوال غير وحيدة بل يمكنك أن تخترع طرقا أخرى لأن المساواة في النهاية مجرد قضية تعرف مجموعة

فعندما تكتب $f'(x) = f(x)$ على R فقد عرفت قضية تحدد دولا كعناصر من مجموعات جزئية من $R \times R$ بحيث من أجل كل مجموعة ثنائيات (x,y) التي نسميها دالة ستحقق $y' = y$

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \ldots$$

كيف نبرهن أن السلسلة المتناسقة (الهارمونية) متباعدة Série harmonique

$H_n = \sum 1/k \,,\ 1 \le k \le n$

لبرهنة تباعد السلسلة المتناسقة هناك طرق متعددة سنقترح بعضها:

الطريقة الأولى باستعمال شرط كوشي للمتتاليات الكوشية

سنبرهن أن السلسلة ليست بكوشية لأننا نعلم أن كل متتالية متقاربة فهي كوشية فإن لم تكن متقاربة فهي ليست كوشية. لو أخذنا n و $m=2n$ سنجد

$$H_{2n} - H_n = (1/1 + 1/2 + \ldots + 1/n + 1/(n+1) + \ldots. + 1/2n) - (1/1 + 1/2 + \ldots + 1/n)$$

$$= (1/(n+1) + \ldots. + 1/2n) \ge (1/2n + 1/2n + \ldots + 1/2n) = n/2n$$

$$= 1/2$$

أي شرط كوشي ليس محققا فيكفي أخذ $\xi < 1/2$ لنجد استحالة تحقق

$$1/2 \le |H_n - H_m| < \xi < 1/2$$

فنستنتج أن المتتالية H_n غير متقاربة أي هي متباعدة وكونها متباعدة ومتزايدة يمكننا من كتابة

$$\lim H_n = +\infty$$

الطريقة الثانية باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية فنحن نعلم أن مشتق الدالة اللوغارتمية هو مقلوب x ومنه

$$\forall\ k \in \mathbb{N}^* : \ln(k+1) - \ln(k) = [(k+1) - k]\ 1/c(k) \,,\ k < c(k) < k+1$$

بما أن $k < c(k) < k+1$ نستنتج أن $1/(k+1) < 1/c(k) < 1/k$ ومنه

لدينا $\forall\ k \in \mathbb{N}^* : 1/(k+1) < \ln(k+1) - \ln(k) < 1/k$ إذن يمكننا أن نكتب

$$1/2 < \ln(2) - \ln(1) < 1/1$$
$$1/3 < \ln(3) - \ln(2) < 1/2$$
$$1/4 < \ln(4) - \ln(3) < 1/3$$
$$\ldots.$$
$$1/(n+1) < \ln(n+1) - \ln(n) < 1/n$$

بالجمع والاختصار نجد $H(n+1) - 1 < \ln(n+1) - \ln(1) < H_n$

أي $H_n - 1 + 1/(n+1) < \ln(n+1) < H_n$ كون $H_n > \ln(n+1)$ يمكننا من استخدام الحصر

كون اللوغارتم يؤول للمالانهاية لكتابة $\lim H_n = +\infty$ ومنه السلسلة متباعدة بل لدينا من المتراجحة

السابقة: $[H_n - 1 + 1/(n+1)]/H_n < \ln(n+1)/H_n < 1$ ومنه

$$\lim\ [H_n - 1 + 1/(n+1)]/H_n = 1 \le \lim \ln(n+1)/H_n \le 1$$

أي $\lim \ln(n+1)/H_n = 1 = \lim \ln(n)/H_n$ في الحقيقة $\lim H_n - \ln(n) = \gamma$ يسمى هذا

الثابت بثابت Euler-Mascheroni

الطريقة الثالثة بمجاميع ريمان عن طريق كتابة مجاميع ريمان لتكامل $\ln$ من الصفر للواحد تعطينا السلسلة

H_n

مدخل إلى التكامل باستعمال طريقة الربط بين المعارف (نسخة جديدة) :

الإنطلاق من الأمثلة ، بإستعمال الإشتقاق ، التقريب التآلفي، الدالة الأصلية، حساب المساحات هندسيا.

عبد الحكيم بن شعبانة

مدخل إلى التكامل

صفحة 1

لنأخذ دالة حقيقية f ثابتة منحناها البياني كما في الصورة

نلاحظ أن مساحة المستطيل الملون في الصورة تساوي الطول في العرض

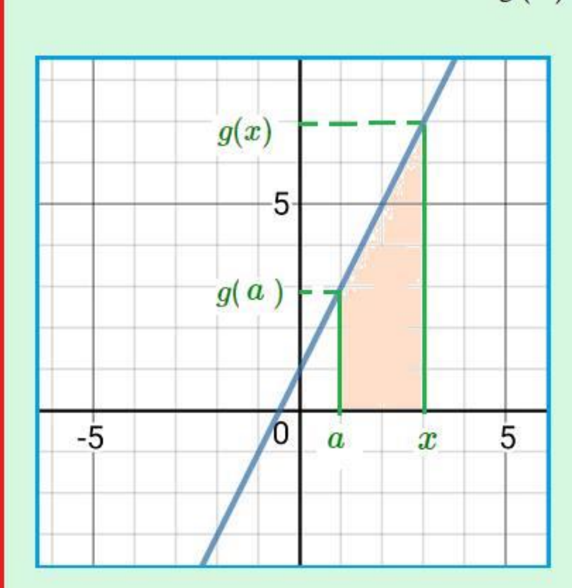
$$S_{a,x} = 5 \times (x - a) = 5x - 5a$$

ولو اشتققنا عبارة المساحة فسنجد

$$S'_{a,x} = 5 = f(x)$$

لو تأملنا دالة أخرى خطية مثلا كما في المنحنى الثاني $g(x) = 2x + 1$

فالمساحة هي مساحة شبه منحرف و تساوي طول الارتفاع في نصف



مجموع طول الضلعين المتوازيين

$$\begin{aligned} S_{a,x} &= (x-a) \times \frac{g(x)+g(a)}{2} \\ &= (x-a) \times \frac{2x+1+2a+1}{2} \\ &= (x-a) \times \frac{2x+2a+2}{2} \\ &= (x-a)((x+a)+1) \\ &= x^2 - a^2 + x - a \\ &= x^2 + x - a^2 - a \\ &= (x^2 + x) - (a^2 + a) \end{aligned}$$

ولو اشتققنا عبارة المساحة فسنجد $S'_{a,x} = 2x + 1 = g(x)$

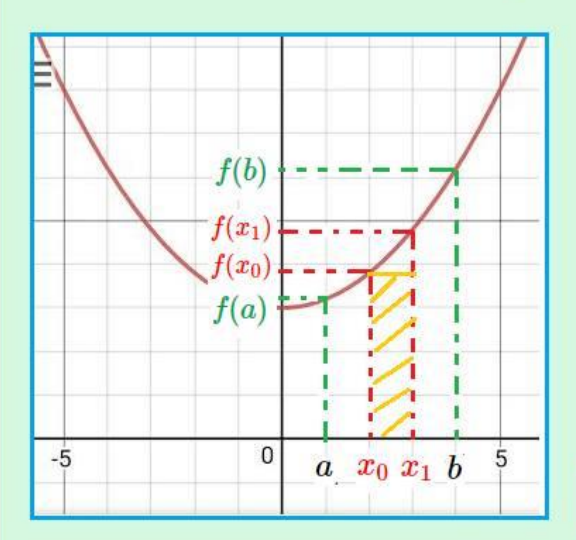
نلاحظ أنه يوجد رابط بين المساحة تحتى منحنى الدالة والدالة فكأن مشتقه يساوي الدالة، لو اعتبرنا دالة F بحيث

$F'(x) = f(x)$ فكأن المساحة تكتب بالعلاقة $S_{a,x} = F(x) - F(a)$

وهذا ملاحظ من شكل عبارة المساحة السابقة $S_{a,x} = (x^2 + x) - (a^2 + a)$

سنسمي الدالة F التي مشتقها f بالدالة الأصلية ل f ، في الحقيقية هي مجموعة دوال فنلاحظ أن الدوال الأصلية للدالة التي عبارتها $f(x) = 5$ هي كل دالة عبارتها من الشكل $F(x) = 5x + c$ حيث c عدد ثابت حقيقي لأن مشتق الثابت هو الصفر

سنحاول في الصفحات القادمة تأكيد العلاقة التي لاحظناها هنا بين الدالة الأصلية مع المساحة المحصورة بين منحنى مشتقتها و محور السينات



لنأخذ دالة حقيقية f التي منحناها البياني كما في الصورة

عبارة العدد المشتق عند نقطة x_0 تعطى بالعلاقة

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

لو اخترنا نقطة x_1 قريبة جدا من x_0 يمكننا أن نكتب

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \approx f'(x_0)$$

ومنه

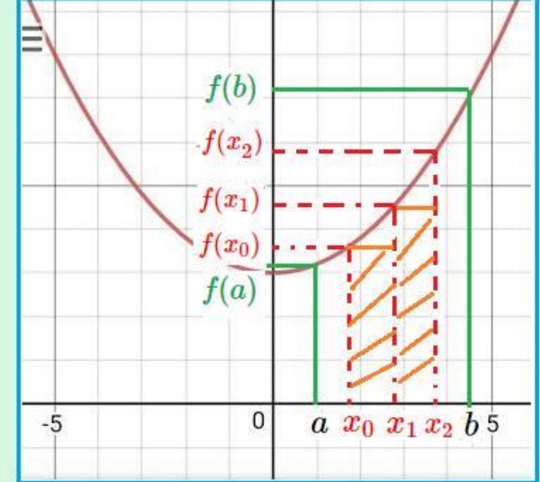
$$f(x_1) - f(x_0) \approx (x_1 - x_0)f'(x_0)$$

فيمكننا تقريب الدالة بمشتقتها و هذا ما نسميه التقريب التآلفي، لكن ماذا يحدث لو قمنا بالعملية العكسية ؟

لننطلق من الإشتقاق، فلنعتبر الدالة f كمشتقة لدالة أخرى F أي $F'(x) = f(x)$

ومنه $F(x_1) - F(x_0) \approx (x_1 - x_0)f(x_0)$

لو تأملنا القيمة اليمنى لهذا التقريب نجدها مساحة المستطيل المخطط بالبرتقالي في المنحني والذي هو محصور بين منحنَى الدالة و محور السينات



لو أخذنا نقطة أخرى x_2 قريبة جدا من x_1 وكررنا العملية فنجد

$$F(x_2) - F(x_1) \approx (x_2 - x_1)f(x_1)$$

وهي مساحة مستطيل مجاورة كما في الصورة الثانية

لو جمعنا المساحتين نجد مساحة أكبر محصورة بين منحنى الدالة و محور السينات وهي توافق الجمع بين العلاقتين السابقتين

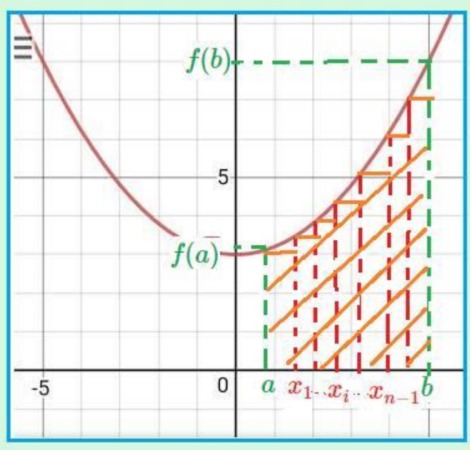
$$F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) \approx (x_2 - x_1)f(x_1) + (x_1 - x_0)f(x_0)$$

ومنه

$$F(x_2) - F(x_0) \approx (x_2 - x_1)f(x_1) + (x_1 - x_0)f(x_0)$$

ماذا يحدث لو قسمنا المجال $[a,b]$ على n جزء وكررنا هذه العملية عند كل نقطة من هذا المجال ؟

$$a, x_1, x_2, .., x_{n-1}, b$$



لو قسمنا المجال $[a,b]$ على n جزء وكررنا هذه العملية عند كل نقطة من هذا المجال فسنجد المساحة الدرجية المخططة بالبرتقالي و التي تكاد تكون المساحة المحصورة بين المنحنى و محور السينات والتي نجّد تقريبا لها بجمع التقريبات التآلفية كما فعلنا سابقا

سنسمي هذه المساحة $S_{a,b}$

إذن

$$F(b)-F(x_{n-1})+F(x_{n-1})-F(x_{n-2})+\ldots+F(x_1)-F(a)$$

$$\approx (b-x_{n-1})f(x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})f(x_{n-2})+\ldots+(x_1-a)f(a)$$

$$\approx S_{a,b}$$

بما أننا قسمنا المجال على n جزء فسنحصل على أجزاها طولها متساوي و نرمز له ب Δx

$$F(b)-F(a)\approx (b-x_{n-1})f(x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})f(x_{n-2})+\ldots+(x_1-a)f(a)$$

$$\approx \Delta x\, f(x_{n-1})+\Delta x\, f(x_{n-2})+\ldots+\Delta x\, f(a)$$

سنستعمل رمز المجموع للتعبير عن هذا المجموع

$$F(b)-F(a)\approx \sum_{i=0}^{n-1}\Delta x f(x_i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x \quad \approx \quad S_{a,b}$$

في الحقيقية لو جعلنا n كبير جدا سنقترب إلى المساحة المحصورة بين المنحنى و محور السينات

بمعنى آخر المسافة بين النقاط أي كل جزء Δx تقترب من الصفر

$$F(b)-F(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_a^b f(x_i)\,\Delta x = S_{a,b}$$

نسمي هذا المجموع تكامل الدالة f

أول من وضع قواعد هذه الحسابات هو الرياضي ليبنيز سنة 1682

وقد رمز للمجوع بالرمز $\int$ وهو S كبير زمزا للمجموع باللاتينية

SOMME ، بما أن Δx يؤول إلى الصفر فسنرمز له ب dx

ونعيد كتابة العلاقة السابقة كالتالي

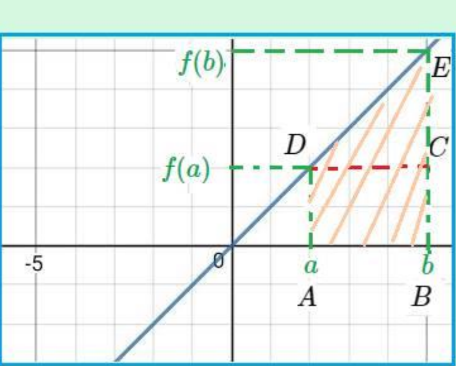
$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx = S_{a,b}$$

نلاحظ أن تكامل الدالة f على المجال $[a,b]$ يعبر عن المساحة بين المنحنى و محور السينات

الدالة F تسمى الدالة الأصلية ل f أي $F'(x)=f(x)$

إذن تكامل الدالة f على المجال $[a,b]$ يساوي الفارق بين قيمتي الدالة الأصلية F عند a,b

أمثلة



نأخذ المستقيم المعرف بالدالة $f(x)=x$

لنحاول حساب المساحة المحصورة بين المنحنى و محور السينات

في المجال $[a,b]$ بطريقتين بالقواعد الهندسية و بالتكامل

هندسيا

مساحة المستطيل $ABCD$ + مساحة المثلث DCE $S_{a,b}=$

$$= \frac{1}{2}\cdot \bar{CD}\cdot \bar{CE} + \bar{AB}\cdot \bar{BC}$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)(f(b)-f(a)) + (b-a)f(a)$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)(b-a) + (b-a)a$$

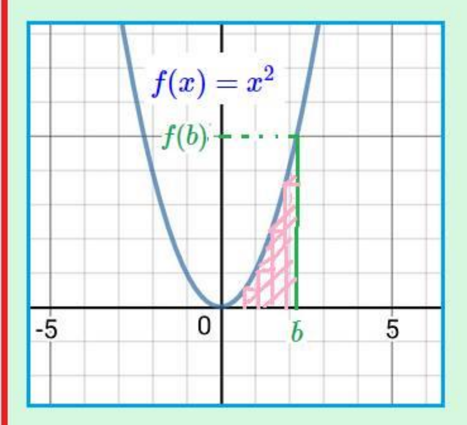
$$= \frac{1}{2}(b-a)((b-a)+2a) = \boxed{\frac{1}{2}(b-a)(b+a)}$$

بالتكامل

نختار الدالة الأصلية $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ $\quad F'(x) = (\frac{1}{2}x^2)' = x = f(x)$

$$S_{a,b} = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x\,dx = F(b)-F(a) = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}(b-a)(b+a)}$$



نأخذ مثال آخر $\boxed{f(x)=x^2}$

لنحاول حساب المساحة المحصورة بين المنحنى و محور السينات

في المجال $[0,b]$ بالتكامل

نختار الدالة الأصلية $F(x) = \frac{1}{3}x^3$

$$F'(x) = (\frac{1}{3}x^3)' = x^2 = f(x)$$

$$S_{0,b} = \int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b x^2\,dx = F(b)-F(0) = \boxed{\frac{1}{3}b^3}$$

أنواع التكاملات:

Intégrale de Bochner

Intégrale de Cauchy

Intégrale de chemin

Intégrale curviligne

Intégrale de Daniell

Intégrale de Darboux

Intégrale de Haar

Intégrale de Kurzweil–Henstock

Intégrale de Lebesgue

Intégrale de Riemann

Intégrale de Stieltjes

Intégrale d'Itō

Intégrale de Stratonovich

Intégrale de young

نظرة طبولوجية في الدوال المستمرة

ما هو إستمرار دالة ؟

لو نظرنا للدالة من ناحية صورها فهي تعبر عن نقاط موزعة على سوابق لذلك عندما تكون الدالة ذات قيم عددية فهي تعبر عن كثافة.

فيمكننا أن نرى صور الدالة كنقاط موزعة على سوابق تختلف كثافتها من حيث التوزيع لكن لا ننسى أن نظرتنا لصور الدالة تحكمها طبيعة طبولوجية فنحن ننظر لنقاط الدالة المتجاورة من حيث المفهوم الطبولوجي أي موجودة في نفس الجوار لكن نسميها متجاورة لأنها كذلك صور لسوابق متجاورة.

فنحن ننظر لطبولوجيتين:

أن صور سوابق متجاورة هي متجاورة فالإستمرار هو تلاصق صور الدالة لسوابق متجاورة وهذا ما نسميه عدم الإنقطاع.

لكن الأهم هنا أن التجاور الذي يعبر لدينا عن مفهوم الإقتراب هو تجاور الصور لا السوابق فهذه هي القيم التي تتلاصق مع بعضها لتشكل الإستمرار.

فعندما نصب عسلا في إناء فإننا لا نقول أن الزمن هو المستمر إنما نقول أن خيط العسل لا يتقطع أو هو متلاصق مهما كان زمن صبه فنحن ننظر للصور لكن في ترتيب زمني.

الإشكالية التي تطرح أنه لو إخترنا نقطة y_0 من صور الدالة وأخذنا لها جوار فكيف يمكننا تمييز صور الدالة المتلاصقة مع نقطتنا من القيم الأخرى فليس كل نقاط الجوار هي صور بالدالة ؟

في الحقيقة هنا ليس لدينا خيار إلا النظر إلى الصور العكسية لهذا الجوار فنبحث عن سوابقنا بجوار سوابق y_0 .

لذلك نعرف الدالة المستمرة بكون صورتها العكسية لكل مفتوح هو مفتوح.

قد يقول أحدهم لماذا لا ننطلق من جوار لسابقة y_0 ونرى هل صورته تشكل جوارا ل y_0 ؟

الجواب يأتي من الفرق بين مفهوم المفتوح والجوار فقد يظن لأول وهلة أن كلاهما سيان فالجوار ما هو إلا مجموعة تشمل مفتوحا يشمل x ؟

لكن الجوار بمجرد هذا التعريف يفقد مفهوم التجاور لأن المفتوحات كثيرة بل حتى المجموعة الأم مفتوح!!!

فائدة الجوار تأتي عند تصغيره بالإحتواء أي نأخذ سلسلة جوارات مرتبة بالإحتواء والتي نريدها في النهاية أن تتقاطع لتعطينا نقطتنا، بالطبع إذا كانت الطبولوجيا منفصلة.

فما فائدة أن نبحث عن صورة جوار ل x_0 هي جوار ل y_0 إذا كان ذلك لا يعطي سلسلة الجوارات ل y_0 التي تتقاطع لتعطينا y_0 ؟



فالطريقة الوحيدة هي أخذ جميع جوارات y_0 والتي لو قاطعناها لوجدنا y_0 ثم ننظر لسوابق كل جوار فمتى كانت سوابقه في جوار ل x_0 لا تخرج صوره عن جوارنا أمكننا القول أن صور دالتنا متلاصقة أي الدالة مستمرة.

فالذي يقود الإستمرار هو تقاطع جوارات الصور ولو نظرنا لتعريف الإستمرار الإبسيلوني فسنجده يتم بهذه الطريقة إذ نستعمل مهما يكن إبسيلون و نحصر صور الدالة بجوار y_0 عن طريق الإبسيلون.

ولو رجعنا لنهايات المتتاليات لوجدنا أن السوابق مجرد ترتيب طبيعي واننا نبحث عن صور المتتالية داخل جوار إنطلاقا من قيمة ترتيب n_0 فهنا لا تهمنا السوابق بقدر ما يهمنا وجود صور المتتالية داخل الجوار.

ولو أخذنا مثالا لدالة تنقل مفتوحا لمفتوح كالدالة المعرفة بالصيغة $\sin(1/x)$ والممدة بالصفر عند الصفر فسنجدها غير مستمرة عند الصفر رغم أنها تنقل مفتوحا لمفتوح لكن تصغير جوارات الصفر لا يعطينا تصغيرا لجوارات صورة الصفر بالدالة إذ مهما اقتربنا من الصفر فسنجد الصورة دائما هي مجال بين -1 و 1 لا يتضاءل.



الاستمرار والتكامل : نظرة طبولوجية

إن المتأمل في الدوال وعلاقتها بالطبولوجيا يجدها مجرد إعادة توزيع نقاط تسمى سوابق في صور في مجموعة الوصول فإذا نظرنا إلى هذا التوزيع من حيث النهايات نجد أن نهاية دالة عند سابقة ما هي إلا نقطة ملاصقة لصور الدالة المجاورة لها والتي أصلها سوابق بجوار السابقة المعينة.

فإذا أدخلنا مفهوم الاستمرار فنجد أن الدالة المستمرة هي الدالة التي كل صورة من صورها هي ملاصقة للصور التي بجوارها أي بالمفهوم الطبولوجي كلما أردنا عزل هذه الصورة بمفتوح فلا نستطيع لاننا سنجد بجوار سابقتنا مفتوحا كل صوره بجوار صورتنا.

بتعبير أبسط الاستمرار هو تلاصق كل صورة بما جاورها من الصور وهذا الذي نعبر عنه بعدم انقطاع المنحنى عند وجوده وإن كان شرطا كافيا لا لازما لأن رسم المنحنى يحتاج توجها أي اشتقاقا.

إذا فهمنا أن الاستمرار نفسه هو تلاصق للصور بالمفهوم الطبولوجي أدركنا سبب مبرهنة القيم المتوسطة في صورتها الثانية أي صورة كل مجال هو مجال.

ووجود هذا الالتصاق في الدوال الحقيقية يبين قابلية هذه الدوال للحساب القياسي اذ ترابط النقط يؤدي إلى إمكانية تحديد حيز مغلق والذي نعرفه باسم المساحة في المنحنى والذي يعطي وجودا للتكامل بمفهوم ريمان.

فكل دالة حقيقية مستمرة تقبل دالة أصلية لوجود هذا التلاصق او الترابط بين صور الدالة أذ لا يمكن فصل كل صورة عن الصور المجاورة لها.

يجب التنبيه إلى أن مفهوم عدم الانقطاع في الصورة أي صورة مجال هي مجال أضعف من مفهوم التلاصق إذ الصور قد ترتب عن طريق غير متتابع أو بشكل عشوائي لتعطي عدم انقطاع في مجموعة الوصول لكن رغم ذلك هي غير متلاصقة لأنه يمكن عزل نقطة بعزل سوابق جاراتها لأنها لم تأتي من جوار للسابقة.

فمفهوم التلاصق أقوى من مفهوم عدم الانقطاع في الصورة لذلك نجد أن الدوال التي تقبل دالة أصلية تحقق مبرهنة القيم المتوسطة وإن كانت غير مستمرة وهذا ما يعرف بمبرهنة داربو.



العرب و التكامل:

عرف العرب الحساب التكاملي فنجد عند الإخوة بن موسى طريقة في الحساب المتناهي الصغر وعند ثابت ابن قرة أين استعمل تقسيمات لحساب الأحجام بما يوافق ما يعرف اليوم بمجموع وريمان وعند ابن الهيثم أين نجد كل مكونات تكامل بمجموع داربو.

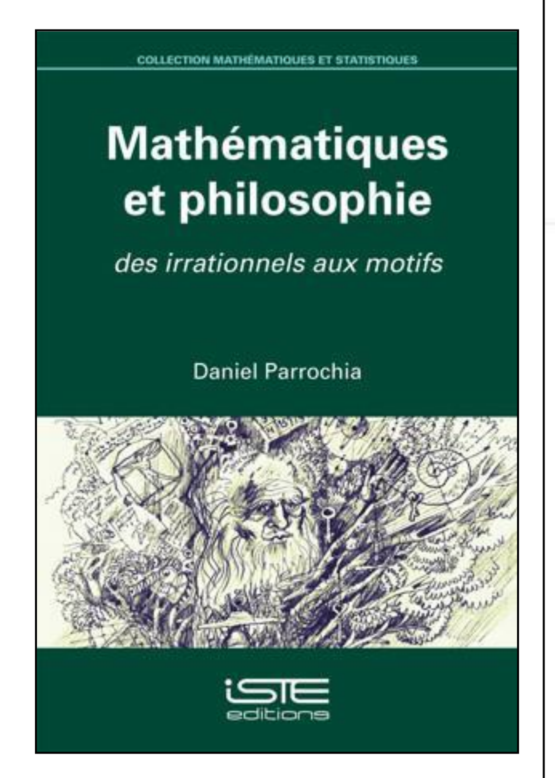
صفحة 92 / 93

Mathématiques et philosophie: Des irrationnels aux motifs

Daniel Parrochia

ISTE Editions, 1 sept. 2017

https://books.google.fr/books?id=v4JIDwAAQBAJ&pg=PA91...



Inspirée d'Euclide, de Diophante et de Nicomaque de Gérase, se développe également une véritable théorie des nombres, incluant des réflexions sur les nombres parfaits, les nombres amiables, le théorème des restes chinois, ce qui permet d'énoncer avant la lettre des résultats importants caractérisant les nombres premiers comme le théorème de Wilson[1] ou les triplets pythagoriciens.

Prolongeant, là encore, les travaux des Grecs, les mathématiciens arabes perfectionnent le calcul des aires et volumes ainsi que le traitement des problèmes isopérimétriques (formules de Héron) et affinent les calculs grâce à l'analyse numérique, créant de nouvelles formules pour les cônes et les pyramides tronquées. Poursuivant

Introduction de la partie 2 93

les travaux d'Archimède, ils créent des techniques de type infinitésimal, notamment les frères Banu Musa, auteurs d'un traité sur la mesure des figures planes et sphériques. Un successeur, Thābit ibn Qurra, aurait procédé à un découpage de l'aire d'une parabole en trapèzes tout à fait analogue à ce qu'on appellera un jour les « sommes de Riemann », et l'on trouverait aussi chez Ibn al-Haytham tous les éléments du calcul d'intégrales par sommes de Darboux (encadrements, quarrement sur les découpages, erreurs rendues aussi petites qu'on veut). Les mathématiciens arabes se limitent cependant au calcul d'aires et de volumes exprimables en fonction d'aires et de volumes déjà connus [RAS 97, p. 106-112].

Le calcul d'aires et de portions de cercles, les fameuses lunules, la question des isopérimètres (à périmètre constant, quelle est la figure possédant la plus petite aire ?) ne leur échappent pas, pas plus que la construction des courbes, les transformations et projections (affines et même projectives), ainsi que la question des fondements (réflexion sur le V[e] postulat d'Euclide, la trigonométrie ou l'optique géométrique).

Bref, à en croire les spécialistes du monde arabe, les mathématiques auraient fortement progressé de l'autre côté de la méditerranée, et cela en l'espace de quelques siècles pendant lesquels l'Europe s'était endormie.

المبرهنة الأساسية الأولى والثانية في التحليل : تكامل ريمان

تنص المبرهنة الأولى في التحليل أنه إذا كانت دالة f مستمرة على مجال I ودالة تكاملها حسب مفهوم ريمان المعرفة بتكامل ريمان للدالة f من نقطة a من I نحو x : $F(x) = \int_{[a,x]} f(t)\, dt$

فلدينا $F'(x) = f(x)$ وكل دالة أصلية G ل f تحقق $G - F$ دالة ثابتة.

البرهان:

لنختر x من I فمن أجل كل h من R^* بحيث F معرفة عند $x+h$ لدينا

$$F(x + h) - F(x) = \int_{[a,x+h]} f(t)\, dt - \int_{[a,x]} f(t)\, dt$$
$$= \int_{[x,x+h]} f(t)\, dt$$

نمر بصناعة عبارة نسبة التغير $(F(x + h) - F(x))/h = (\int_{[x,x+h]} f(t)\, dt)/h$

ثم ننقص قيمة f عند x فنجد

$$(F(x + h) - F(x))/h - f(x) = (\int_{[x,x+h]} f(t)\, dt)/h - f(x)$$
$$= (\int_{[x,x+h]} f(t)\, dt - h\, f(x))/h$$

ثم ندخل القيمة الثابتة بالنسبة لt : $f(x)$

تحت التكامل فنجد $(\int_{[x,x+h]} f(t)\, dt - \int_{[x,x+h]} f(x)\, dt)/h$

ومنه $(F(x + h) - F(x))/h - f(x) = (\int_{[x,x+h]} (f(t) - f(x))\, dt)/h$

بما أن f مستمرة فيمكننا من أجل كل $\xi > 0$ أن نختار h

بحيث $|t - x| \leq h \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \xi$ ومنه

$$|(F(x + h) - F(x))/h - f(x)| = |(\int_{[x,x+h]} (f(t) - f(x))\, dt)/h|$$
$$\leq |(\int[x,x+h]\, \xi\, dt)/h| = \xi$$

وهذا تعريف النهاية نحو الصفر أي: $\text{Lim } (F(x + h) - F(x))/h - f(x) = 0 \mid h \to 0$

أي $F'(x) = f(x)$ بالنسبة للجزء الثاني فمن أجل كل دالة أصلية G ل f لدينا

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x)$$
$$= f(x) - f(x) = 0$$

ونحن نعلم من مبرهنة التزايدات المنتهية أن الدالة الأصلية للصفر هي دالة ثابتة ذلك أنه إن كان مشتق دالة H هو الصفر من أجل كل x من I

$$H'(x) = 0$$

فإنه إذا أخذنا y و z من I فحسب مبرهنة التزايدات المنتهية

$$H(y) - H(z) = (y - z) \times H'(c) = (y - z) \times 0 = 0$$

ومنه $G - F$ ثابتة وهو المطلوب.

أما المبرهنة الثانية في التحليل فتنص على أنه إذا كانت دالة f تقبل دالة أصلية F على مجال I فإنها قابلة للمكاملة حسب ريمان ولدينا من أجل كل a و b منI : $\int_{[a,b]} f(t)\, dt = F(b) - F(a)$

لنضبط الرياضيات معا: علاقة تكامل ريمان بالدالة الأصلية وبالإستمرار.

تكامل ريمان على مجال متراص هو محاولة تكميم كمية دالة عن طريق إعتبار صورها ككثافة منتشرة على مجال.

فلو أردنا ضرب مثال من الواقع فيمكنا مثلا شرح كيفية حساب كمية الملح الموجودة في مساحة قطعة أرضية، فالذي سنقوم به هو تقسيم المساحة إلى مربعات صغيرة ثم قياس تركيز الملح في كل مربع ثم جمع جداء تركيز الملح في كل مربع في مساحة المربع .

الذي يقوم به ريمان لحساب التكامل هو نفس الشيء فيقطع المجال لمجالات صغيرة ثم في كل مجال يختار قيمة للدالة تمثلها ثم يجمع جداء كل قيمة في طول مجالها الصغير.

فالطريقة كما يظهر منها تعتمد على إمكانية إعتبار ممثل عن قيم الدالة في كل مجال صغير وهنا ننتبه أم الممثل له معنى إذا كانت قيم الدالة في المجال الصغير متقاربة أو بمعنى آخر الدالة مستمرة على المجال.

فإستمرار الدالة شرط كاف لوجود تكامل ريمان لكنه غير لازم ذلك أنه لو إعتبرنا دالة غير مستمرة عند بعض النقاط المهملة فهذه القيم لا تؤثر في الحساب لأننا لحساب تكامل ريمان نضرب قيمة الدالة في طول المجال الصغير فمتى كانت نقاط عدم الإستمرار مهملة فيمكننا وضعها في مجالات صغيرة مهملة لكي عندما نضرب القيم في طول المجالات نجد صفر فلا تؤثر في الحساب.

ومن هنا يظهر شرط لوبيغ لوجود تكامل ريمان وهو شرط كاف ولازم ينص على أن الدالة تكون قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان إذا وفقط إذا كانت مستمرة ماعدا على مجموعة مهملة أو نقول مستمرة حيثما كان.

إن الإستمرار الكلي شرط كاف لكن غير لازم لوجود تكامل ريمان.

لكن ما علاقة تكامل ريمان بالدالة الأصلية ؟

عندما تقبل دالة دالة أصلية فهي ليست شرطا أن تكون مستمرة فهناك دوال تقبل دوال أصلية لكنها غير مستمرة.

لكن هنا مبرهنتان تساعدنا على فهم هذه الدوال:

الأولى دوال داربو وهي الدوال التي تحقق مبرهنة القيم المتوسطة فكما هو معلوم الدوال المستمرة تحقق مبرهنة القيم المتوسطة لكن الإستمرار شرط كاف غير لازم فهناك دوال أخرى تحقق هذه المبرهنة من غير كونها مستمرة وهذه الدوال نسميها دوال داربو.

من هذه الدوال الدوال التي تقبل دالة أصلية فكون الدالة مشتقة لدالة أخرى يجعلها تحدد اتجاه تغيراتها بل أكبر من ذلك فهذا يجعلها تحقق مبرهنة القيم المتوسطة.

لكن ما علاقة ذلك بتكامل ريمان ؟

تجيب على هذا السؤال مبرهنة بير في النهايات البسيطة والتي تقول في شكلها البسيط أن كل متتالية دوال مستمرة f_n على مجال $[a, b]$ متقاربة عند كل نقطة نحول دالة f فإن نقاط عدم إستمرار f مجموعة



مهملة ومغلقة أي f مستمرة حيثما كان.

وهنا نلاحظ أن الدالة f يمكن اعتبارها كل نقطة كنهاية لمتتالة مصنوعة بدالتها الأصلية

$$\lim \left(F(x+1/n) - F(x) \right)/(1/n)$$

فحسب مبرهنة بير كل دالة تقبل دالة أصلية فهي مستمرة حيثما كان ومنه حسب شرط لوبيغ السابق فهي قابلة للمكاملة حسب ريمان.

لكن المبرهنة الأولى في التحليل تعطي نتيجة أكبر من ذلك فليس فقط الدالة f قابلة للمكاملة على المجال بل يمكن حساب تكاملها بدالتها الأصلية عند حدود المجال $F(b) - F(a)$.

إذا كانت الدالة مستمرة فالنتيجة أقوى من ذلك فليس فقط الدالة تقبل المكاملة و يحسب تكاملها بدالتها الأصلية بل تكامل ريمان نفسه على مجال من شكل $[a,x[$ هو دالة أصلية لها.

إذن لتلخيص ما سبق:

الإستمرار شرط كاف غير لازم لوجود تكامل ريمان فهناك دوال قابلة للمكاملة لكن غير مستمرة فالشرط اللازم والكاف لوجود تكامل ريمان هو الإستمرار حيثما كان.

الإستمرار شرط كاف وغير لازم لوجود الدالة الأصلية فهناك دوال تقبل دوال أصلية لكنها غير مستمرة إلا أن مبرهنة بير تبين لنا أنه متى قبلت الدالة دالة أصلية فيجب أن تكون مستمرة حيثما كان.

قبول دالة دالة أصلية يضمن قبولها لتكامل ريمان وتكاملها يحسب بقيمة دالتها الأصلية عند طرفي المجال.

إذا كانت الدالة مستمرة فهي تقبل دالة أصلية ودالتها الأصلية هي تكامل ريمان نفسه مع متغير في طرف المجال وهذا يعني أن مجاميع ريمان شكل من أشكال كتابة الدالة الأصلية لها.

وهنا يجب أن نفرق بين وجود الدالة الأصلية وكتابتها بعبارات من دوال مألوفة فليست جميع الدوال يمكن كتابتها بعبارات مألوفة ككثيرات الحدود والدوال الجيبية وغيرها وهنا مبرهنة ليوفيل تعطي الشرط الكاف واللازم لإمكانية كتابة دالة أصلية بدوال مألوفة.

مثلا مقلوب اللوغارتم و e^{-x^2} دالتان مستمرتان فهما تقبلان دوال أصلية ويمكننا كتابة عباراتها بواسطة النشر أو السلاسل ومجاميع ريمان لكن لا يمكننا إيجاد عبارة لها بواسطة الدوال المألوفة ككثيرات الحدود والجذور والدوال الجيبية واللوغارتم والأسية.

بل حتى الدالة اللوغارتمية $\ln x$ فهذه ليست عبارة لها إنما مجرد ترميز لأنه لا يمكننا كتابتها بواسطة كسور كثيرات الحدود..

بل حتى $\sin x$ فهذا مجرد ترميز لا عبارة جبرية ولو أردنا حساب قيم الجيب للجأنا إلى إستعمال النشر المحدود.

كمبرهنة عامة كل دالة مستمرة تقبل دالة أصلية ويمكننا حساب التكامل بها.



وجود تكامل ريمان لا يعني وجود الدالة الاصلية.

دالة الجزء الصحيح مثلا هي دالة غير مستمرة لكنها قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان فهي درجية ورغم ذلك لا تقبل دالة أصلية.

ويمكن برهنة ذلك بمبرهنة داربو التي تعمم مبرهنة القيم المتوسطة على أي دالة هي مشتقة لدالة، فالمشتقات هي دوال لداربو أي صورة مجال بها هي مجال وهذا ليس حال دالة الجزء الصحيح فصورة مجال بها ليس بمجال إذن هي ليست دالة لداربو إذن لا تقبل دالة أصلية.

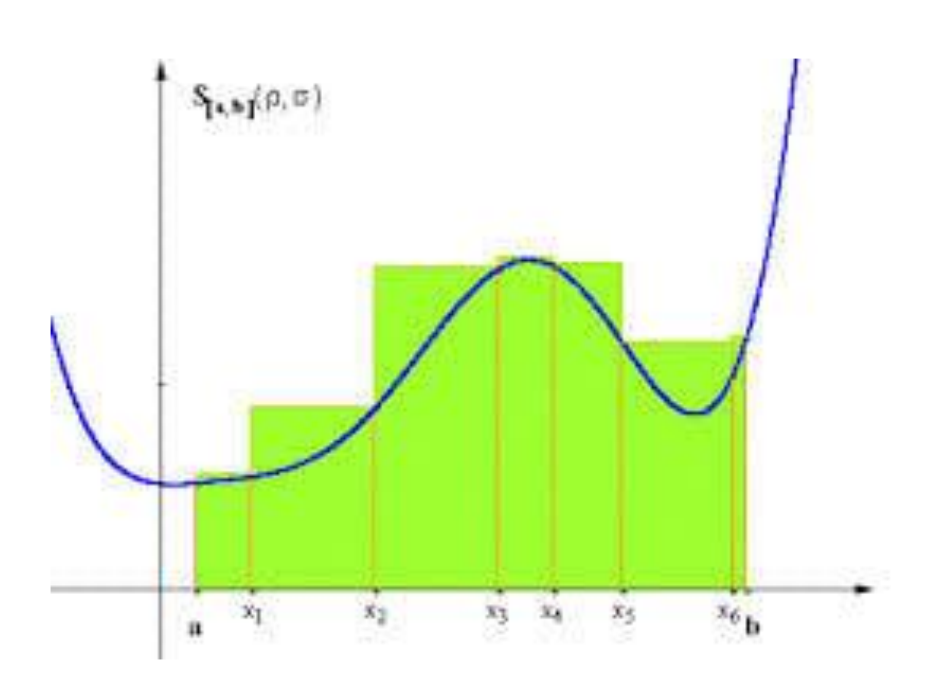
وجود تكامل ريمان لا يعني وجود الدالة الأصلية فلا علاقة بينهما إلا في حالتين:

إذا وجدت الدالة الاصلية وجد تكامل ريمان ويساوي الفرق بين قيمتيها عند الطرفين.

إذا كانت الدالة مستمرة فهي تقبل التكامل بمفهوم ريمان وتكاملها بطرف متغير هو دالة اصلية لها.

إذن وجود تكامل ريمان لوحده دون استمرار الدالة لا يعني أنها تقبل دالة أصلية وهذا حال كل الدوال الدرجية غير الثابتة فهي لا تقبل دوالا أصلية لأنها ليست دوالا لداربو.

كما ينبه إلى أن هناك دوالا تقبل دولا أصلية لكنها غير مستمرة أو يمكن أن نقول ليس مشتق كل دالة حتما مستمر مثال ذلك الدالة $x^2 \sin(1/x)$ الممدة بالصفر عند 0 فمشتقها عند الصفر هو الصفر وخارج الصفر هو $2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ وهذه لا تقبل نهاية عند الصفر.



الاستمرار ليس بشرط في دالة لوجود دالة أصلية لها

نحن نعلم أن كل دالة مستمرة على مجال من R فهي تقبل دالة أصلية ويمكن تعريف أحد هذه الدوال الأصلية عن طريق تكامل ريمان.

لكن هذا الشرط كاف وليس لازم فليس كل الدوال القابلة لدوال أصلية هي مستمرة.

يمكننا رؤية هذه المسألة عن طريق الاشتقاق فليس مشتقة كل دالة هي دالة مستمرة.

لكننا نعلم أن مشتقة دالة هي دالة لداربو أي تنقل كل مجال لمجال.

ونعلم كذلك أنها مستمرة حيثما كان حسب مبرهنة لوبيغ لوجود تكامل ريمان.

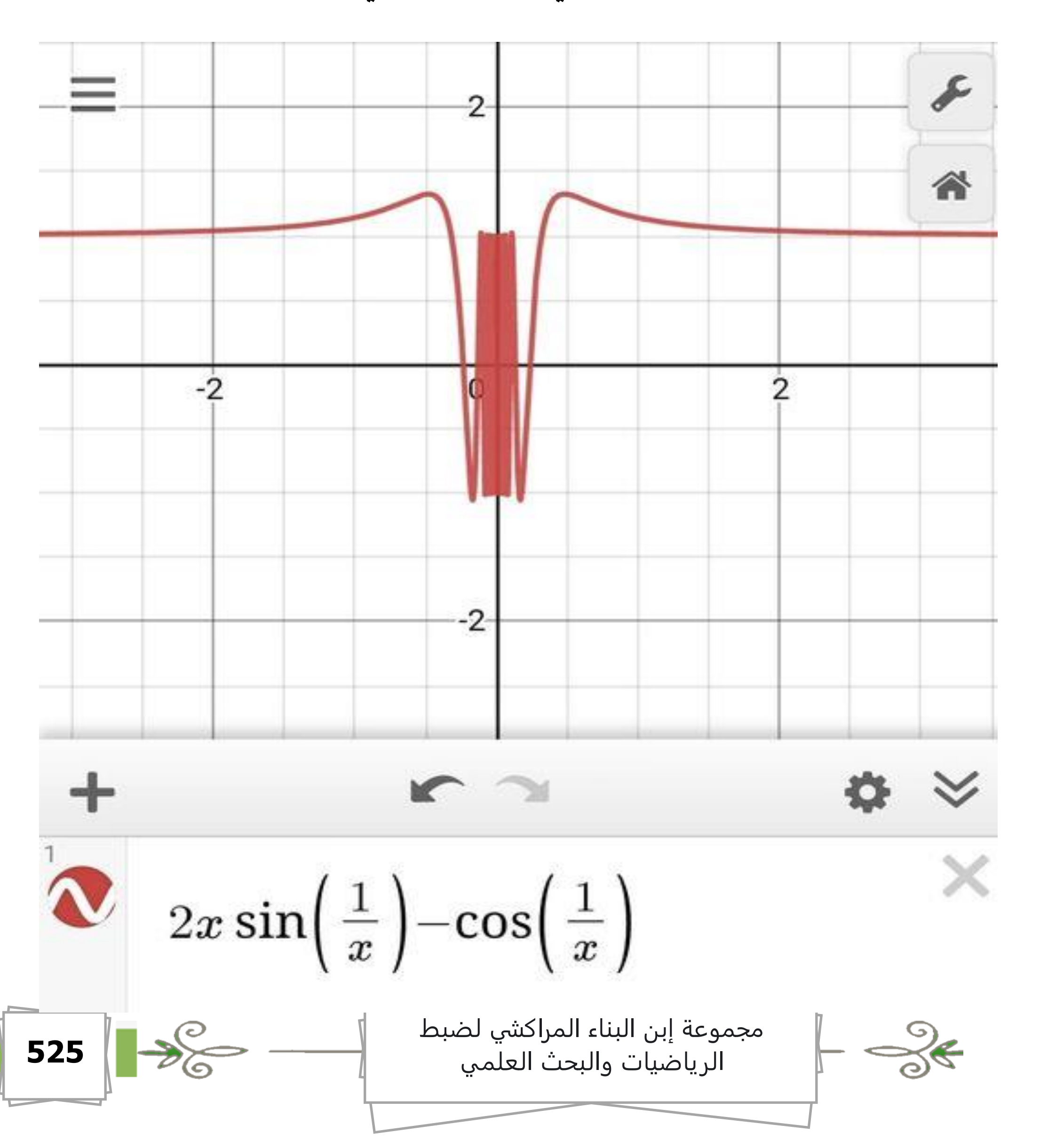
ونعلم كذلك عن طريق مبرهنة بير أنها مستمرة حيثما كان ونقاط انقطاعها تشكل مغلقا.

يمكننا التمثيل عن هذه الدوال عن طريق الدالة الأصلية $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ الممدة بالاستمرار عند الصفر.

فيمكننا اشتقاقها بسهولة عند الصفر لنجد قيمة الصفر وكذلك خارج الصفر عن طريق العلاقات المألوفة فنجد

$$f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) \,,\; x \neq 0$$

فنجد دالة غير مستمرة عند الصفر يمكن تمثيلها في الشكل الذي في الصورة.



لنضبط الرياضيات معا: التفريق بين وجود الدالة الأصلية وكتابتها بعبارات مألوفة.

الكثير يقرن وجود الدالة الأصلية بكتابة عبارتها وهذا خطأ فالدالة اللوغارتمية مثلا ليست لها عبارة مألوفة لكن عرفنا وجودها إنطلاقا من تكامل ريمان لمقلوب x فكل دالة مستمرة تقبل دالة أصلية.

تعريف دالة لا يحتاج كتابة عبارة لها فاحيانا يكون التعريف بإثبات الوجود ككون دالة تقبل صفرا بمبرهنة القيم المتوسطة لكن لا نعرف عند أي قيمة هو.

وقد يكون التعريف بمجاميع غير منتهية كالسلاسل مثلا وكالدالة زيتا لريمان.

وأحيانا يكون التعريف بالتكامل فاللوغارتم تكامل والدالة الأصلية لمقلوب اللوغارتم تكامل كذلك.

وأحيانا يكون التعريف هندسيا كالدوال الجيبية.

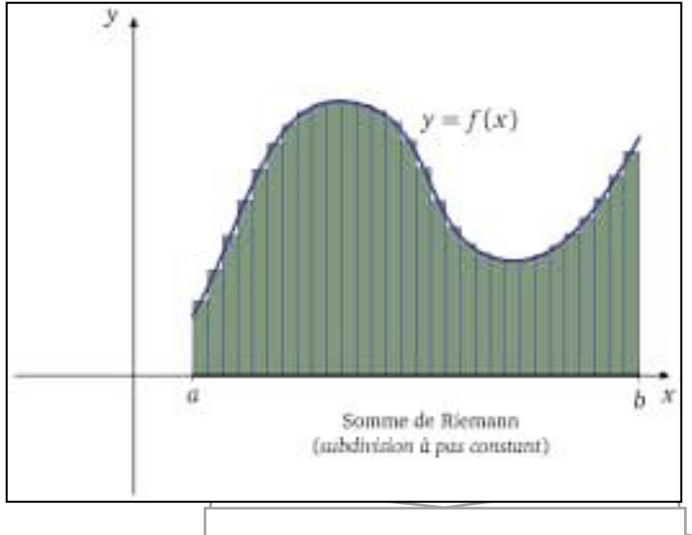
كتابة الدالة الأصلية بعبارة مكونة من دوال مألوفة غير ممكن دائما وفي هذا تعطي مبرهنة ليوفيل الشرط الكاف واللازم لإمكانية كتابة الدوال الأصلية بدوال مألوفة.

المبرهنة الأساسية في التحليل تنص على أن كل دالة حقيقية مستمرة تقبل المكاملة بمفهوم ريمان وتكاملها على مجال محدود بمتغير يعتبر دالة أصلية لها.

فمجاميع ريمان تعطي كتابة لدالة أصلية عن طريق السلاسل.

تبقى مجموعة الدوال المستمرة كبيرة جدا مقارنة بما يمكننا كتابته بالدوال المألوفة وإن كانت كثيرات الحدود مجموعة كثيفة داخل مجموعة الدوال المستمرة فمجموعة الدوال المستمرة لها قوة المستمر أي R .

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}.$$





هل حساب العدد المشتق يحتاج لأن تكون الدالة معرفة على مجال ؟

الجواب لا.

لفهم ذلك لابد من الرجوع للمفهوم الأصلي للاشتقاق، فالاشتقاق والتفاضل بصفة عامة هي محاولة تقريب دالة محليا بتطبيق تآلفي.

هذا يعني أننا نستدعي لذلك مفهومين:

النهاية عبر طبولوجيا للتعبير عن التقريب

وبنية فضاء شعاعي موافقة لهذه الطبولوجيا للتعبير عن التطبيق الخطي.

بالنسبة للنهاية فنحن نعلم أننا لا نحتاج أكثر من كون النقطة تراكمية لحساب نهاية ذات معنى ولذلك لا نحتاج اشتراط مجال في حالة حقل الأعداد الحقيقية لأن المجال له مفهوم أكبر من مفتوح وهو الترابط.

يمكننا حساب العدد المشتق لدوال عند نقطة مع كونها غير معرفة على مجال يشملها مثال ذلك الدالة المعرفة بالصيغة $f(x) = x^2 \sin(1/\sin(1/x))$ والممدة بالصفر عند الصفر فيمكننا حساب العدد المشتق بسهولة عند الصفر:

$$\text{Lim } (f(x) - 0)/(x - 0) = \lim x^2 \sin(1/\sin(1/x))/x$$
$$= \lim x \sin(1/\sin(1/x)) = 0$$

وذلك لأن $\sin$ محصور بين -1 و 1 .

فرغم كون هذه الدالة غير معرفة على مجال مفتوح يشمل 0 بل لا يمكننا تمديدها بالاستمرار عند جميع النقاط من الشكل $1/(n\pi)\ ,\ n \in Z^*$ وهي ملاصقة للصفر،رغم ذلك يمكننا حساب العدد المشتق عند تلك القيمة.

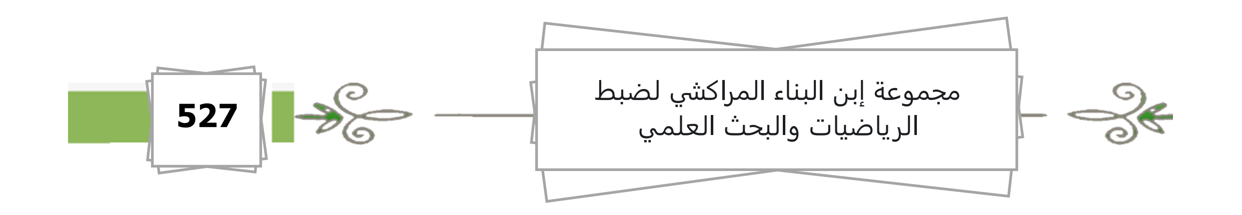
بصفة عامة يمكننا تمديد تعريف التفاضل على فضاء نظيمي بالتقريب من تطبيق خطي عند نقطة دون اللجوء إلى المجالات.

وبصفة أعم من ذلك يعمم التفاضل إلى الاشتقاق بمفهوم التوزيعات والذي يعطي معنى عام للاشتقاق لا يدخل فيه البته مفهوم الترابط ولا التراكم.

الذي يجب أن نفهمه أن التعاريف الرياضية توضع لخدمة مفاهيم وأن التعريف نفسه لا يقيد المفهوم لكنه خادم له، لذلك لا نشترط في التعاريف قيودا لا نحتاجها في خدمة ذلك المفهوم.

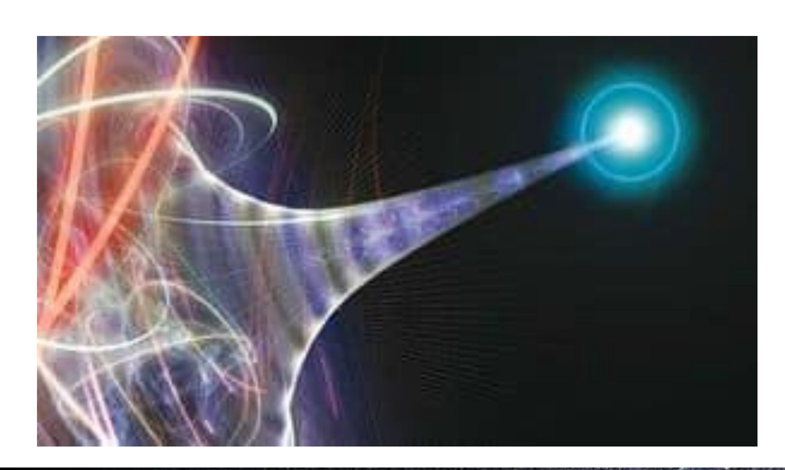
القيود التي نجدها عادة زائدة في التعاريف إنما توضع للتسهيل في إطار نظرية عامة أو دراسة بيداغوجية عامة.

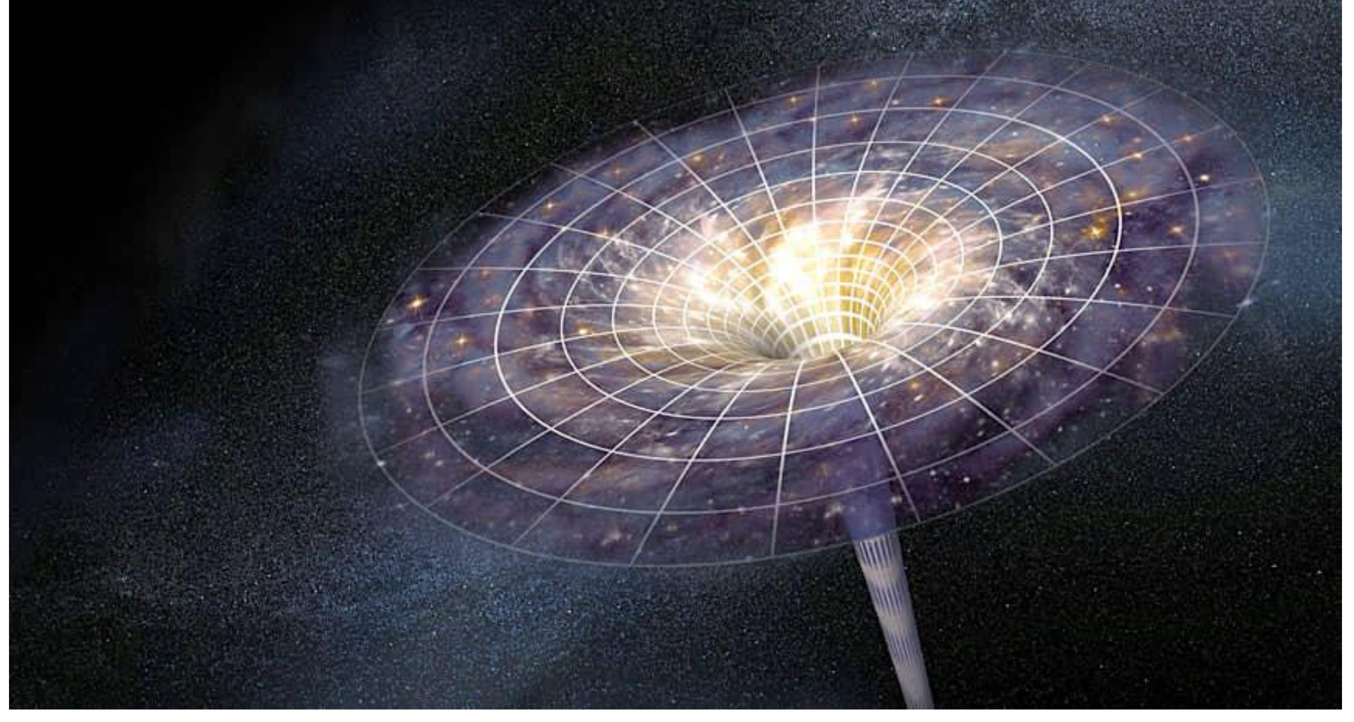
فعندما نتكلم عن الاشتقاق في حقل الأعداد الحقيقية فنحن عادة نستعمله في دراسة دوال مألوفة أوللتطرق لمبرهنات مشهورة كمبرهنة التزايدات المنتهية فهذه نحتاج أن تكون معرفة على مجال.



لكن متى ولجنا لنظرية الدوال فيها ليست ملساء بالشكل الذي نريده على مترابط و لا يمكن عزل نقاط الشذوذ فيها فهنا نحتاج للرجوع للمفهوم الأصلي دون قيوده أو تعميمه لمفهوم أعم كمفهوم التوزيعات الذي يلجأ للقياس لتخطي مشكلة الشذوذ الموجود في هذه الدوال.

الرياضيات علم مفاهيم تضبطها التعاريف.





في الاشتقاق : هل نستعمل نسبة تغير أو نسبة تزايد ؟

تمهيد

في المرفقات الصورة الأولى : تعريف قابلية الاشتقاق من كتاب التحليل لعمران قوبا وفيه يعرف قابلية الاشتقاق بنهاية نسبة تغير الدالة.

لكن هل هي نسبة تغير أو نسبة تزايد كما تسمى في دول أخرى ؟

الفروق بين المصطلحات:

لا أحب عادة الخوض كثيرا في صحة المصطلحات من خطئها لأنها مسألة عرفية تخضع كثيرا للأذواق، وتختلف من دولة لأخرى.

كما أننا في مرحلة تحتاج لتعريب العلوم أكثر منها من الخوض في فروق المصطلحات بين الدول.

ضبط الرياضيات

لكن أحيانا أرى منشورات تدل على جهل أصحابها بمسائل مشهورة في الرياضيات فلزم التنبيه إليها لتصحيح الأخطاء.

مثال ذلك القصاصة الموجودة في الصورة الثانية المليئة بالخلط لكن سنهتم فيها بما يفيدنا هنا وهو استنكار صاحبها لفظ "تغير" وتصويبه بلفظ "تزايد."

أحيانا يخفي المصطلح مفهوما رياضيا يجعله أصح لغة على التعبير على مراده من غيره.

مند أن وضع ويرستراس دواله وبرهن داربو مبرهنته من أكثر من قرن فهم أهل الرياضيات أن التزايد والتناقص على مجال ليس بالقاعدة العامة للدوال.

فدوال ويرستراس مستمرة لكنها غير قابلة للاشتقاق حيثما كان فهي غير رتيبة على أي مجال..

أما مبرهنة داربو فبينت أن هناك دوالا تحقق خاصية مبرهنة القيم المتوسطة رغم أنها غير مستمرة.

حتى تفهم مشكلة التغير والتزايد سنعطي مثالا بالدالة f المعرفة كالتالي:

$$f(x) = 10\, x^3 \sin(10/x)\ ,\ x \in R^*$$
$$f(0)=0$$

هذه الدالة قابلة للاشتقاق عند الصفر ويمكننا حساب مشتقتها

$$f'(x) = 30\, x^2 \sin(10/x) - 100\, x \cos(10/x)\ ,\ x \in R^*$$
$$f'(0) = 0$$

المشتقة عند الصفر تساوي الصفر لأن

$$\lim\ (10\, x^3 \sin(10/x) - 0)/(x - 0) = \lim\ 10\, x^2 \sin(10/x) = 0$$

لكن لو نظرنا لتمثيلها البياني بجوار الصفر لفهمنا أنه لا يمكن تحديد وجهة لها بالتزايد أو التناقص فهي غير رتيبة على أي مجال مفتوح يشمل الصفر.

فنسبة تغير دالة f التي تعرف بحاصل قسمة تغير الدالة أي تغير صورتها على تغير المتغير



أي (f(x) - f(a))/(x - a) لا تعبر دوما على مفهوم رتابة الدالة بقدر ما تعبر على مفهوم تغيراتها ذلك أنه ليس جميع الدوال يمكن جعلها رتيبة على مجالات بتقطيعها.

فمن حيث اللغة لفظ التغير أصح تعبيرا منه من لفظ التزايد.

لكن تبقى المسألة مسألة مصطلحات والتفريق بينها يدخل فيه الذوق فلا ينكر في ذلك على أحد ما دام المصطلح شائع الاستعمال.

كفائدة نشير هنا إلى أن الدوال الرتيبة قابلة للاشتقاق حيثما كان.

كفائدة ثانية : نسبة التزايد ترجمة حرفية للمصطلح الفرنسي

taux d'accroissement

كتاب التحليل للدكتور عمران قوبا.

https://books-library.net/free-1286171629-download

دوال ويرستراس:

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_Weierstrass

الفصل الخامس

التوابع لمتحول حقيقي

الاشتقاق

﴿ في كل ما يلي يمثّل الرمز I مجالاً غير خالٍ وغير مؤلّف من نقطة واحدة في $\mathbb{R}$. ﴾

1. عموميات

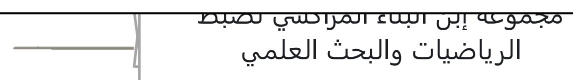
1-1. **تعريف.** ليكن a عنصراً من I، وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. نقول إنّ f قابلٌ للاشتقاق عند a إذا وفقط إذا قَبِلَ تابع نسبة التغيّر

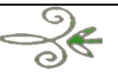
$$\Delta_{f,a} : I\backslash\{a\} \to \mathbb{K},\ x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

نهاية منتهية عند a. نرمز إلى هذه النهاية إن وُجِدتْ بالرمز $f'(a)$ أو $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$. ونسمّي المقدار $\Delta_{f,a}(x)$ نسبة تغيّر التابع f بين a و x.

المعنى الهندسي للعدد المشتق

إذا كان التابع f تابعاً حقيقيّاً، دَلّ المقدار $\Delta_{f,a}(x)$ على مَيْل الوتر $[AM]$ الذي يصل بين النقطتين $A(a,f(a))$ و $M(x,f(x))$. وعليه يكون الشعاع $(1,\Delta_{f,a}(x))$ شعاع توجيه للمستقيم (AM). فإذا كان f قابلاً للاشتقاق عند a دلَّ المستقيم T الذي شعاع توجيهه $(1,f'(a))$ على وضع نهائي للمستقيم (AM) عندما تقترب M من A على الخط البياني C_f للتابع f، فهو إذن المماس في A للخط البياني للتابع f.





السلام عليكم وبعد: إن النص المعني وأمثاله تعتبر أدوات خصبة للتدرب على تمحيص النصوص الرياضياتية من جوانب عدة، بغية اكتساب الخبرة اللازمة لتقنيات ضبطها.

إن القراءة النقدية الموضوعية والدقيقة للنص -مذكور في منشور السؤال- ستمكننا من الوقوف على نقائص جمة وخلطٍ بيِّنٍ خاصة منهجيا، معرفيا، وديداكتيكيا، إليكم أهمها:

أولا. الجانب المنهجي: إن المتأمل الحاذق في العبارة:

"وكما يبدو من التعريف هو تعريف في مجموعة الأعداد الحقيقية" يستنتج الآتي:

1. اعتبار ما قبلها تعريفا، غير أنه قُدِّم بلا عنوان، كما أن نهايته غير محددة.
2. عدم وجود مؤشر واضح لقارئ النص، يسمح له بتأكيد ما بدا لصاحب النص ذكره.
3. كان من اللازم ذكر ما حوته العبارة السابقة في بداية نص التعريف.
4. ربط قوله بما اعتبره تعريفا يعتبر مخالفة صريحة لقواعد التقديم وكتابة النصوص.
5. إن ما ذُكر بعد العبارة يتطلب وجوبا متطلبات مناسبة وعنوانا صريحا خاصا به.
6. منهجيا، ما يُعرَّف اعتمادا على مكتسبات قبلية، يجب ألا يتصدر نص العريف.

ثانيا. الجانب المعرفي: حصل فيه خلط كبير. ويبدأ أولا بقوله: "الاشتقاق هو عدد".

إن الذي يزعم الضبط فعلا، يستوجب عليه في مثل هذا المقام التمييز الدقيق بين كل من الاشتقاق (*dérivation*) والاشتقاقية (*dérivabilité*) والأمر يتطلب تفصيلا وتوضيحا.

بعد ذلك، فإن التأمل العميق في قوله: "ينتج من حساب نهاية قسمة تغير قيمة الدالة على تغير قيمة المتغير" سيفضي بنا بسبب النقل الأعمى للترجمة الحرفية الركيكة من الروابط المعتادة التي لا يجد حرجا في الإشارة إليها إلى استخلاص النتائج الآتية:

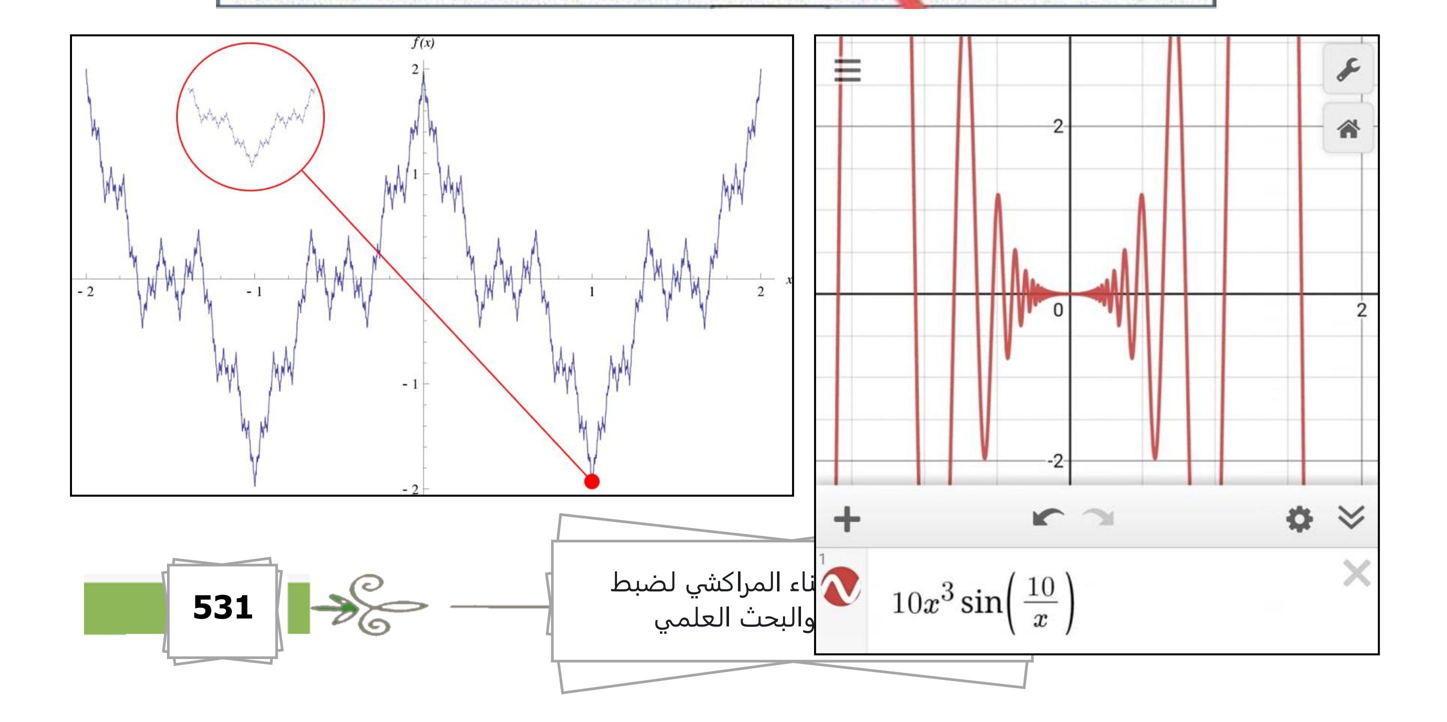
1. عدم التمييز الدقيق بين:

أ. التغير(*variation*) والتزايد (*accroissement*).

ب. القسمة (*division*) والنسبة (*taux*).

2. الدالة (بالتعريف) تعني التخصيص والوحدانية، فأي دالة يقصد بالتحديد يا ترى؟
3. ما معنى قيمة الدالة؟ [الديناميكية؟ دالة، متغير مستقل(سابقة)، متغير مرتبط (صورة)].

... / ...



استمرارية دالة الجذر التربيعي عند الصفر

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته. أما بعد، فقد رأيت أنه كثر الكلام حول استمرارية دالة الجذر التربيعي عند الصفر مع وجود لبس لدى الكثيرين حول هذا الموضوع وذلك راجع لعدم ضبط التعاريف رغم أن التعاريف الطبولوجية واضحة في هذه المسألة وهي أن النهايات و الاستمرار تدرس على مجموعة تعريف الدالة.

لا خلاف بين أهل الرياضيات أن دالة الجذر التربيعي الحقيقية (لأنه هناك العقدية) مستمرة على R^+ بل مستمرة بانتظام وبما في ذلك عند الصفر على عكس دالة الجذر التربيعي العقدية فهي غير مستمرة على C وبما في ذلك R^+ . البرهان في الصورة الأخيرة من المنشور:

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Racine_d'un_nombre_complexe

حتى لا أطيل عليكم أتيتكم بمرجع يوضح هذه المسألة بشكل لا يترك معه لبسا وهو كتاب التحليل لتيرانس تاو Terence Tao

الحاصل على ميدالية فيلتس في الرياضيات وهو غني عن التعريف وهذا رابط لترجمته مع بعض الجوائز التي تحصل عليها في الرياضيات.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Terence_Tao

Distinctions Prix Salem (2000)

Prix Bôcher (2002)

Clay Research Award (2003)

Médaille de la société mathématique australienne (2005)

Prix Ostrowski (2005)

Prix Levi L. Conant (2005)

Prix SASTRA Ramanujan (2006)

Médaille Fields (2006)

Australien de l'année (2007)

Prix MacArthur (2007)

Alan T. Waterman Award (en) (2008)

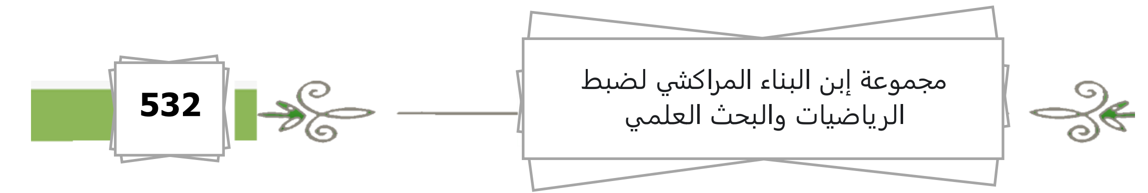
Prix du roi Fayçal (en) (2010)

Prix Nemmers en mathématiques (2010)

Prix Crafoord (2012)

Breakthrough Prize in Mathematics (2015)

Riemann Prize (en) (2019)[2]



فكما نرى في الصورة الثانية من المنشور وهي من الصفحة 127 وضع المؤلف تعريف الاستمرارية كما شرحناه في أكثر من مرة بقصر الطبولوجيا على مجموعة الأثر وذلك واضح من كتابة النهاية في تعريف تاو ذلك أنه قصر x تحت lim على X مجموعة تعريف f ولم يطلقها على مجال بل لم يأت له بذكر.

وكذلك يفعل مع تعريف النهاية عن اليمين وعن اليسار فهو يعمل على تقاطع مجموعة التعريف مع R^+ لقيم أكبر و R^- لقيم أصغر.

فهذا الذي شرحناه في غير موضع أن خصائص الدالة تدرس على مجموعة تعريفها.

فإذا طبقنا التعريف على دالة الجذر التربيعي عند الصفر سيكون تعريف الاستمرار هو مساواة نهاية الدالة لقيمة الدالة على يمين الصفر وهو الصفر فالدالة مستمرة عند الصفر ولا حاجة للنظر على يسار الصفر لأنه خارج مجموعة التعريف.

بل يصرح تاو في مثال له في الصورة الرابعة صفحة 228 بمثال لدالة غير مستمرة عند الصفر لاختلاف النهاية عن اليمين وعن اليسار لكن عند قصرها على نصف المجال [0, +infini[

تصبح مستمرة بما في ذلك الصفر كما كتب ذلك بشكل صريح تيرانس تاو وهذا يوافق ما ذكرته فوق أن دالة الجذر التربيعي الحقيقية مستمرة على R^+ لكن العقدية غير مستمرة على C وبما في ذلك R^+ .

فمجرد تغير مجموعة التعريف يغير الأمور لذلك الاستمرار يدرس على مجموعة التعريف.

وفي الصورة الخامسة نرى كذلك التعريفات المتكافئة التي أضافها تاو للاستمرار والتي فيها يقتصر التعريف الابسيلوني $|x - x_0| < \delta$ على المجموعة X مجموعة تعريف f .

إنما سقت هذا المرجع لمن نسي الطبولوجيا أو جهلها أما الأمر فهو واضح عند المختصين.

والله الموفق لما فيه صواب.

رابط الكتاب

https://lms.umb.sk/…/TerenceTao_Analysis.I.Third…



9.4 Continuous functions

We now introduce one of the most fundamental notions in the theory of functions - that of *continuity*.

Definition 9.4.1 (Continuity). Let X be a subset of $\mathbf{R}$, and let $f : X \to \mathbf{R}$ be a function. Let x_0 be an element of X. We say that f is *continuous at* x_0 iff we have

$$\lim_{x \to x_0; x \in X} f(x) = f(x_0);$$

in other words, the limit of $f(x)$ as x converges to x_0 in X exists and is equal to $f(x_0)$. We say that f is *continuous on* X (or simply *continuous*) iff f is continuous at x_0 for every $x_0 \in X$. We say that f is *discontinuous at* x_0 iff it is not continuous at x_0.

Example 9.4.2. Let c be a real number, and let $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be the constant function $f(x) := c$. Then for every real number $x_0 \in \mathbf{R}$, we have

$$\lim_{x \to x_0; x \in \mathbf{R}} f(x) = \lim_{x \to x_0; x \in \mathbf{R}} c = c = f(x_0),$$

thus f is continuous at every point $x_0 \in \mathbf{R}$, or in other words f is continuous on $\mathbf{R}$.



9.5 Left and right limits

We now introduce the notion of left and right limits, which can be thought of as two seperate "halves" of the complete limit $\lim_{x \to x_0; x \in X} f(x)$.

Definition 9.5.1 (Left and right limits). Let X be a subset of $\mathbf{R}$, $f : X \to \mathbf{R}$ be a function, and let x_0 be a real number. If x_0 is an adherent point of $X \cap (x_0, \infty)$, then we define the *right limit* $f(x_0+)$ of f at x_0 by the formula

$$f(x_0+) := \lim_{x \to x_0; x \in X \cap (x_0, \infty)} f(x),$$



(can you see why?).

Example 9.4.6. Let $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be the function

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

Then f is continuous at every non-zero real number (why?), but is not continuous at 0. However, if we restrict f to the right-hand line $[0, \infty)$, then the resulting function $f|_{[0,\infty)}$ now becomes continuous everywhere in its domain, including 0. Thus restricting the domain of a function can make a discontinuous function continuous again.

There are several ways to phrase the statement that "f is continuous at x_0":

There are several ways to phrase the statement that "f is continuous at x_0":

Proposition 9.4.7 (Equivalent formulations of continuity). *Let X be a subset of $\mathbf{R}$, let $f : X \to \mathbf{R}$ be a function, and let x_0 be an element of X. Then the following four statements are logically equivalent:*

(a) *f is continuous at x_0.*

(b) *For every sequence $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ consisting of elements of X with $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, we have $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$.*

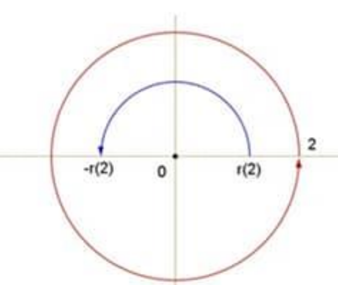
(c) *For every $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ for all $x \in X$ with $|x - x_0| < \delta$.*

(d) *For every $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that $|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$ for all $x \in X$ with $|x - x_0| \le \delta$.*

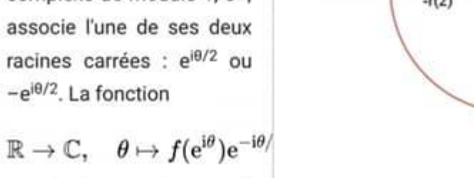
Détermination continue

Si *U* est une partie de ℂ, une détermination continue d'une racine carrée sur *U* est une application continue $f : U \to \mathbb{C}$ telle que $(f(z))^2 = z$.

Il n'existe aucune détermination continue d'une racine carrée sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, ni même sur le cercle unité[8].



Démonstration — Sinon, il existerait une fonction continue *f*, qui à tout complexe de module 1, $e^{i\theta}$, associe l'une de ses deux racines carrées : $e^{i\theta/2}$ ou $-e^{i\theta/2}$. La fonction



$\mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \theta \mapsto f(e^{i\theta})e^{-i\theta/}$

serait alors continue et à valeurs dans {−1, 1} donc (par connexité de ℝ) constante :

$f(e^{i\theta}) = \varepsilon e^{i\theta/2}, \quad \text{où} \quad \varepsilon =$

Mais alors, remplacer θ par θ + 2π pose problème : le terme de droite (non nul) est remplacé par son opposé tandis que le terme de gauche reste inchangé. D'où une contradiction.

L'image ci-contre illustre ce phénomène. Pour un tour complet effectué le long d'un cercle de centre 0, le suivi continu d'une racine carrée ne parcourt qu'un demi-tour.

تابع:استمرار دالة الجذر التربيعي عند الصفر

سألني أخ – بارك الله فيه على حرصه على العلم – مستفسرا عن جواب الأستاذ محمد حازي الذي يؤكد فيه استمرار دالة الجذر التربيعي عند الصفر بتطبيق طبولوجيا الأثر.

فزدت هذا التوضيح وإن كان جواب الأستاذ محمد حازي كاف وشاف لكن من باب الشرح:

أصل الخلل في عدم فهم المسألة هو عدم دراسة نظرية المجموعات فالرياضيات المعاصرة المدروسة في البرامج وفي الجامعات تبني على نظرية المجموعات ZFC أو نظرية الفئات لمن أراد التوسع.

وكقاعدة عامة كل الكائنات الرياضية تدرس على مجموعة تعريفها.

من أساسيات نظرية المجموعات عدم النظر خارج المجموعة لأنها تعد غير موجودة فهذا الذي يحفظها من متناقضة راسل وما وضعت المجموعة إلا لتكون إطارا للدراسة .

فإذا فُهمت هذه النقطة سيفهم أنه في النهاية ننظر لمجموعة التعريف فقط أي ما نسميه طبولوجيا الأثر وعلى هذا تحمل جميع التعاريف الطبولوجية.

وهنا أسوق في الصور تعريف تيرانس تاو للنهاية من كتابه فستجده يقيد النهاية بمجموعة التعريف.

فهنا لا نتكلم عن جوار في غير مجموعة التعريف.

فدالة جدر التربيعي مستمرة عند الصفر ولا يلتفت ليسارها، فإن قيل أين هي النهاية عن يسار الصفر فالجواب هنا الاستمرار يمين الصفر يكافئ الاستمرار إنما ننظر عن اليمين وعن اليسار حسب مجموعة التعريف لأنه في النهاية نراعي كل طرق الاقتراب من القيمة.

وكل الطرق بالنسبة لدالة الجذر التربيعي عند الصفر هي اليمين فقط.

وهذا مثال كذلك من كتاب تيراتس تاو أين يوضح فيه هذه النقطة بمثال جعله مستمرا بتضييق مجموعة التعريف. وفي الصور كذلك تعريف الأستاذ عمران قوبا وهو نفس تعريف تيرانس تاو.

فمسألة استمرار دالة الجذر التربيعي عند الصفر مفروغ منها بل هي مستمرة بانتظام.

والنقاش لم يظهر هنا إلا بسبب مناهج الثانوي التي حاولت عدم إقحام التلميذ في مسألة طبولوجيا الأثر للتبسيط. لكنها تقره عند ذكر مبرهنة القيم المتوسطة فضمنيا هي تذكره لكن دون إثارته مباشرة.

فالذي أنصح به الأساتذة عدم التعنت في هذه المسألة لأنها واضحة ومن أخطأ يعود للصواب.

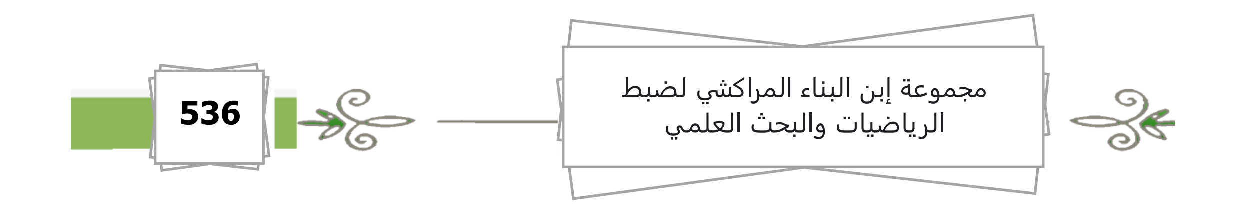
بقيت نقطة هل:

ندرس التلميذ أو لا هذه الحيثية،

أو ما المقصود مما وضع في المنهاج الدراسي ؟ وكيف يُجمع مع مبرهنة القيم المتوسطة ؟

فهذه النقاش فيها سيكون مفيدا لكن مع التقيد بالأصل أنه رياضيا الدالة مستمرة عند الصفر.

والله الموفق للصواب.



9.4 Continuous functions

We now introduce one of the most fundamental notions in the theory of functions - that of *continuity*.

Definition 9.4.1 (Continuity). Let X be a subset of $\mathbf{R}$, and let $f : X \to \mathbf{R}$ be a function. Let x_0 be an element of X. We say that f is *continuous at* x_0 iff we have

$$\lim_{x \to x_0; x \in X} f(x) = f(x_0);$$

in other words, the limit of $f(x)$ as x converges to x_0 in X exists and is equal to $f(x_0)$. We say that f is *continuous on* X (or simply *continuous*) iff f is continuous at x_0 for every $x_0 \in X$. We say that f is *discontinuous at* x_0 iff it is not continuous at x_0.

Example 9.4.2. Let c be a real number, and let $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be the constant function $f(x) := c$. Then for every real number $x_0 \in \mathbf{R}$, we have

$$\lim_{x \to x_0; x \in \mathbf{R}} f(x) = \lim_{x \to x_0; x \in \mathbf{R}} c = c = f(x_0),$$

thus f is continuous at every point $x_0 \in \mathbf{R}$, or in other words f is continuous on $\mathbf{R}$.

(can you see why?).

Example 9.4.6. Let $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be the function

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

Then f is continuous at every non-zero real number (why?), but is not continuous at 0. However, if we restrict f to the right-hand line $[0, \infty)$, then the resulting function $f|_{[0,\infty)}$ now becomes continuous everywhere in its domain, including 0. Thus restricting the domain of a function can make a discontinuous function continuous again.

There are several ways to phrase the statement that "f is continuous at x_0":

3. الاستمرار

1-3. تعريف. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، وليكن a عنصراً من A، وأخيراً ليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$. نقول إنّ f **مستمر** عند a إذا قَبِل التابع f نهاية عند a، وهذا يُكافئ الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \left. \begin{array}{r} x \in A, \\ |x - a| < \eta \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ملاحظة :من الواضح أنّ هذا الشرط يقتضي $\lim_a f = f(a)$. وبالعكس، لنفترض وجود النهاية $\lim_a f = \ell$. ولتكن $\varepsilon > 0$ إذن يوجد $\eta > 0$ يُحقّق

$$(x \in A) \wedge (|x - a| < \eta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ولمّا كان $a \in A$ و $|a - a| = 0 < \eta$ استنتجنا أنّ $|f(a) - \ell| < \varepsilon$. ومن ثَمّ لا بُدّ أن يكون $f(a) = \ell$ لأنّ ε عدد كيفيّ موجب تماماً.

من أخطاء عدم ضبط نظرية المجموعات ZFC .

وقع نظري على ورقة حول استمرار دالة الجذر التربيعي عند الصفر، لجأ فيها الباحث لتعاريف تاريخية دون التنبه للتأسيس الرياضياتي الحديث القائم على مسلمات نظرية المجموعات ZFC .

فذكر فيها تعريفا قديما للاستمرار لويرستراس واستنتج منه أنه على هذا التعريف الدالة غير مستمرة عند الصفر.

وإن كان يشكر الكاتب على هذه المعلومات إلا أنه وجب التعقيب لنقطة مهمة جدا وهي أن أخذ التعاريف القديمة دون النظر إليها في ظل التأسيس الرياضياتي الحديث كفيل بهدم الرياضيات والمبرهنات المعروفة .

لذلك هذه التعاريف لا تصلح ما لم يعاد صياغته حسب نظرية المجموعات ZFC وهي متأخرة على هذه التعاريف إذ بناء هذه النظرية يعود لبداية القرن العشرين.

وعلى هذه المسلمات أعيد بناء الرياضيات ومنها الطبولوجيا.

في نظرية المجموعات تدرس خواص الدالة في مجموعة تعريفها وعلى هذا تسير التعاريف الحديثة فتعريف مثل تعريف ويرستراس المذكور (والعهدة على الكاتب لأن التعريفات التي اطلعت عليها لويرستراس لا تضيف بعد الاستلزام انتماء x لمجموعة التعريف أنظر المرفقات) لا يصلح على بناء ZFC .

ولفهم ذلك يمكننا أخذ الدالة المعرفة على R بـ $\sqrt{|x|}$ فهي مستمرة على R

فإذا قصرناها على R^+ أصبحت $\sqrt{x}$

فلابد أن تبقى مستمرة على R^+ ولو قلنا بالعكس وقعنا في تناقض بنائي إذ جزء من المجموعة لا يحقق خصائص المجموعة الأم والأصل أن الخصائص عند كل عنصر تبقى صحيحة عند أخذ جزء من المجموعة.

$$(\forall x \in M : P(x)) \Rightarrow (\forall x \in A \subset M : P(x))$$

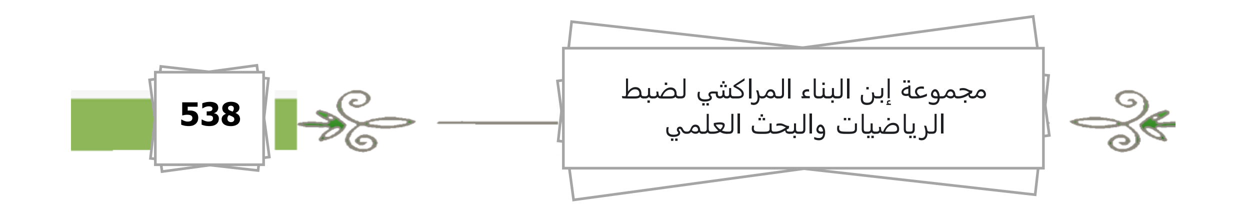
ولهذا كل المبرهنات تصاغ في هذا القالب ومنها مبرهنة القيم المتوسطة والتزايدات المنتهية فنحن نتكلم عن الاستمرار على $[a,b]$ فهذا أمر دقيق لابد من التنبه له لأن التعاريف لا تؤخذ أحادية وإلا لو حمل كل مصطلح على غير المراد به في التعاريف والمبرهنات الأخرى سقط الكثير منها وتناقض.

فالدالة المستمرة على M تبقى مستمرة على $A \subset M$

لهذا التعريف المتفق عليه هو تقييد النهايات بمجموعة التعريف (ينظر تعريف تيرانس تاو وتعريف عمران قوبا في الصور) وعليه تبنى جميع النهايات بل يتوافق مع نهايات المتتاليات.

فالنظرة التاريخية غير كافية مالم تبنى الرياضيات على أسس سليمة.

وهنا أنبه إلى أن الرياضيات تدرس على أصولها وعلى ما استقرت عليه حديثا لا بمجرد البحث في التعاريف القديمة..



المرفقات :

الصورة الأولى : الورقة المذكورة

الصورة الثانية : تعريف الاستمرار من كتاب التحليل لتيرانس تاو

الصورة الثالثة : تعريف الاستمرار من كتاب عمران قوبا

الصورة الرابعة : تعريف ويرستراس للاستمرار من

http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/.../aspects...

Concernant la question de la continuité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0

D'abord, il est important de dire que répondre à cette question ne nécessite pas les notions universitaires. Les notions du lycée devraient suffire.
Cette question n'est pas vraiment nouvelle. Précisons néanmoins qu'elle est mal posée. En effet, la bonne question n'est pas

Q1 : *est-ce que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 ?*

car cette question n'a de sens que si on donne une définition à la continuité en 0. La bonne question devrait être

Q2 : *quelle est la définition adoptée de la continuité d'une fonction en un point ?*

Ainsi,
- Si on ne répond pas à la question Q2, la question Q1 n'aura aucun sens.
- Répondre à la question Q2 induit facilement une réponse à la question Q1.

Autrement dit, il suffit de se concentrer sur la question Q2. Plusieurs définitions de la continuité en un point ont existé : la plus populaire est celle de M. C. Jordan (1893), suivie de la définition de K. Weierstrass (186[illegible]) (deux fois moins populaire que celle de Jordan). Par popularité, on sous-entend son utilisation dans les livres depuis une soixantaine d'années. Notons qu'il existe d'autres définitions anciennes ou même récentes. On peut citer les définitions de Bolzano, Cauchy, Goursat, Hardy, Courant, etc.

- Si on adopte la définition la plus populaire, c'est-à-dire celle de Jordan, **la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0**. En effet, selon cette définition, une fonction f de domaine de définition $D \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est continue en un point $x_0 \in D$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \boxed{\forall x \in D}, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

- Si on adopte la définition de Weierstrass, moins populaire, mais assez utilisée, alors **la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas continue en 0**. En effet, la définition de Weierstrass est la suivante : une fonction f de domaine de définition $D \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est continue en un point $x_0 \in D$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow (\boxed{x \in D} \text{ et } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

Commentaires supplémentaires :
- La notion de fonction est elle même à préciser. En effet, par fonction on peut sous-entendre une relation entre deux ensembles A et B pour laquelle chaque $x \in A$ est en relation avec un et un seul élément de B (qu'on note $f(x)$). On peut aussi considérer qu'une fonction est une relation entre deux ensembles A et B pour laquelle chaque $x \in A$ est en relation avec au plus un élément de B (qu'on note $f(x)$ quand il existe). Cette dernière définition, moins populaire, est appelé plutôt *fonction partielle* en logique mathématique (partial function)
- On peut [illegible] évidemment remplacer $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ par $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon$ dans les définitions ci-dessus.
- On peut répondre à la question Q2 (et donc à Q1) de manière plus abstraite (topologie de l'université). Par exemple, en disant qu'une fonction est continue sur son domaine $D \subset \mathbb{R}$ (ici $[0, +\infty[$) si l'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ (pour la topologie usuelle) est un ouvert pour la topologie induite usuelle sur D. Ainsi, $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Mais de mon point de vue, on complique inutilement le langage.

9.4 Continuous functions

We now introduce one of the most fundamental notions in the theory of functions - that of *continuity*.

Definition 9.4.1 (Continuity). Let X be a subset of $\mathbf{R}$, and let $f : X \to \mathbf{R}$ be a function. Let x_0 be an element of X. We say that f is *continuous at* x_0 iff we have

$$\lim_{x \to x_0; x \in X} f(x) = f(x_0);$$

in other words, the limit of $f(x)$ as x converges to x_0 in X exists and is equal to $f(x_0)$. We say that f is *continuous on* X (or simply *continuous*) iff f is continuous at x_0 for every $x_0 \in X$. We say that f is *discontinuous at* x_0 iff it is not continuous at x_0.

Example 9.4.2. Let c be a real number, and let $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be the constant function $f(x) := c$. Then for every real number $x_0 \in \mathbf{R}$, we have

$$\lim_{x \to x_0; x \in \mathbf{R}} f(x) = \lim_{x \to x_0; x \in \mathbf{R}} c = c = f(x_0),$$

thus f is continuous at every point $x_0 \in \mathbf{R}$, or in other words f is continuous on $\mathbf{R}$.

3. الاستمرار

1-3. **تعريف**. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، وليكن a عنصراً من A، وأخيراً ليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$. نقول إنّ f **مستمر** عند a إذا قَبِل التابع f نهاية عند a، وهذا يُكافئ الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \left.\begin{matrix} x \in A, \\ |x - a| < \eta \end{matrix}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ملاحظة : من الواضح أنّ هذا الشرط يقتضي $\lim_a f = f(a)$. وبالعكس، لنفترض وجود النهاية $\lim_a f = \ell$. ولتكن $\varepsilon > 0$ إذن يوجد $\eta > 0$ يُحقّق

$$(x \in A) \wedge (|x - a| < \eta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ولمّا كان $a \in A$ و $|a - a| = 0 < \eta$ استنتجنا أنّ $|f(a) - \ell| < \varepsilon$. ومن ثَمّ لا بُدّ أن يكون $f(a) = \ell$ لأنّ ε عدد كيفيّ موجب تماماً.

Weierstrass utilise à la fois notre vocabulaire actuel et le langage des infiniment petits pour définir la continuité (uniforme) : « *S'il est possible de définir une borne* ∂ *telle que pour toute valeur de h, plus petite en valeur absolue que* ∂ , *$f(x+h) - f(x)$ soit plus petite qu'une quantité* ε *aussi petite que l'on veut, on dira qu'on fait correspondre à une variation infiniment petite de la variable une variation infiniment petite de la fonction* ».

8

الطبولوجيا والهندسة التفاضلية

يا أستاذ حدثني عن الطبولوجيا

الأستاذ : ما هو علم الطوبولوجيا في اللغة ؟

التلميذ : الطبولوجيا علم يهتم بتضاريس الأرض فما علاقتها بالرياضيات ؟ ألا يجدر بها أن تكون علم جغرافيا ؟

الأستاذ : نفس الشيء في الرياضيات هي علم يهتم بتضاريس المجموعات

كيف تقاس تضاريس الارض ؟

التلميذ : تقاس بآلات

الأستاذ : مما تصنع الآلات

التلميذ : من المعادن

الأستاذ : ومن أين تجلب المعادن ؟

التلميذ : من الأرض من المناجم

الأستاذ : إذن تدرس تضاريس الأرض بأجزاء منها

التلميذ : صحيح

الأستاذ : نفس الشيء الطبولوجيا في الرياضيات تدرس مجموعة بمجموعات جزئية منها

التلميذ : ماشاء الله لم اتوقع أن تعريفها بسيط هكذا ههه

الأستاذ : إذا أردت اختيار مجموعات جزئية لدراسة مجموعتك الكلية ما هي الشروط التي يجب تحقيقها ؟

وما الفائدة من دراسة المجموعة الأم بأجزائها ؟

التلميذ: الشروط أن تكون هذه المجموعة الجزئية محتوى في المجموعة الام

الأستاذ : قلنا من البداية انها جزء منها، كيف ستقارن مجموعة بمجموعات جزئية منها ؟ستقارن بالتقاطع ليس عندك خيار آخر

التلميذ : صحيح

الأستاذ : لكن لكي ندرس جميع المجموعة لابد ان تكون المجموعات الجزئية تغطيها بأكملها

أو بمعنى آخر المجموعة الأم من ضمنها

إذن يمكن أن نفرض شروطا لكي نستطيع دراسة المجموعة عند كل نقطة :

أن تكون المجموعة الكلية والخالية من ضمن هذه المجموعات الجزئية

أن يكون تقاطعها ايضا مجموعة منها

ان يكون اتحادها مجموعة منها لكن سنفرض أن الاتحاد قد يكون غير منته لأن المجموعة قد تكون غير منتهية



التلميذ : لماذا نذكر دائما انتماء المجموعة الخالية للمجموعة

إن كانت تحوي عناصر ،فما فائدة المجموعة الخالية ؟

الأستاذ : لأنه عند التقاطع قد تجد مجموعة خالية

التلميذ : صح يالك من مبسط ماشاء الله

الأستاذ : مجموعات جزئية بهذه الشروط نسميها طبولوجيا فهي تعرف فضاء طبولوجي

التلميذ : لو ألغينا في التعريف التقاطع ووضعنا الإتحاد فقط ،هل نجد احتواء المجموعة الخالية كشرط ؟

الأستاذ: إذا ألغيت التقاطع يحدث لك مشكل، النقاط التي تنتمي لمجموعتين بأيهما ستدرسها ؟ بالأولى أم بالثانية ؟

هل تدري ماذا نسمي هذه المجموعات الجزئية ؟ نسميها مفتوحات هل يذكرك ذلك بشيء ؟

التلميذ : المجالات الحقيقية 😊 في R

الأستاذ : نعم ، في ماذا تستعمل المجالات ؟

في الحصر

الأستاذ : في النهايات

التلميذ : كيف ؟

الأستاذ : عندما نقول ان متتالية تقترب من نهاية نقول ان الفارق معها اقل من ابسيلون

في الحقيقة مجال :

] l - epsilon , l + epsilon [

التلميذ : صحيح

الأستاذ : بلغة اخرى ابتداءا من قيمة ل n نجد جميع حدود المتتالية في هذا المجال مهما كان المجال الذي نختاره

هذا واضح ؟

التلميذ : نعم

بارك الله فيك

والله استفدت كثيرا

الأستاذ : اذن مادام نتكلم عن مجموعات يمكننا استعمال نفس التعريف للطبولوجيا

فنقول ان المتتالية تنتهي لنقطة اذا كان مهما كان المفتوح الذي يشمل هذه النقطة فالمتتالية تبقى بداخله ابتداءا من رتبة هكذا نعمم مفهوم النهاية لجميع المجموعات

اذن الطبولوجيا تحاول تعميم المفاهيم المعروفة في الاعداد الحقيقية من نهايات واستمرار إلى جميع المجموعات



التلميذ : حتى لو كانت المجموعة اشخاص او اقسام ..!؟

الأستاذ : ايه يكفي ان تعرف عليها طبولوجيا 😉

متى نقول عن تلميذ انه يقترب من قسم ؟

ألا تقسم المدرسة لمربعات كل مربع يشمل قسم ؟

اذا كان متوجها نحو القسم

تقول انه يقترب اذا كان مهما اخترت من مربع يشمل القسم فسيكون بداخله ابتداء من لحظة معينة

التلميذ : فهمت

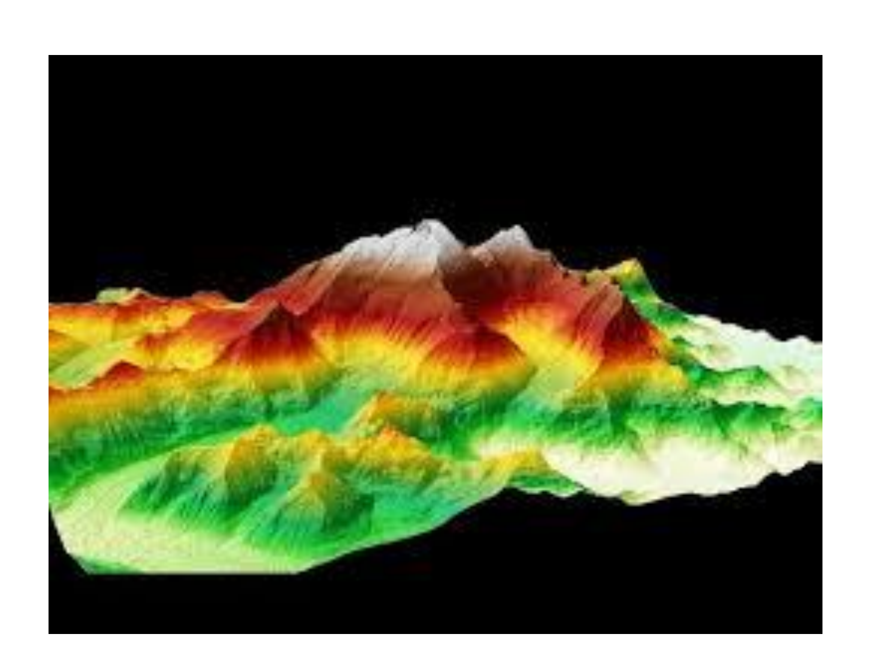
الأستاذ : ها قد عرفت مفهوم النهاية

ومفهوم الجوار

فيصبر جوار النقطة كل مجموعة تشمل مفتوحا يحتوي على هذه النقطة 😊

التلميذ : اعتقد اني فهمت اغلب اشكالات ، 😊 ساعود لاراجع مافهمته من جديد من زاوية مبسطة

وساعاود اتصال بك في حالة وقوعي في غموض او التباس اخر 😊



مفهوم الإقتراب بين الحدس البشري والتكميم الرياضي

مفهوم الإقتراب الحدسي لا معنى له إلا بالمقارنة فلغة نقول مكان أقرب من مكان بالنسبة إلينا أو إلى مكان آخر فالمقارنة تحتاج ثلاث كائنات:

المكان الذي نريد الإقتراب منه و تغيرين أي مكانين ليكون احدهما اقرب من الآخر بالنسبة لمكاننا الاول.

طبولوجيا الإقتراب يكون نحو نقطة نسميها نهاية ثم للمقارنة نستعمل علاقة ترتيب إما بالمسافة فنقول هذه النقطة أقرب من أخرى عن طريق مقارنة مسافتيهما بالنسبة للنهاية.

والطريقة الثانية بترتيب الإحتواء أو ما نسميه الجوار.

فإذا نظرنا إلى طريقة المسافة وهي التي تهمنا هنا فحتى نقول أن نقاط تقترب من نهاية فلابد من تحديد مسافة تتخطاها هذه النقاط وإلا فلا معنى للإقتراب.

إذن عندما نقول حدسيا كلما إقتربت x نحو x_0 فإن $f(x)$ تقترب نحو نهاية l فلابد أن نحدد رياضيا المسافة التي من أجلها يمكننا ان نقول اننا اقتربنا من l ولنسمها ابسيلون.

فتصبح اذا اقتربنا جيدا من x_0 فإن$f(x)$ ستتخطى إبسيلون لتكون اصغر ببعدها عن l منه.

ثم إذا صغرنا إبسيلون فكذلك اذا اقتربنا اكثر من x_0 فستتخطى $f(x)$ بمسافتها عن l الابسيلون لتكون اصغر منه.

وهكذا.

فهذا نكتبه رياضيا كلما اخترنا إبسيلون الذي من أجله يمكننا أن نقول $f(x)$ قريبة منl فإنه يمكننا ان نقترب من x_0 بحيث تقترب $f(x)$ من l بهذا الابسيلون.

ومن هنا نفهم أن الحدس والتعريف الرياضي يقولان شيئا واحدا إلا أن التعريف الرياضي يستعمل أداة قياس ليعرف هل إقتربنا أو لا فلا معنى للإقتراب إن لم نحدد مسافته فحدسيا لا نقول أنك تقترب من مكان إلا إذا كنت كلما حددت مسافة تبعد عنه فسيأتي زمن تكون فيه قد تخطيتها نحوه.

فاقترابك من لحظة الوصول معرف بوصولك أي متعلق بنهايتك l وزمنك الذي تعرف من أجله هل إقتربت أو لا متعلق بالمسافة التي حددتها لتقول هل أنا قريب أولا وهذا الذي يضبطه التعريف الرياضي ويكممه عن طريق الإبسلون.

أما تعريف النهايات بالجوار فهو قائم على نفس المبدأ إلا انه يعوض المسافات بمجموعات ويقارن بينها بالإحتواء.



النهاية : نظرة طبولوجية

الإقتراب من قيمة في الحقيقة هو مجرد توزيع للنقاط حول هذه القيمة فمتى نقول أن متتالية تقترب فعلا من قيمة ؟

لو تصورنا أن أمامنا هذه القيمة التي نسميها نهاية ونحاول مشاهدة المتتالية كيف هي موزعة حولها فسنلاحظ ان جل قيم المتتالية أمامنا نراها بجانب النهاية أما ما وراءنا فلا نكاد نرى إلا عدد منته من عناصر المتتالية وكل ما حاولنا أن نقترب من هذه النهاية فنجد كل حدود المتتالية أمامنا ووراءنا عدد منته منها وكأن المتتالية متمركزة حول النهاية بشكل يجعلها ملتصقة بها ولا تلتصق بغيرها وكل ما تقدمنا فهي أشد إلتصاقا.

لو حاولنا أن نترجم هذا بالمجموعات فكلما أحطنا النهاية بمجموعة مفتوحة سنجد أن كل حدود المتتالية داخل هذه المجموعة وما خارجها ما هو إلا عدد منته من الحدود أي اننا لا يمكننا عزل هذه النهاية عن المتتالية دائما بجوارها عدد غير منته من الحدود وفي جوارها فقط لا بجوار غيرها.

فالنهاية ما هي إلا النقطة الوحيدة الملاصقة لحدود المتتالية.

أما إذا نظرنا إلى الدالة فحالها مختلف عن المتتالية قليلا لانها تتعلق بمتغير لكن يمكن وضع نفس التفسير فلو حاولنا عزل قيم الدالة التي هي بجوار هذه النهاية فسنجد أن قيم سوابقها هي متلاصقة كذلك بنقطة وكأننا نقول أن السوابق إذا أخذناها بجوار قيمة للمتغير فلا تخرج صورها من جوار لنهاية الدالة وهذا ما نعبر عليه بـ:

مهما حاولنا عزل قيم الدالة القريبة من نهاية بجوار أي إبسيلون فسنجد أنه لا توجد سابقة قريبة من قيمة لمتغير صورته تخرج عن هذا الجوار أي ديلطا وهو التعريف المألوف للنهاية.





التطور التاريخي لتعريف النهاية.

لنتأمل تعريفين من تعريف النهايات من عالمين كبيرين وهما كوشي وويستراس.

عرف كوشي Louis–Augustin Cauchy (1789–1857)

النهاية كما يلي:

عندما تقوم القيم المتتابعة المعطاة لنفس المتغير بالاقتراب غير المحدد نحو قيمة معينة بطريقة يمكننا معها الحصول على فرق صغير كما نريد، فإن هذه القيمة تسمى نهاية للقيم السابقة.

أما ويرستراس Karl Weierstrass (1815–1897)

فعرفها كما يلي:

نقول عن متتالية أعداد حقيقية (U_n) أنها تقبل كنهاية العدد A ، إذا كان من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما ε ، صغير كما نريد، يمكننا أن نجد عددا طبيعيا N بحيث من أجل كل رتبة أكبر من N كل حدود المتتالية N تبتعد عن A بمسافة أقل من أو تساوي ε .

فما رأيكم في التعريفين ؟

تحليل التعريفين:

تعريف كوشي

"عندما تقوم القيم المتتابعة المعطاة لنفس المتغير : "

نلاحظ أن مفهوم المتتاليات والدوال غائب من التعريف هنا لكنه عوض بلفظ التتالي وكأنه يرى المتغير الذي يغير قيمه.

وهذا لا يتوافق مع نظرية المجموعات الحديثة والتي تجل القيم نقاط من مجموعة وترى النهاية متعلقة بالمجموعة لا بقيمة لعينها.

"بالاقتراب غير المحدد نحو قيمة معينة بطريقة يمكننا معها الحصول على فرق صغير كما نريد، ":

لفظ الاقتراب غير المحدد فهو حدسي فلا ندري ما معنى هذا الاقتراب بعكس النظريات الحديثة التي تضبط هذا الاقتراب بوجود n_0 إنطلاقا منه يكون الفرق بين حدود المتتالية والنهاية أقل من ابسيلون.

فتعريف كوش مازال حدسي وإن كان يقترب من تعريفنا المعاصر.

أما تعريف ويرستراس

"نقول عن متتالية أعداد حقيقية (U_n) "

نرى ظهور فعلي للمتتاليات

"أنها تقبل كنهاية العدد **A** ، إذا كان من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما ε ، صغير كما نريد،" أي

$\forall \varepsilon > 0$

"يمكننا أن نجد عددا طبيعيا N "



$\exists$ N

"بحيث من أجل كل رتبة أكبر من N ":

$n > N$

"كل حدود المتتالية U_n تبتعد عن A بمسافة أقل من أو تساوي ε ".

$\Rightarrow |U_n - A| < \varepsilon$

إذن نجد التعريف المعاصر للنهاية وهو قابل للكتابة بالترامز المنطقية دون إدخال مقارنات بشرية.[1]



1 للفائدة: تاريخ النهايات
http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/.../evolution_notion...

النهاية والمالانهاية.

علاقة النهاية بالمالانهاية مباشرة فعندما نعرف النهاية بمتتالية نكتب نهاية المتتالية لما n يؤول للمالانهاية.

ولماذا بالضبط المالانهاية ؟ لأنه لا نلجأ للنهاية إلا بسبب عدم القدرة على الحساب وعدم القدرة على الحساب نتيجة لوجود حساب غير منتهي.

فالنهاية محاولة البشر للإحاطة بالمالانهاية القابلة للعد فمتى كانت المجموعات غير قابلة للعد لجأنا إما لعدد غير قابل للعد من المتتاليات القابلة للعد أو للتكامل وهو إختيار لممثلين قابلين للعد يمثل كل منها مجموعة غير قابلة للعد.

فكل هذه الحسابات تدور حول المالانهاية ولهذا نكتب في تعريف النهايات $n > n_0$

ولذلك في الطبولوجيا نشترط من أجل كل جوار وجود جميع عناصر المتتالية ماعدا عدد منته منها فهنا محاولة إحاطة بعدد غير منته من الحدود بمجموعة سميناها جوار.



الفرق بين النهاية والمساواة لدالة:

المساواة بقيمة هي قضية وجود عناصر فهي مجموعة جزئية فعندما نقول $f(x)=a$

فنحن نعني مجموعة السوابق التي صورتها a وهذه المجموعة متعلقة بعلاقة الصور بالسوابق فقط.

أما النهاية فهي خاصية تحتاج لتوزيع مجموعة من النقط حول نقطة فعندما نقول أن الدالة تؤول إلى قيمة عندما يؤول المتغير إلى قيمة او إلى المالانهاية فإنما نعنى توزع الصور بشكل لا نهائي حول القيمة.

إذن المساواة هي تعبير عن مجموعة جزئية اما النهاية فهي تعبير عن سلوك للدالة بجوار نقطة.

الآن عندما تكون صور الدالة بجوار نقطة موزعة بجوار صورة هذه النقطة بشكل لا نهائي فهذا نسميه الاستمرار.



المتتاليات، النهايات، المتتالية الكوشية كيف ولماذا ؟

المتتاليات هي أول مدخل للبشر لمسألة المالانهاية العددية فنحن نواجها مع أول مجموعة عددية، مجموعة الأعداد الطبيعية N .

فهي نفسها يمكن وضعها في متتالية:

$U_0 = 0$
$U_1 = 1$
...
$U_n = n$
...

فترتيب مجموعة قابلة للعد برتب من N يظهر بشكل طبيعي:

$U_n = 1/n$
$V_n = n+1/n$

المتتالية دالة من جزء من N نحو مجموعة وصول فإن كانت مجموعة الوصول عددية ك R سميناها متتالية عددية.

عندما بدأ البشر يدرس الأعداد فصنع المتتاليات ظهر مفهوم الاقتراب بشكل تلقائي إذ نحن نرى بالحسابات أن

$U_1 = 1/10 = 0.1$
$U_2 = 1/100 = 0.01$
...
$U_n = 1/10^n = 0.00 \ldots 01$

تقترب من الصفر.

وهذا نراه عند الحسابات بالتقريبات العشرية لبعض المتتاليات ذلك أننا نرى الكتابة العشرية تستقر رقما بعد رقم بعد الفاصلة.

لكن الرياضيات لا تقبل المفاهيم الحدسية بل تطلب التجريد لذلك هي تطلب تعريفا مجردا لمفهوم النهاية فما معنى اقتراب ؟

في الواقع نقيس الاقتراب بواسطة المسافة ولذلك يمكننا نقل مفهوم الاقتراب للمتتاليات العددية ببساطة عن طريق مفهوم المسافة المتمثلة في القيمة المطلقة فيمكننا أن نقول أن المتتالية U_n تقترب من عدد حقيقي L إذا كانت المسافة بينه وبينها صغيرة ابتداء من رتبة.

لكن لفظ الصغر غير مضبوط إذ لابد من مقياس له ولذلك للتعبير عن الصغر نستعمل كمقياس عدد موجب تماما نرمز له بالحرف اللاتيني إبسيلون ξ فنكتب

$$\lim U_n = L \Leftrightarrow$$
$$\forall \xi > 0 , \exists\ n(\xi) \in N , \forall\ n \in N : n > n(\xi) \Rightarrow |U_n - L| < \xi$$



أي مهما اخترنا من مسافة ξ فسنجد حدود المتتالية U_n بجوار L ابتداء من رتبة معينة.

البعض يرمز ل $n(\xi)$ بـ n_0 وبعضهم بـ m لكن أفضل $n(\xi)$

حتى يدرك المتتبع أن هذا العدد له علاقة بـ ξ إذ هو يتغير بتغيره.

الذي نفهمه من تعريف النهاية أن حدود U_n محيطة بـ L بل متلاصقة به فكلما اقترنا من L بمسافة ξ نجد

وراءنا عددا منتها من الحدود كلها حدود رتبها تحقق: $n \leq n(\xi)$

وأمامنا بقية الحدود حول L أي كل الحدود ذات الرتب: $n > n(\xi)$

فأنتقلنا هنا من مفهوم حدسي للاقتراب إلى مفهوم مجرد بالتعريف خالي من ذوق البشر يمكننا من دراسة نهايات المتتاليات إن وجدت.

لكن المشكل الذي يطرح لكي نطبق هذا التعريف نحتاج معرفة النهاية ولكن كيف نعرفها ؟

معرفة النهاية ليس بالشيء المتوفر دائما فإن كان من الواضح أن $\text{Lim } 1/n = 0$

فالنهاية التالية ليست واضحة $\text{Lim } \sum 1/n^3$

فعادة نمتلك المتتالية لكن لا نمتلك نهايتها لذلك نحتاج لطرق أخرى لبرهنة وجود النهاية.

لو رجعنا لطريقتنا الحدسية في حساب النهايات فسنجد أننا نقوم بحساب حدود U_n

من أجل قيم n كبيرة ثم ننظر للكتابة العشرية هل هي تستقر رويدا رويدا أو لا.

في الحقيقة نحن نقوم بالنظر ل $U_m - U_n$

بقيم n و m كبيرة فمتى رأينا الفرق صغيرا جدا شككنا في تقارب U_n لعدد بداية كتابته العشرية هي الأرقام العشرية المستقرة التي وجدناها من حساب U_m إلى U_n

وهذا يمكننا تفسيره من التعريف الابسيلوني للنهاية فلدينا

$$\forall \xi > 0 \,,\ \exists\ n(\xi) \in \mathbb{N} \,,\ \forall\ n \in \mathbb{N} : n > n(\xi) \Rightarrow |U_n - L| < \xi$$

فلو أخذنا n و m سنجد

$$\forall \xi > 0 \,, \exists n(\xi) \in \mathbb{N}, \forall n,m \in \mathbb{N} : (n > n(\xi) \wedge m > n(\xi)) \Rightarrow (|U_n - L| < \xi \wedge |U_m - L| < \xi)$$

لكننا نعلم أن

$$|U_n - U_m| \leq |U_n - L| + |U_m - L| < \xi + \xi$$

فنستنتج أن

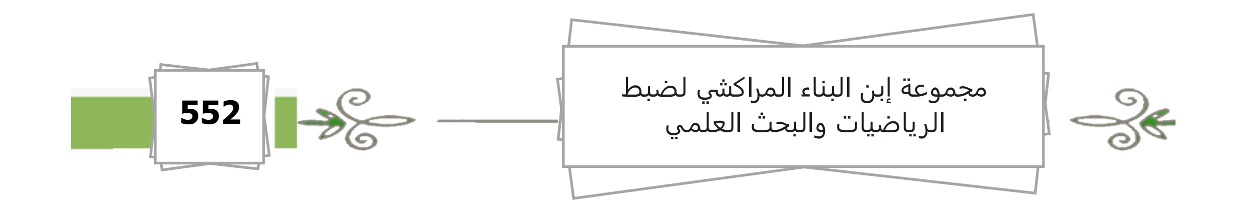
$$\forall \xi > 0 \,, \exists\ n(\xi) \in \mathbb{N} \,,\ \forall\ n,m \in \mathbb{N} : (n > n(\xi) \wedge m > n(\xi)) \Rightarrow |U_n - U_m| < 2\xi$$

القيمة ξ أو 2ξ شيء واحد ذلك أنها للمقارنة فيمكننا وضع $\xi' = 2\xi$

لنكتب ما وصلنا إليه كالتالي

$$\forall \xi' > 0 \,, \exists n(\xi') \in \mathbb{N} \,, \forall n,m \in \mathbb{N} : (n > n(\xi') \wedge m > n(\xi')) \Rightarrow |U_n - U_m| < \xi'$$

لأنه في الترميزات لا نحتاج أن نكتب $\forall \xi'/2 > 0$



لأنها نفسها $\forall \xi' > 0$ وكذلك لا نحتاج أن نكتب $\exists\ n(\xi'/2)$ لأنه يبقى عدد طبيعي متعلق بـ ξ'

بل لا نحتاج أن نترك ξ' هكذا لأنه مجرد ترميز فيمكننا أن نكتب

$$\forall \xi > 0 ,\ \exists\ n(\xi) \in N ,\ \forall\ n,m \in N : (n > n(\xi) \wedge m > n(\xi)) \Rightarrow |U_n - U_m| < \xi$$

فنجد كل متتالية متقاربة تحقق هذا الشرط والذي يسمى بشرط كوشي للمتتاليات الكوشية.

كما نلاحظ هذا الشرط مفيد جدا لأنه لا يحتاج لمعرفة النهاية للتحقق منه.

ويمكننا أن نلخصه بترميز النهايات:

$$\text{Lim}\ U_n = L \Rightarrow \text{Lim}\ (U_n - U_m) = 0 \mid n,m \rightarrow +\infty$$

نحن انطلقنا من وجود النهاية للوصول لهذا الشرط أي

$$\text{Lim}\ U_n = L \Rightarrow$$

$$[\forall \xi > 0 ,\ \exists n(\xi) \in N ,\forall n,m \in N : (n > n(\xi) \wedge m > n(\xi)) \Rightarrow |Un - Um| < \xi]$$

فهو استلزام لكن ماذا عن الاستلزام العكسي هل كل متتالية كوشية متقاربة ؟

سنعود لهذا السؤال لاحقا، لكن الآن سنقدم مثالا على استعمال المتتالية الكوشية.

بما أن كل متتالية متقاربة في R هي كوشية فكل متتالية ليست كوشية فهي ليست متقاربة.

يمكننا استعمال هذا في المثال التالي:

$$U_n = \sum 1/k ,\ 1 \leq k \leq n$$

فلو أخذنا n و $m=2n$ سنجد

$$U_{2n} - U_n = (1/1 + 1/2 + ...+1/n + 1/(n+1) + ... + 1/2n) - (1/1 + 1/2 + ...+1/n)$$

$$= (1/(n+1) + ... + 1/2n) \geq (1/2n + 1/2n + ... + 1/2n) = n/2n$$

$$= 1/2$$

أي شرط كوشي ليس محققا فيكفي أخذ $\xi < 1/2$ لنجد استحالة تحقق

$$1/2 \leq |U_n - U_m| < \xi < 1/2$$

فنستنتج أن المتتالية $U_n = \sum 1/n$ غير متقاربة أي هي متباعدة وكونها متباعدة ومتزايدة يمكننا من كتابة $\text{Lim}\ U_n = +\infty$ وهذا تباعد لأنها لا تقترب لعدد في R .

نعود لسؤالنا السابق هل كل متتالية كوشية هي متتالية متقاربة ؟

الجواب حسب الفضاء الطبولوجي وهو متري في حالتنا لأننا نستعمل مفهوم المسافة فمثلا لو أخذنا المتتالية الناطقة $U_n = (1+1/n)^n$ فنحن نعلم أن $\text{Lim}\ U_n = e$

فهي متقاربة في R إذن هي كوشية.

لكن e ليس من مجموعة الأعداد الناطقة Q فالمتتالية U_n كوشية لكن غير متقاربة في Q .

سبب ذلك أن Q فضاء غير تام والفضاء المتري التام هو الذي تكون فيه كل متتالية كوشية هي متتالية متقاربة.



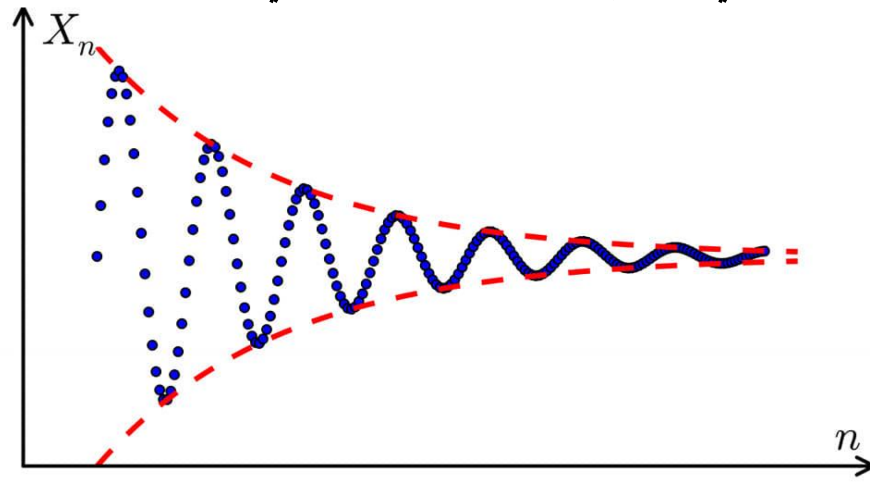
مجموعة الأعداد الحقيقية R المزودة بمسافة القيمة المطلقة هي فضاء تام لأن كل متتالية كوشية فيه هي متقاربة.

يمكننا برهنة ذلك انطلاقا من خاصية الحد الأعلى.

بل R نفسها لها صناعات مختلفة أحدها أنها اصناف المتتاليات الكوشية الناطقة أي أن R تعتبر غلقا طبولوجيا لمجموعة الأعداد الناطقة.

مجموعة الأعداد العقدية كذلك فضاء تام وعموما كل الفضاءات من نوع R^n

المزودة بالمسافة الاعتيادية هي تامة أي كل متتالية كوشية فيها هي متقاربة.



Une suite (r_n) de réels ou de complexes est dite **de Cauchy**, ou vérifie le **critère de Cauchy**, lorsque les termes de la suite se rapprochent uniformément les uns des autres en l'infini au sens où :

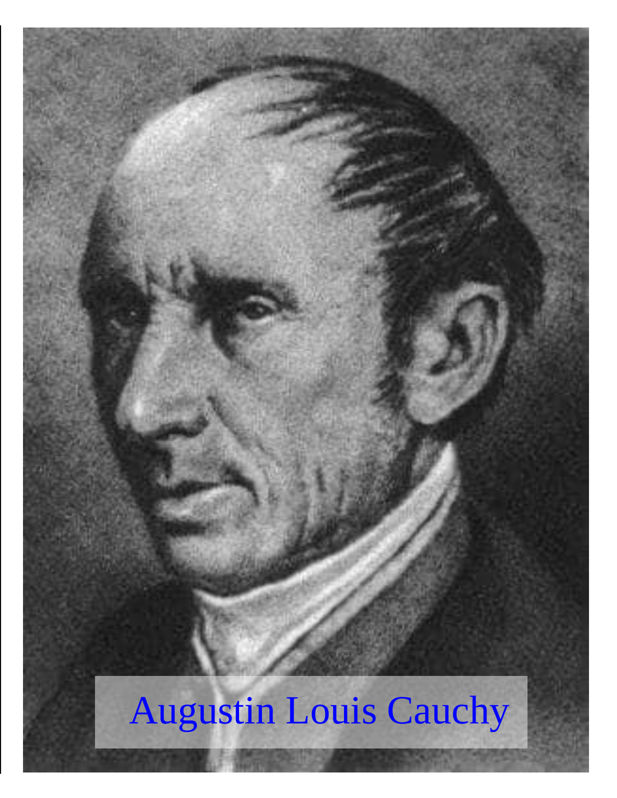
$$\lim_{p,q\to\infty} |r_p - r_q| = 0.$$

Cette dernière condition se réécrit classiquement à l'aide de quantificateurs universels et existentiels :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq N \quad \forall q \geq N \quad |r_p - r_q| < \varepsilon,$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall k \geq 0 \quad |r_{n+k} - r_n| < \varepsilon.$$



هل يجب قتل الإبسيلون ؟

أغرب المفاهيم عند الطلبة الجامعيين هو مفهوم الإبسيلون فكأنهم خلطوا الحس بالتجريد فصنعوا مفهوما مستحيل الوجود إذا سألتهم عنه قالوا هو أصغر عدد موجب غير معدوم ....

فلا هو حسي ولا هو تجريدي، بل صنعوا متناقضة مع انفصام تفكير فمن ناحية هو موجب غير معدوم لكنه أصغر الأعداد الموجبة تماما فهو أصغر من نفسه ....

فكأنهم تعبوا من الجري وراءه لفهم معناه فقالوا ذاك الذي هو اذا امسكته فإنك لم تمسكه فلنجعل ذلك مسكا له ...أي جعلوا عدم فهمهم فهما له.....

فهل يجب قتل هذا الإبسيلون المتناقض الموجود في عقول الطلبة الجامعيين ؟



عندما يصبح الإبسلون عددا متناهي الصغر!!!

الإبسيلون كم هو صغير وأفعاله كبيرة، هو عقدة الكثيرين، لكن ما هو الإبسيلون ؟

الحقيقية هذا الرمز غير مفهوم وذلك ناتج لخلل في التدريس لسنوات عديدة، إذ شاع إستعمال رمز x للمتغير حتى أصبح الطلاب لا يعرفون غيره.

الإبسلون مجرد رمز يمكن تعويضه بـ x أو y و حتى بباطاطا.....

كل ما في الأمر يستعمل بكثرة للدلالة عن عدد موجب تماما كيفي مربوط بالمسافة على النهاية و بما أن المسافة على النهاية لها تأثير أكبر كلما صغرت، ارتبط الإبسلون بالقيم الموجبة الصغيرة و التي كلما صغرت أعطت ثمارها.

فالمشكل في الإبسيلون ناتج عن هذا الحس، فكأننا نحس أن له تصرف خاص به وكأنه يتصاغر و يتصاغر ....

وكالعادة في الرياضيات إذا ظهرت خاصية حدسية نصنع لها تعريفا ليصبح لها وجود فعلي داخل مجموعة وأفضل طريقة للوصول إلى ذلك علاقة التكافؤ فهي كفيلة بربط العناصر التي لها نفس الخاصية لتكوين مجموعة صنف تكافؤ فيمثلها أحد عناصرها و هكذا نتعامل مع الخاصية كعنصر لوجود فعلي.

فبهذه الطريقة صنعت الأعداد الناطقة لما رأينا أن ثنائيات من الأعداد تتناسب فصنعنا علاقة تكافؤ بينها لتنتج الأعداد الناطقة.

وكذلك الأعداد الحقيقية لاحظنا وجود متتاليات ناطقة الفرق بينها يؤول إلى الصفر فصنعنا علاقة تكافؤ بينها لكن نقحناها قبل ذلك لنستعمل المتتاليات التي تحقق شرط كوشي فقط لتكون في النهاية مجموعة الأعداد الحقيقية فالعدد الحقيقي ما هو إلا متتالية ناطقة، هكذا أصبحنا نتعامل مع متتالية كعدد....

ولماذا لا نصنع نفس الشئ مع المتتاليات الموجبة التي تؤول إلى الصفر ؟ لنصنع منها إبسيلون ففي النهاية الإبسلون ما هو إلا ترميز لعدد موجب لا يتوقف عن التناهي في الصغر...

سنة 1960 قام أبراهام روبنسون في أعماله حول التحليل غير الإعتيادي بصناعة مجموعة أكبر من مجموعة الأعداد الحقيقية سماها المجموعة الأكثر من حقيقية.

قام في هذه المجموعة باعطاء مفاهيم للإبسيلون و المالانهاية كأعداد لها تقريبا نفس خصائص الأعداد الحقيقية و ذلك برؤية المتتاليات كأعداد أو بالأحرى صنف تكافؤها فتصبح المتتالية $1/n$ عدد موجب أصغر من جميع الأعداد الحقيقية الموجبة!!!!!

وهكذا ننتج الإبسيلون، أما المالانهاية فيكفي قلبه...

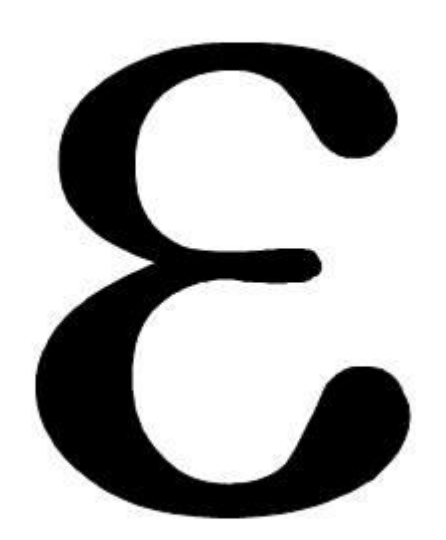
ويصبح حساب النهايات في هذه المجموعة الجديدة مجرد عمليات حسابية داخلها....

المجموعات العددية مبنية على أصناف التكافؤ وكلها نتيجة من عمليات الضرب و القسمة في مجموعة الأعداد الطبيعية، فما نراه كعدد في الحقيقة ما هو إلا خاصية أعطيناها مفهوما وجودي.



فمثلا لو أردنا كتابة قيمه العدد الحقيقي e
بالكتابة العشرية فسنلاحظ أننا لا نتوقف بعد الفاصلة إذ هذا العدد في الحقيقة ما هو إلا متتالية لكن تجسيد الخاصيات كعناصر في مجموعات يعطي للعقل قابلية لإستعمالها و التعامل معها كعناصر موجودة حسيا.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_hyperr%C3%A9el

$$\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}$$



الإبسيلون المظلوم في فهمه

الإبسيلون مجرد رمز لعدد موجب تماما نستعمله في التعبير عن النهايات ذلك أن النهاية لا تتعلق بالزمن إنما بتوزيع النقاط والنقاط موجودة خارج الزمن.

فالإبسيلون يأخذ جميع القيم الموجبة تماما في آن واحد صغيرها وكبيرها لكي يقول أن النقاط موزعة بشكل غير منته حول النهاية مما يقتضي ان صغير الإبسيلون يستلزم كبيره فهو يغني عنه.

أما ما يظنه البعض من أن الإبسيلون غير منته في الصغر أو هو أصغر عدد حقيقي موجب غير معدوم فشيء لا تقبله الرياضيات بل لا وجود له فيها.

وأصل المشكلة أنه لدينا هذا الحدس بأن الإبسيلون يقترب من الصفر لكن الأمر غير ذلك فالذي يقترب من النهاية ويجعل قيم الإبسيلون تسير في اتجاه دون آخر هو رؤيتنا للنهاية لا الإبسيلون ذاته لأننا كبشر لا يمكننا إدراك توزيع هذه النقاط حول النهاية إلا بمفهوم الاقتراب.

فالبشر مجبولون على تتابع الحوادث ولا يمكنهم تصور الما لا نهاية إلا بطريقة التغير في الزمن نحو زمن غير محدود.

فنتصور المالانهاية بوجود دائم لنقاط أمامنا مهما تقدمنا نحوها.

إن الكائنات الرياضية لا تتعلق بالزمن ولا بذوق البشر، أما المالانهاية فهي مجرد تعبير عن عدم إحاطتنا بالأشياء فكان من الطبيعي صياغتها بخوارزمية زمنية غير محدودة كمفهوم المتتاليات ومفهوم الاقتراب بخطوات غير منتهية.

الإبسيلون مجرد ترميز لعدد موجب تماما وهو متغير في مجموعة بقابلية أخذه لأي قيمة لا أنه يتحرك زمنيا فيها.

فالإبسيلون في تعريف النهاية مجرد مقياس والفرق بينه وبين الأعداد كالفرق بين المسطرة و قيم درجاتها.

الإبسيلون ليس بشيء يتحرك في اتجاه معين إنما هو مجرد مقياس نغيره كما نريد بأخذ أي قيمة حقيقية موجبة تماما وبتغييره نقول أنه مهما اتخذنا من قيمة له كمقياس فسنجد اغلب حدود المتتالية داخل هذا المقياس، فهو مقياس نستطيع به المقارنة.

لا يوجد صغر مطلق في الرياضيات ولا كبر مطلق إنما توجد قيمة أصغر من قيمة وقيمة أكبر من قيمة فمتى عرفنا ذلك عرفنا أنه لا معنى لقولنا متتالية تقترب من نهاية إن لم نعطي مفهوما لهذا الاقتراب بمقياس نغيره كيفما نشاء.

الإبسيلون مجرد رمز لمتغير حقيقي موجب تماما.

الإبسيلون المظلوم في فهمه (نسخة 2)

الإبسيلون مجرد رمز لعدد حقيقي موجب تماما نستعمله في التعبير عن النهايات ذلك أن النهاية لا تتعلق بالزمن إنما تتعلق بتوزيع النقاط حول نقطة معينة بحيث لا تنفك عنها فهذ النقاط موجودة خارج الزمن ولا تأثير للزمن في عدم انفكاكها عن النهاية.

فالإبسيلون كرمز يأخذ جميع القيم الموجبة تماما في آن واحد صغيرها وكبيرها لكي يقول أن النقاط موزعة بشكل غير منته حول النهاية مما يقتضي ان صغير الإبسيلون يستلزم كبيره فهو يغني عنه.

إنما نحن من لا يستطيع تصور الإبسيلون بأكثر من قيمة في آن واحد فنحتاج أن نعوض قيمة بقيمة لكن الإبسيلون كرمز رياضي لا يحتاج للتعويض قيمة بقيمة إذ تعريفه كعدد موجب تماما كاف لجعله يمر بجميع القيم الموجبة تماما.

أما ما يظنه البعض من أن الإبسيلون عدد غير منته في الصغر أو هو أصغر عدد حقيقي موجب غير معدوم فشيء لا تقبله الرياضيات بل لا وجود له فيها.

وأصل المشكلة أنه لدينا هذا الإحساس بأن الإبسيلون يقترب من الصفر لكن الأمر غير ذلك فالذي يقترب من النهاية ويجعل قيم الإبسيلون تسير في اتجاه دون آخر هو رؤيتنا للنهاية لا الإبسيلون ذاته لأننا كبشر لا يمكننا إدراك توزيع هذه النقاط حول النهاية إلا بمفهوم الاقتراب.

فالبشر مجبولون على تتابع الحوادث ولا يمكنهم تصور المالانهاية إلا بطريقة التغير في الزمن نحو زمن غير محدود.

فنتصور المالانهاية بوجود دائم لنقاط أمامنا مهما تقدمنا نحوها.

إن الكائنات الرياضية لا تتعلق بالزمن ولا بذوق البشر، أما المالانهاية فهي مجرد تعبير منا عن عدم إحاطتنا بالأشياء فكان من البديهي صياغتنا لها بخوارزمية زمنية غير محدودة كمفهوم المتتاليات ومفهوم الاقتراب بخطوات غير منتهية.

الإبسيلون مجرد ترميز لعدد موجب تماما وهو متغير في مجموعة الأعداد الموجبة تماما بقابلية أخذه لأي قيمة لا أنه يتحرك زمنيا فيها.

فالإبسيلون في تعريف النهاية مجرد مقياس والفرق بينه وبين الأعداد كالفرق بين المسطرة و قيم درجاتها.

الإبسيلون ليس بشيء يتحرك في اتجاه معين إنما هو مجرد مقياس نغيره كما نريد بأخذ أي قيمة حقيقية موجبة تماما وبتغييره نقول أنه مهما اتخذنا من قيمة له كمقياس فسنجد جُلَّ حدود المتتالية داخل قيمة هذا المقياس، فهو مقياس نستطيع به المقارنة بين مجموعة نقاط ونهايتها.

لو تصورنا أنفسنا نقف في موضع معين نقيسه بمقياس الإبسيلون فننظر أمامنا فسنرى نهاية متتاليتنا وحولها ملتصق بها أغلب حدودها، ثم ننظر وراءنا فسنجد أن حدود المتتالية التي تخلفت من أمامنا وبقيت وراءنا عددها منته.



ولذلك نكتب تعبيرا عن هذا:

مهما أخذنا من مسافة قيمتها إبسيلون: $\forall \xi > 0$

بيننا وبين النهاية: L

فسنجد أمامنا أغلب حدود المتتالية أي $|U_n - L| < \xi$

أما وراءنا فلا يتخلف إلا عدد منته منها أي أغلب نقاط متتاليتنا تبقى أمامنا:

$\exists\, n_0 ,\ \forall n > n0 : |U_n - L| < \xi$

وما كتابة n_0 إلا تعبير منا عن تخلف بعض الحدود التي قبل n_0 عن الالتفاف حول النهاية أمامنا.

فكما نرى الإبسيلون مجرد مقياس ننظر به للإلتفاف النقاط حول النهاية لكن لا دخل للزمن في المسألة .

لا يوجد صِغَر مطلق في الرياضيات ولا كِبَر مطلق إنما توجد قيمة أصغر من قيمة وقيمة أكبر من قيمة فمتى عرفنا ذلك، عرفنا أنه لا معنى لقولنا متتالية تقترب من نهاية إن لم نعطي مفهوما لهذا الاقتراب بمقياس نغيره كيفما نشاء نرمز له عادة بالإبسيلون.

الإبسيلون مجرد رمز لمتغير حقيقي موجب تماما.



إبسيلون هلبرت

إعلان زواج🤣

يعلمكم المشاغب : أنه قد تم الزواج بين الإبسيلون ومسلمة الإختيار لإنتاج إبسيلون هلبرت.

وهو تمديد للغة الشكلية بواسطة المؤثر إبسيلون الذي يعوض المكممات المنطقية لتمديد البرهنة.

الإبسيلون الهلبرتي أقوى من مسلمة الإختيار.

كما يعلمكم المشاغب أن المعازيم لم يفهموا شيئا فلا داعي لسؤالهم عن العرسان🤣



المشاغب الحكيم و القط المتشغشبرودنجر

عندما يتجاوز الإبسيلون الزمن

القط : ما هذه السمكة التي أعطيتها لي ؟ إنها لأصغر من الإبسيلون!!

المشاغب : لعلك تظن أن الإبسيلون عدد موجب صغير ؟

القط : أوليس هو كذلك ؟

المشاغب : خرافة أن الإبسيلون أصغر عدد موجب غير معدوم جاءت من عدم فهم الطلبة لمعناه و تعويضه بالفهم الحسي، إلا أن المشكل عند عدم الضبط يؤذي إلى الخلط بين الشروط و النتائج والمجموعة وعنصرها والمتغير وقيمته.

الإبسيلون مجرد رمز لاتيني مثله مثل x ، لكن إعتدنا إستعماله في النهايات كمتغير يمسح جميع الأعداد الحقيقية الموجبة تماما و لفهمه جيدا لابد أن نفهم معنى النهاية في ظل المسافة.

لو تصورت نفسك تقف و تنظر أمامك فترى نهاية متتالية ثم تنظر وراءك فستجد أن حدود المتتالية التي وراءك عددها منته أما أمامك فكل الحدود ملتفة حول النهاية.

فتغير مكانك و تقول لأقترب من النهاية أكثر لكنك تجد نفس الملاحظة أغلب حدود المتتالية أمامك ملتفة حول النهاية و لا تجد وراءك إلا عددا منتهيا منها.

فتغير موضعك و تبتعد عن النهاية فتجد نفس الشيء ثم تقترب أكثر منها فتلاحظ نفس الشئ كل حدود المتتالية أمامك ملتفة حول النهاية إلا عددا منتهيا منها وراءك.

فتقول : مهما كانت المسافة التي أختارها بيني و بين النهاية فكل حدود المتتالية تبقى أمامي إلا عددا منتهيا منها أو بصيغة أخرى:

مهما إخترت من مسافة موجبة تماما سميها إبسيلون فحدود المتتالية انطلاقا من رتبة معينة كلها تبعد عن النهاية بمسافة أقل من هذا الإبسيلون.

فالإبسيلون هنا مجرد متغير سميت به مسافتي ، مثله مثل متغير الدالة $\ln x$ مثلا في مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

فمن يقول الإبسيلون هو عدد موجب صغير أو أصغر عدد موجب تماما فكأنه يقول عن x في $\ln x$ أنه عدد موجب صغير أو أصغر عدد موجب !!! و هذا لا معنى له.

القط : فهمت الآن ، إذن الإبسيلون هو مجرد مقياس فكأنه شريط متري لقياس المسافات نغير طوله كما نريد فمن يقول الإبسيلون عدد موجب صغير كأنه يقول أن الشريط المتري هو عدد موجب و هذا لا معنى له.

المشاغب : ها قد فهمت إذن، وإذا فهمت ذلك أدركت أنه لا نحتاج أن يتغير الإبسيلون في جميع الأعداد الحقيقية الموجبة تماما ، فمثلا يمكن أن نجعله يتغير فقط بين الصفر و الواحد.



القط : ماذا ؟ لكنه لا يمسح جميع الأعداد الموجبة!!!

المشاغب : إنك لا تفرق بين الشرط و القضية، فشرط الإبسيلون هنا هو شرط داخل القضية لا كل القضية و لفهم ذلك لنرجع لمسألة الوقوف أمام نهاية المتتالية :

فإذا وقفت أمامها عن مسافة متر رأيت جميع حدود المتتالية أمامك ماعدا عدد منته منها وراءك ، فماذا يحدث إذا تاخرت و وقفت أمام النهاية بمسافة مترين ؟

القط : أكيد سيبقى الأمر صحيحا لأن مسافة متر أقرب من مترين فإذا كنت عن بعد متر و رأيت ورائي عددا منتهيا من حدود المتتالية فوقوفي عن بعد مترين لا يغير من الأمر شيئا سيبقى كذلك ورائي عدد منته منها فقط.

المشاغب : نعم هو هذا، بل يمكننا استبدال الإبسلون بمسافات درجية 1 ثم 0.1 ثم 0.01 و هكذا لأن المسافة نفسها غير مقصودة ، إنما المقصود ما يترتب عليها ، أي أنه مهما اقتربت من النهاية فأغلب حدود المتتالية تبقى بجوارها تراها أمامك فمسافة 0.01 تغني عن كل ما قبلها و مسافة 0.001 تغني عن كل ما قبلها.

هذه المسافة في الحقيقة تعبر عن الجوارات و الرياضيات لا يهمها الزمن إنما الذي يهمها كيفية إنتشار حدود المتتالية حول النهاية لكننا كبشر لا يمكننا إدراك عدد غير منته من النقاط حول نقطة فنحتاج للتعبير عنه بمفهوم الإقتراب مع الزمن.

لكن رياضيا : حدود المتتالية مجرد عناصر مجموعة كل حد له موضعه لا يغيره فكلها موجودة حول النهاية ولا يوجد حد يتنقل بينها و يتحرك إلا أن العقل البشري يحاول عدها تسلسليا فالعقل البشري لا يمكنه الإحاطة بما حوله إلا عن طريق الزمن لأنه لا يقدر على إدراك شيئين في آن واحد إنما يفكر في أحدهما أو الآخر فيختار واحدا بعد الآخر.

لذلك ماذا سيحدث لو غيرنا في ترتيب حدود المتتالية فهل النهاية تتغير ؟

القط : لا لأنني إذا وقفت أمام النهاية رأيت جميع حدود المتتالية أمامي ماعدا قلة منها ورائي فرتبتها لا علاقة لها لا بوقوفي و لا بكونها حول النهاية.

المشاغب : نعم فكأنك نثرت حبات شعير حول النهاية ثم رسمت دائرة حولها فوجدت خارج قرص الدائرة بعضا من الحب لكن الباقي كله داخل القرص ، فرتب حبات الشعير كيفما تريد فتبقى أغلب الحبات داخل الدائرة.

النهاية مفهوم طوبولوجي لا علاقة له بالزمن ولا بالترتيب لكننا نعبر عنه بذلك لأن العقل البشري لا يمكنه إدراك المالانهاية إلا عن طريق تصور المزيد و المزيد فيتصور طريقها لكن يجهل نهايته فهذا الجهل يعطيه إسم المالانهية فهو عدم قدرة البشر عن الإدراك ...

فهل أدركت ذلك الآن ؟



القط المتشغشبرودنجر : فهمت كل ذلك، إذن أعطني كل سمكاتي أضعها حولي و لا تطبق عليها تفكيرك البشري المحدود فترتبها ترتيبا ، فلا تنسى أني قط حي و ميت فلا تنطبق عليا قوانينكم ... إنما من يعد الأسماك هم أنتم أما أنا فدعني مع سمكاتي أعرفها و لا يهمني غيرها.





المالانهاية العددية : بين الجبر والطبولوجيا والمحدودية في فضاء متري

ما معنى متتالية تؤول إلى المالانهاية ؟ هل المالانهاية مفهوم طبولوجي ؟ أو متري ؟ أو جبري ؟

المالانهاية لأول وهلة مفهوم متري لأننا نقارن قيمة المتتالية مع الأعداد أي نستعمل المحدودية وعموما في فضاء متري نستعمل محدودية المسافة بإتخاذ نقطة كمبدأ.

لكن المفهوم المتري متعلق بالأعداد الحقيقية والاعداد الحقيقية زمرة طبولوجية فمفهوم المالانهاية فيها نبع من تناسب عملية الجمع مع الترتيب إذن هو متري لكن له أصل جبري.

لكن نتساءل هل يمكن توسيع مفهوم المالانهاية يصبح مفهوما طبولوجيا ؟

قد يظن أنه يمكن ذلك بتعويض المحدودية بجوارات مرتبة بالإحتواء لنقطة، بشرط ان يعطي اتحادها المجموعة الأم اذ المحدودية في الاعداد الحقيقية هي انتماء إلى مجال من نوع]-M, M[

ونلاحظ ان إتحاد جوارات من الشكل]-n,n[يعطي مجموعة الأعداد الحقيقية.

فيمكن تعميم مفهوم المالانهاية بجعل متتالية تؤول إلى المالانهاية إذا كان مهما اخترنا رتبة من الجوارات السابقة فالمتتالية ابتداء من رتبة تقع خارج اتحاد الجوارات إلى الرتبة المختارة.

اي اذا اخترنا n_0 فالمتتالية تقع ابتداء من رتبة خارج اتحادات $]-1,1[\cup]-2,2[\ldots \cup]-n_0, n_0[$

فقد يبدو ان هذا التعريف يعطينا مفهوما لنهاية متتالية نحو المالانهاية لكن في الحقيقة هذا صالح لكل نقطة تراكمية خارج المجموعة أي لو اخترنا فضاء طبولوجي من الشكل]-1 ,1[

فسيصبح 1 و -1 مالانهايات بالتعريف السابق لانه يمكننا استعمال اتحاد جوارات من الشكل

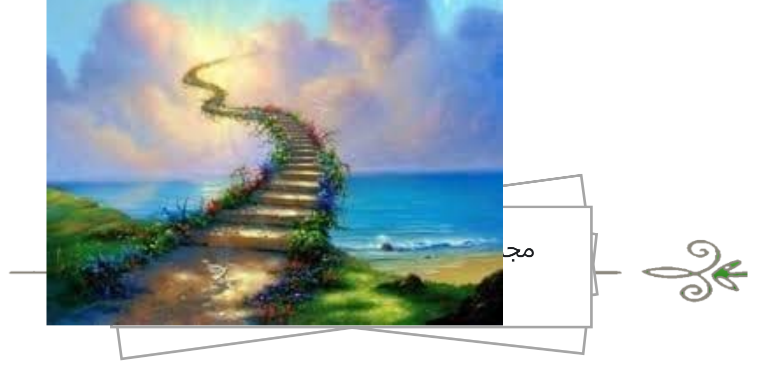
]-1 + epsilon, 1 - epsilon[

وهنا سنلاحظ أنه طبولوجيا المالانهاية مجرد نقطة تراكمية للفضاء الحقيقي.

بل هذا هذا ما يحدث لو ذهبنا نعمم المتتاليات الكوشية بالجوارات فسنحصل على المالانهاية كنهاية في الغلق الجبري.

ويتم ذلك بجعل المتتالية الكوشية هي المتتالية التي اذا وجدت عائلة مفتوحات مرتبة بالإحتواء تقاطعها خال أو نقطة وكل مفتوح فيها يحوى المتتالية ابتداء من رتبة.

لو طبقنا هذا التعريف على مجموعة الأعداد الحقيقية لوجدناه يعطينا مجموعة المتتاليات الكوشية في الأعداد الحقيقية زائد المتتاليات التي تؤول إلى المالانهاية أي ان المالانهاية طبولوجيا هي نقطة تراكمية وغلق الأعداد الحقيقية يعطينا [-infini , +infini] لذلك المحدودية لا تظهر طبولوجيا إذ هي مفهوم متري نشأ من خاصية جبرية وهي ترتيب متناسب مع الجمع لكن طبولوجيا هي مجرد نقطة ملاصقة خارج الفضاء الطبولوجي.



الخاصية المحلية في الرياضيات

كثيرا في الرياضيات ما نتكلم عن الخواص المحلية ، كالقيم الحدية المحلية لدالة، الاستمرار بانتظام محليا، دالة ليبشتزية محلية ..... فضاء متراص محليا ... فماذا نعني بذلك؟

المحلية كما يدل عليه اللفظ هي كلام عن المحل وهو مكان والكلام عن مكان عند نقطة يعني الكلام على ما بجوارها فهذا يقودنا لمفهوم الطبولوجيا.

فمفهوم المحلية متعلق بالطبولوجيا، فمتى قلنا أن خاصية محققة محليا عند نقطة (أو مجموع نقاط) فنحن نتكلم عن قضية صحيحة بجوارها (أو بجوارهم) .

مفهوم المحلية مرتبط بالجوار فمتى قلنا أن خاصية (والخاصية هي قضية متعلقة بكائن) صحيحة محليا فنحن نقول أنه يوجد جوار تكون عليه الخاصية محققة.

لذلك عندما نقول أن الدالة $f(x) = x^3 - 3x$ تقبل قيمة حدية صغرى محلية عند 1 فنحن نقصد أنه يوجد جوار للواحد 1 بحيث أقل قيمة للدالة على هذا الجوار تكون عنده وهذا واضح من المنحنى فيمكننا أن نختار الجوار $V(1) =]0,2[$ فنجد أن أقل قيمة للدالة عليه هي $f(1) = -1$ نلاحظ هنا أن المشتقة تنعدم عنده وتغير الإشارة:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \, , \, f'(1) = 0$$

لو لم نشترط الجوار هنا لما كان الأمر صحيحا فنحن نعلم أن الدالة f تذهب للمالانهاية في طرفي مجموعة تعريفها وتغطي R فهي لا تقبل قيمة حدا أعلى في R ولا أصغر لأنها غير محدودة في الاتجاهين.

بشكل عام قد نتكلم عن المحلية عند نقطة أو بشكل مطلق على مجموعة، فعندما نقول أن الدالة الأسية ليبشيتزية محليا فهنا لم نحدد موضعا معينا أي مهما اخترنا الموضع فهذه الدالة ستكون ليبشيتزية بجواره أي

$$\forall\ a \in R \, , \exists\ V(a) \text{ جوار} \, , \exists\ k > 0 : \forall\ x, y \in V(a) : |e^y - e^x| < k\,|y - x|$$

يمكننا أن نعطي تعريفا عاما للمحلية عند نقطة a من فضاء طبولوجي E لخاصية P كالتالي

$$\exists\ V(a) \text{ جوار} : P(V(a)) \text{ صحيحة}$$

وإذا لم نحدد a وقلنا خاصية محققة محليا على A جزء من E فسنكتب:

$$\forall\ a \in A \, , \exists\ V(a) \text{ جوار} : P(V(a)) \text{ صحيحة}$$

الشيء الذي يجب أن ننتبه إليه في الطبولوجيا أنه متى تكلمنا عن الجوارات على مجموعات جزئية من فضاء طبولوجي فنحن نتكلم عن طبولوجيا الأثر ولذلك عندما نقول ما هي العناصر التي تأخذ عندها قيم حدية محليا الدالة $f(x) = \sqrt{(X^2 - 1)}$ فالجواب هي -1 و 1 رغم أن مجموعة تعريف هذه الدالة هي

$$D =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

ذلك أن جوار 1 في مجموعة التعريف هذه ليست مجموعات تحوي $]1 - \xi \, , \, 1 + \xi[$ بل نستعمل طبولوجيا الأثر فنجد $]1 - \xi \, , 1 + \xi[\cap D = [1, 1 + \xi[$ وبالمثل ل -1 سنجد $]-1- \xi \, , -1]$

قد يقول قائل هذا يخالف تعريف الكتاب المدرسي ذلك أنه يشترط وجود مجال مفتوح ؟




والجواب على ذلك أن:

الكتاب المدرسي ليس مرجعا للتعاريف الرياضية إنما هو معد للتدريس.

الشيء الثاني : بالنسبة لتلاميذ الثانوي فهم لا يعرفون طبولوجيا الأثر بل لا يعرفون من الطبولوجيا إلا المجالات المفتوحة فمن البديهي أن يبسط لهم الأمر فكل دراستهم تكون على مجالات وعادة مفتوحة لتجنب الكلام على الحواف ذلك أن مستواهم لا يسمح لهم بإسقاط المسائل الرياضية على حالاتها العامة.

وهذه مسألة تطرقنا إليها عند موضوع استمرار دالة الجذر التربيعي عند الصفر وأننا لا ننظر خارج مجموعة التعريف. لذلك عندما نتكلم عن مبرهنة كل دالة مستمرة على متراص تبلغ حديها فنحن لا نستثني من الحدين ما يمكن أن يكون عند الحواف كالدالة $f(x) = x^2$ على $[0,1]$ فهي تبلغ حديها عند 0 و 1 .

وعندما نتكلم على مبرهنة التزايدات المنتهية ونشترط استمرار f على مجال $[a,b]$

فنحن نطبق هذه المبرهنة على الدالة $f(x) = x^2 - [x/3]^2$ على المجال $I = [0 , 2]$

وإن كانت غير مستمرة عند 0 إذا باعتبار تعريفها على R لكن هذا لا يهمنا فنحن ننظر لها داخل المجال I لا خارجه.

ونفس الشيء عندما نقول أن المجموعة $D = [0,1] \cup]3,4[$ غير مترابطة لأنها تكتب كاتحاد مفتوحين وهما

$I = [0,1]$

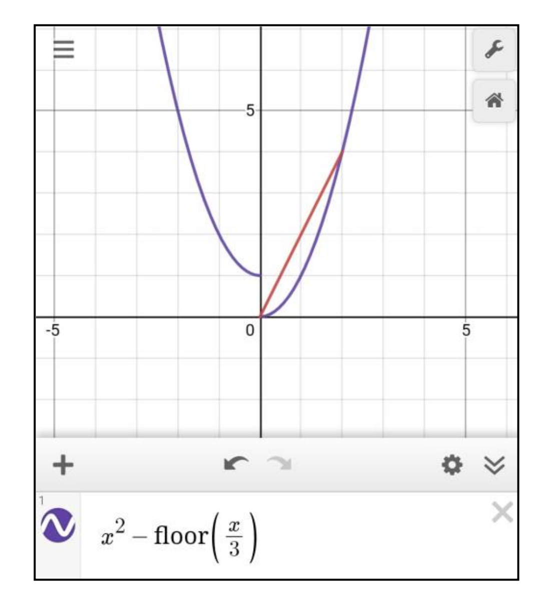
$J =]3,4[$

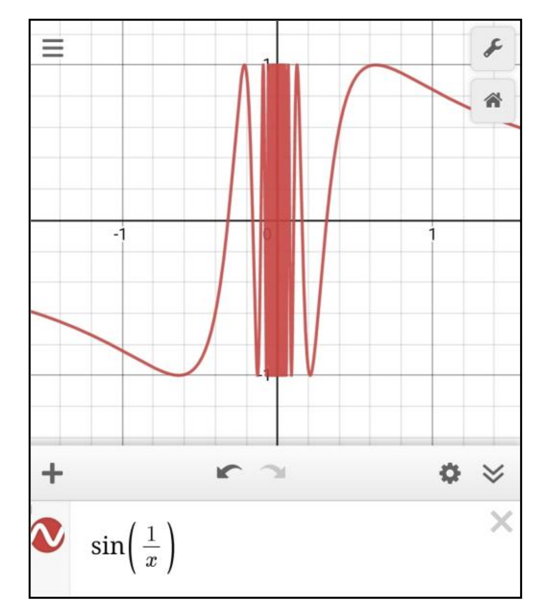
ف I هنا مفتوح من طبولوجيا الأثر على D :

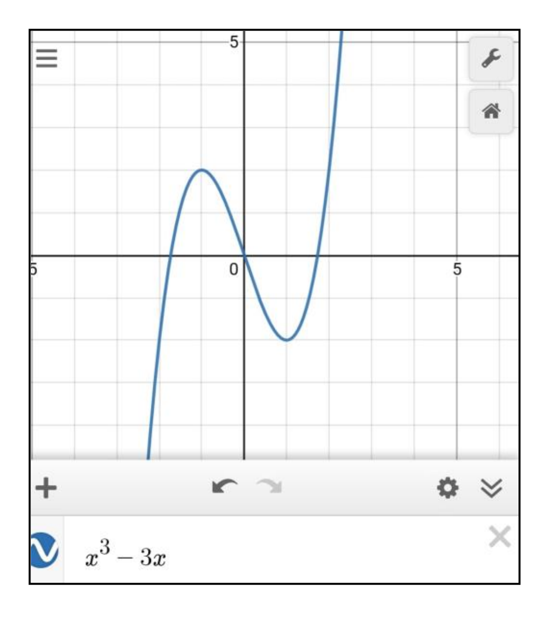
$I =]-1 , 2[\cap D$

إذا عدنا للخاصية المحلية فسنلاحظ أن الجوار ليس وحيدا لكن قد نتكلم أحيانا عن جوار أعظمي إن وجد وهذه الطريقة تستعمل عادة لبرهنة أن خاصية محلية هي كلية عندما يتساوى الجوار الأعظمي مع المجموعة الكلية.

قد يظن البعض أن خاصية كلية هي محلية وهذا غير صحيح فلو أخذنا منحنى الدالة $\sin(1/x)$ الممددة ب 1 عند الصفر فهو مترابط رغم أنه غير مترابط محليا عند $(0,1)$.







On dit d'une certaine propriété mathématique qu'elle est **localement** vérifiée en un point d'un espace topologique s'il existe un système fondamental de voisinages de ce point sur lequel la propriété est vraie.

On dit d'une certaine propriété mathématique qu'elle est **localement** vérifiée si elle est localement vérifiée en tout point de l'espace topologique considéré.

Cette notion se retrouve dans tous les domaines des mathématiques qui utilisent la topologie, en particulier en analyse.

Souvent, il suffit que la propriété soit vraie pour un voisinage du point pour qu'elle soit vraie localement en ce point, par exemple :

- On dit qu'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ définie sur un espace topologique X admet en un point a de X un maximum local s'il existe un voisinage V de a tel que $f(a)$ soit la plus grande valeur de f sur V ;
- On dit qu'un espace topologique est localement compact s'il est séparé et si chacun de ses points possède un voisinage compact.

ما العلاقة بين النظيم والمسافة ؟

النظيم هو تعميم للمسافة على الفضاءات الشعاعية بإضافة مفهوم التجانس مع العمليات الجبرية للفضاء الشعاعي.

الفضاء الشعاعي يتميز بعمليتين : الجمع كعملية داخلية والضرب كعملية خارجية فإذا أردنا ان تتعلق المسافة بالجمع فلابد أن يكون توافق بين كون $u - v = a - b$ وبين $d(u,v) = d(a,b)$

وهذا يعنى اعطاء مفهوم لطول الشعاع أي $d(0 , v)$ فهذا الذي نسميه النظيم أي $\|v\|$

ومنه $\|0\| = d(0,0) = 0$ وبما أن :

$$d(u ,v) \leq d(u,0) + d(0,v)$$

فسنحصل على

$$\|u - v\| \leq \|u\| + \|-v\| = \|u\| + \|v\|$$

أما عملية الضرب فإذا أردنا تجانسا فنحن نحتاج أن يكون من أجل عملية الضرب في شعاع

$$u = m \times v$$

ان يكون

$$d(0,u) = d(0,m \times v) = |m| \times d(0,v)$$

وهذا الذي نرمز إليه بـ

$$\|m\ v\| = |m|\ \|v\|$$

فالنظيم هو مسافة عدل مفهومها ليتوافق مع العمليات الجبرية للفضاء الشعاعي.





الفرق بين النظيم والمسافة

النظيم والمسافة مفهومان مختلفان.

النظيم هو تعميم لمفهوم القيمة المطلقة من حيث وجودها في حقل حقيقي وهو يعبر عن خاصية مقدار تأثير أو طول أو كمية الشعاع لذلك هو يتناسب خطيا مع عملية الضرب فتأثير ضعف الشعاع هو ضعف تأثير الشعاع.

$$\|a\ x\| = |a|\ \|x\|$$

و يحقق الخاصية الثلاثية بنسبة لعملية الجمع لأن تأثير جمع شعاعين هو أقل من مجموع تأثيرهما.

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

أما المسافة فمفهومها مفهوم مقارنة فالمسافة بين النقطتين هي مقارنة بينهما فهي تعميم لعلاقة الترتيب بدون توجيه فأصغر وأكبر في مجموعة الأعداد الحقيقية ما هي إلا الفرق بين عددين مع مقارنة بالصفر أما المسافة فتعطي عددا بينهما إذن هي تكميم لعلاقة الترتيب لكن مع التخلي عن الإشارة أي الوجهة .

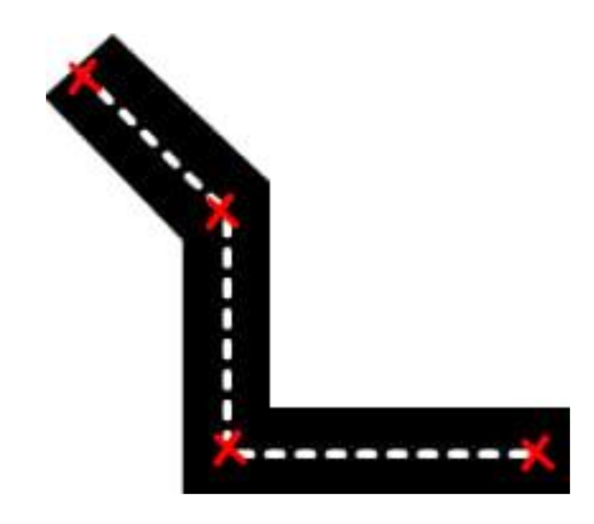
إذن المسافة هي تعميم لمفهوم القيمة المطلقة من حيث الترتيب بين عددين بالفرق بينهما مع التخلي عن الإشارة.

النظيم يولد مسافة من حيث وجوده في زمرة فالمسافة في زمرة يمكن أن تعرف انطلاقا من مسافة بين كل عنصر والصفر ثم كل عنصرين يمكن تعريف المسافة بينهما بالطرح بينهما و حساب المسافة مع الصفر.

فوجود هذا التجانس في الزمر هو الذي مكننا من المرور من النظيم إلى المسافة رغم اختلاف مفهومهما.

وبما أن النظيم هو طول شعاع والفرق بين عنصرين في فضاء شاعي هو شعاع كان نظيم الفرق مسافة لأنه عمم الترتيب مع التخلى عن الاتجاه.

والله أعلم.



نظرات في المفاهيم الهندسية

ما هو المستقيم وماهي الإستقامة ؟

الإستقامة حدسيا هي أقرب طريق بين نقطتين أو أقرب مسافة، فمتى أضفنا نقطة ثالثة بينهما و كانت المسافة المقطوعة من النقطة الأولى إلى الأخيرة مرورا بالوسطى أكبر من المسافة المقطوعة مباشرة بين النقطتين قلنا أنهم ليسوا على إستقامة.

فحدسيا الإنسان يربط الإستقامة بالمسافة.

البعض يظن أن هذا مربوط بالإتجاه وهذا خطأ إنما الإتجاه الذي يبنى على الاستقامة لا العكس.

فإذا أردنا التعريف الرياضي للإستقامة فلابد من مفهوم المسافة ومفهوم المسافة هنا إصطلاحي فكيفية حساب المسافات على سطح كرة تختلف منها على سطح مستوي.

يمكن تعريف الإستقامة رياضيا لثلاث نقاط مختلفة a,b,c إذا تساوى مجموع مسافتين بين كل نقطتين لثنائيتين منهما مع المسافة بين نقطتي الثنائية الأخيرة، مثلا: $d(a,b) + d(b,c) = d(a,c)$

إذن إذا تغيرت المسافة تغير مفهوم الإستقامة والمستقيم معها.

فالمستقيم على سطح الكرة هي الدوائر التي مركزها مركز الكرة وهذا انطلاقا من تعريف المسافة بين نقطتين بطول القوس بينهما. لكن لو عرفنا المسافة بالمسافة الإقليدية فسنخترق الكرة لصناعة المستقيم.

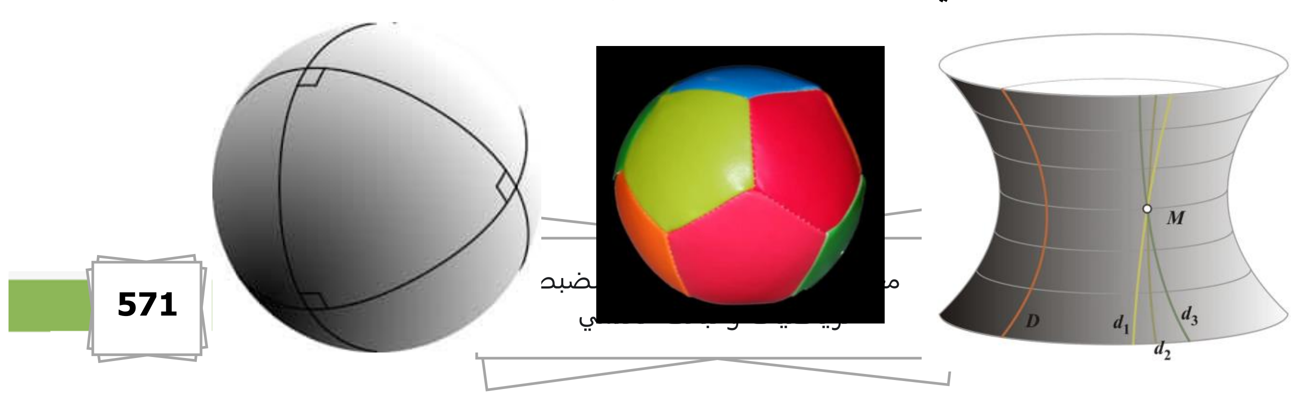
من هنا ندرك أن الهندسة الإقليدية مجرد حالة خاصة يمكن أن نعممها لنصل لأنواع مختلفة من الهندسات كالهندسة الريمانية.

وندرك كذلك أن المستقيم متعلق بفضائه لا العكس وهنا يكمن الفرق بين الفضاء الشعاعي بمفهومه الجبري فهو مولد بأشعته وبين الفضاء الطبولوجي بمسافته ومن ضمنه المستقيم المستنتج بمساره وفق هذا الفضاء الطبولوجي. لذلك فيزيائيا تشوه الفضاء يغير مسار الضوء وهو الذي يعبر عن مفهوم المستقيم فيزيائيا.

ولذلك كذلك نجد في النظرية النسبية العامة أن سقوط الأجسام ليس بسبب قوة لكن لأنها تسير في مسار مستقيم وفق التشوه المحلي للفضاء بسبب الكتلة.

عندما نتكلم عن المفهوم العام للمستقيم نسمي ذلك الخطوط الجيودسية وهي كتابة حرفية للمصطلح اللاتيني Géodésique والذي يعني أقصر مسافة. لكن التعريف بأقصر مسافة لا معنى له لأنه متعلق بالإستقامة فلا يمكن تعريف طول منحنى إلا بتقريبه بأطوال قطع مستقيمة مقربة منه ثم نجعل عددها يؤول للمالانهاية. فنعود بالتعريف إلى الإستقامة ومنه نحتاج لتعريف المسافة.

كخلاصة : طبيعة الفضاء هي من تحدد تعريف المستقيم ولذلك علاقة بالمسافة.



الاستقامة بين الفضاء الشعاعي والفضاء المتري

الاستقامة الملاحظة في الواقع تحمل في طياتها مفهومين:

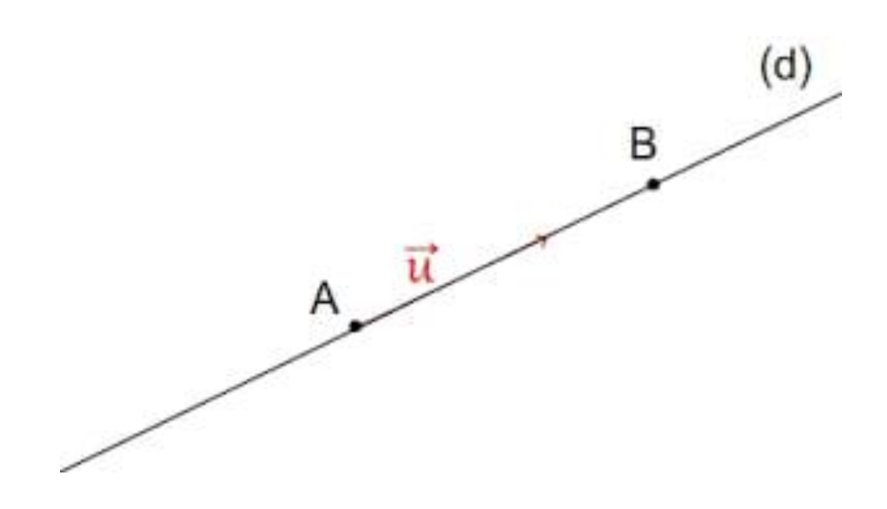
مفهوم شعاعي بترابط الأشعة أي أن الاستقامة توافق مفهوم الإتجاه أو نفس الإتجاه وهذا الذي نعبر عنه بقولنا الأشعة مرتبطة خطيا أو تنتمي إلى فضاء شعاعي بعده واحد.

وهذا الذي نطبقه لايجاد معادلة مستقيم في الهندسة الإقليدية إذ نستخدم نقطة وشعاع توجيه.

والمفهوم الثاني مفهوم مسافة ففي الفضاء المتري الاستقامة متعلقة بتساوي المسافات أي أنه لثلاث نقاط على استقامة مجموع المسافتين بين كل عنصرين من الثنائيتين منهما يساوي المسافة بين عنصري الثنائية الثالثة.

في الفضاء النظيمي يلتقي المفهومان الشعاعي و المتري لذلك لتعريف مفهوم الاستقامة نحتاج ربطا بين المفهومين وإلا لحصلنا على تعارض والربط يأتي من خاصية محافظة النظيم على قيمته عند ضرب الشعاع في قيمة حقيقية موجبة: $\|a V\| = |a| \|V\|$

أما الجداء السلمي فلا ينتج في طياته مفهوم الاستقامة لكنه يستعملها فهو يمثل التأثير بين الأبعاد بطويلة الأشعة فيأخذ قيمته العظمي عند ترابط الأشعة خطيا فهو مستعمل للمفهوم لا منتج له.



الفرق بين عدد نقاط قطعة مستقيمة وطولها

من خصائص الكون التركيب من وحدات مكررة تجمعها خصائص متشابهة كالدقيق مكون من حبات الدقيق.

فمتى وجدت خاصية تتكرر أمكننا حساب التكرار أو ما نسميه بالتكميم وأمكننا القياس وهو مقارنة خاصية الشيء بخاصية شيء نسميه وحدة من حيث تكرار هذه الخاصية في الشيء.

من ذلك الطول فنحن نقارن طول الشيء بمقدار تكرار المتر والمتر متعارف عليه فهو وحدتنا.

وكذلك الوزن بالكيلوغرام.

وقد تجتمع في الشيء أكثر من خاصية يمكننا تكميمها كالدقيق فيمكن تكميم:

عدد حباته

او حجمه

أو وزنه

فكل هذه خصائص مختلفة.

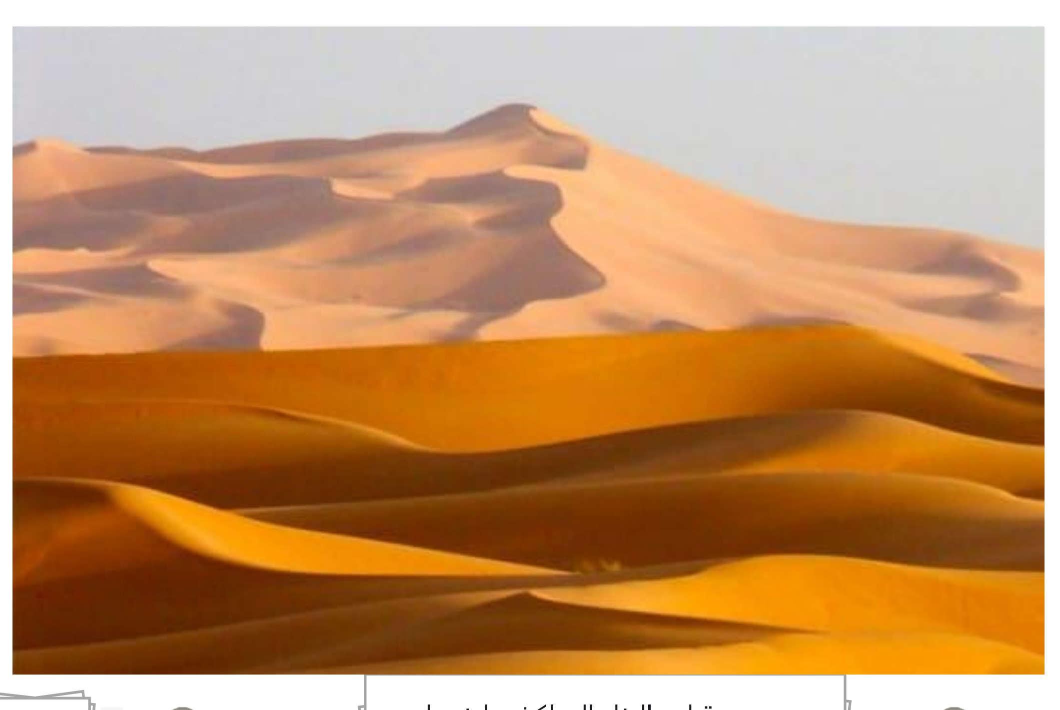
لو عدنا للقطعة المستقيمة فطول القطعة هو تكميم بمقارنتها بقطعة مستقيمة سميناها الوحدة من حيث خاصية تطابق القطعة مع عدد مكرر من الوحدة على نفس الإستقامة.

فهذا قياس الطول.

أما عدد نقاط القطعة المستقيمة فهذه خاصية أخرى فهي خاصية تكرار النقطة من حيث وجودها في مجموعة أما نسميه قياس العد.

أو بمثال من الواقع عدد حبات كيس بطاطس ووزنه شيئان مختلفان.

ومساحة الصحراء تقاس بالكيلومتر مربع وليس بعدد حبات الرمل.



المشاغب

كيف نمر من التفسير إلى التحرير ؟

نموذج : هل نهاية المتتالية تتعلق بترتيب حدودها ؟

نهاية متتالية تتعلق بتوزيع حدودها حول النهاية لا بترتيبها ذلك أنه نطلب من كل جوار لها أن يشمل أغلب حدود المتتالية ماعدا عدد منته خارجه.

بتعبير آخر كل حدود المتتالية داخل الجوار إبتداء من رتبة ومنه نستنتج أنه كيفما كان ترتيبنا فحن نعلم أنه متى أكملنا الحدود التي خارج الجوار فسنعود بعده للعد داخل الجوار .

فلا يمكن أن يغير الترتيب من عدد الحدود التي خارج الجوار فيجعلها غير منتهية لأن المسألة متعلقة بعددها لا برتبها.

لكن هذا التفسير يحتاج تحريرا رياضيا، فكيف يتم ذلك ؟

للمرور من التفسير إلى التحرير أول شيء نقوم به هو تعويض الألفاظ اللغوية بمصطلحات رياضية و من الأحسن بالترميز:

ونبدأ :

بالكائنات

ثم بما يطبق عليها من شروط بدأ من المطلوب و وصولا إلى النتيجة

ترجمة المكممات

ثم الروابط المنطقية.

سنبدأ بترجمة السؤال رياضيا : هل نهاية المتتالية تتعلق بترتيب حدودها ؟

المتتالية سنرمز لها بـ (U_n) ونهايتها عند المالانهاية $\lim U_n = l , n \to +INFINI$

لكن بقي الترتيب فما هو الترتيب رياضيا ؟ إعادة ترتيب الأعداد الطبيعية هو مجرد تطبيق تقابلي من مجموعة الأعداد الطبيعية نحو نفسها

لكن لننتبه إلى المكمم فهنا الترتيب كيفي إذن سنترجمه بمهما يكن ، فلنختر رمزا للترتيب كأنه متغير بين التطبيقات التقابلية

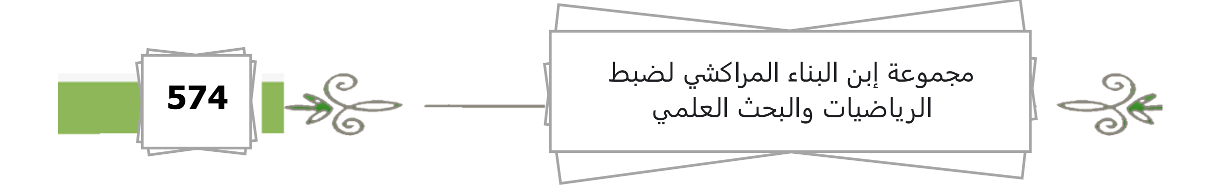
$\forall\ T , T : N \to N$

T تقابلي

إذن يصبح السؤال عند تعويض كل لفظ برمزه و مع المكممات و الروابط المنطقية:

$\forall$ T تقابلي, $T : N \to N , \lim U_n = l \Rightarrow \lim U(T(n)) = l$

نلاحظ مباشرة في أننا فيما يشبه تركيب الدوال فإذا كان التطبيق الممثل للترتيب يؤول إلى المالانهاية فالمتتالية تؤول نحو نهايتها.



لنحاول ترجمة تفسيرنا الحدسي الذي يقول : لو أخذنا جوارا للنهاية فسنجد كل حدود المتتالية داخله إبتداء من رتبه:

$$\forall\ I(l)\ ,\ \exists\ n_0 \in N\ ,\ \forall\ n > n_0 : U_n \in I(l)$$

إذا أعدنا ترتيب حدود المتتالية بتطبيقنا فسنلاحظ أن كل الحدود التي خارج المجال يبقى عددها منته وبعد أن يمر برتبها ترتيبنا سيعود لعد الحدود داخل المجال أي يكفي أن نأخذ أكبر ترتيب لهذه الحدود فهو عدد موجود ثم نواصل بعده فكل ما بعده هو داخل المجال و هذا يترجم هكذا:

$$m_0 = \max\{m \in N : T(m) \leq n_0\}$$

وجود m0 مضمون بكون التطبيق تقابلي بل يمكن ان نترجمه هكذا كذلك:

$$m_0 = \max(\ T^{-1}(\{0,1,\ldots,n_0\}))$$

لنركب الكتابات السابقة:

$$\forall\ I(l)\ ,\ \exists\ n_0 \in N,\ \exists\ m_0 = \max\{m \in N : T(m) \leq n_0\}\ ,$$
$$\forall\ m > m_0 : n = T(m) > n_0 \Rightarrow U(T(m)) = U(n) \in I(l)$$

ثم ننظف ما تحصلنا عليه فنحصل على

$$\forall\ I(l)\ ,\ \exists\ m0\ ,\ \forall\ m > m_0 : U(T(m)) \in I(l)$$

و هو المطلوب.

إذن للمرور من التفسير إلى التحرير :

لابد أن لا نترك مجالا للألفاظ اللغوية بل نعوضها كلها برموزها و مصطلحاتها الرياضية

نبدأ بالكائنات ثم الشروط و لا ننسى المكمنات

ثم نصل بين كل هذه بالروابط المنطقية

و هكذا نكون قد حررنا التفسير فكتبنا برهانا رياضيا مضبوطا.

VII.

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

(Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.)

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der hierdurch erhaltenen Erlaubniss baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird, bezeichne ich durch $\zeta(s)$. Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 ist; es lässt sich indess leicht ein immer gültig bleibender Ausdruck der Function finden. Durch Anwendung der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-nx}\, x^{s-1}\, dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

erhält man zunächst

$$\Pi(s-1)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x - 1}.$$



بين القياس والطبولوجيا

الكثافة والقياس شيئان مختلفان فالكثافة هي توزيع لا نهائي لعناصر حول جميع النقاط فهي خاصية عناصر وتوزيعها حسب الجوارات.

اما القياس فهي محاولة تأطير مجموعات بمجموعات اعطيناها قيمة عددية فهي خاصية مجموعات.

لذلك نجد مجموعة الاعداد الناطقة كثيفة لانه مهما اخترنا من عدد حقيقي وجدنا عناصر ناطقة بجواره،

لكن قياسها معدوم ذلك أنها قابلة للعد فيمكن تأطيرها في مجموعات قياسها يؤول إلى الصفر بل العنصر الوحيد قياسه صفر فاذا جمعنا قياس عناصر قابلة للعد فسيبقى الصفر.

والاعداد الحبرية قابلة للعد لذلك كان قياسها هو مجموع قياس كل عنصر منها وهو الصفر.

خاصية التجميع في القياس هي من تخول لنا قياس اتحاد المجموعات بمجموع قياس كل مجموعة.

اذن القياس يهتم بالمجموعات لا بتوزيع العناصر بعكس الطبولوجيا فهي تهتم بتوزيع العناصر لذلك نتكلم فيها عن الجوارات.

ففي الطبولوجيا نحاول تصغير الجوار للاقتراب من العنصر

اما في القياس فنحاول جمع المجموعات لحساب قياس مجموعة.

في الطبولوجيا اختار جوار او جوار اصغر منه يعطي نفس الخاصية.

في القياس تصغير او تكبير المجموعة قد يغير قياسها.

بلغة الباطاطا القياس يهتم بوزنها كيفما كان وضعها في شاحنة أو في اكياس اما الطبولوجيا فتهتم بتوزيع الاملاح فيها فتدرس تركيبتها المحلية.

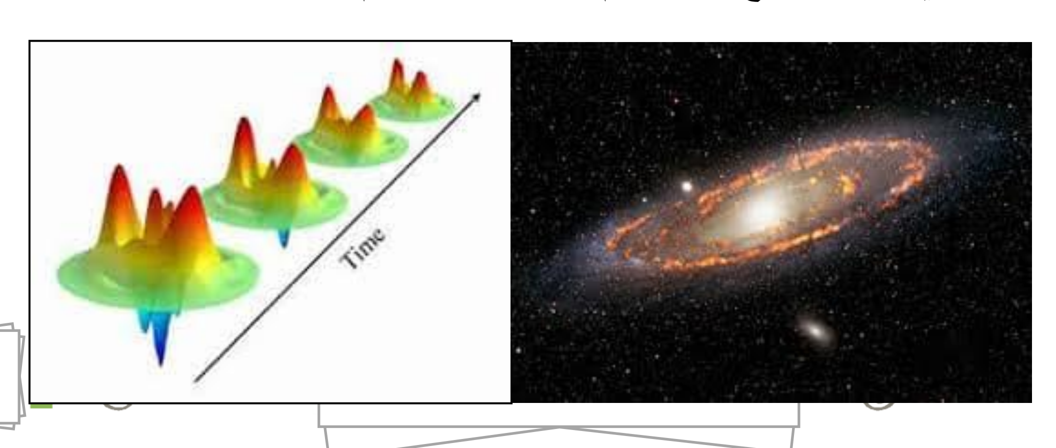
القياس نظرته كلية لذلك نقول حيثما كان

الطبولوجيا نظرتها محلية لذلك نتكلم عن الكثافة والجوار.

لكن لماذا نستخدم المفتوحات لتوليد عشيرة بوريل ومنها عشيرة لوبيغ ؟

كمفهوم عام لا علاقة بين القياس والطبولوجيا، لكن كحالة خاصة هناك عشائر تستعمل المفتوحات كبداية لتوليد عشيرة كالعشيرة البوريلية فعادة ما نستعمل المفتوحات كأصل لبناء القياس لأن الغرض من القياس هو تكامل لوبيغ وهو تعميم لتكامل ريمان وتكامل ريمان يستغل الدوال المستمرة كما ان التكامل يحتاج لنهاية.

إذن إذا اردنا الاستفادة من النهايات والإستمرار مع المحافظة على مفهوم المكاملة فالانطلاق من المفتوحات لبناء القياس طريقة جيدة للجمع بين مفاهيم الطبولوجيا ومفاهيم القياس.



خاصية الحد الأعلى، مبرهنة ويستراس في بلوغ الدوال المستمرة حديها داخل متراص، مبرهنة ريس في الفضاءات ذات كرات الوحدة المتراصة ؟

ماذا تخبرنا هذه الثلاث ؟ وما علاقتها بالتراص ؟ وماذا عن مبرهنة تيخونوف ؟

مجموعة الأعداد الحقيقية هي غلق طبولوجي لحقل الأعداد الناطقة ولذلك يمكن صناعتها انطلاقا من المتتاليات الكوشية في هذه الأخيرة.

وهذا ما يجعل كل متتالية كوشية فيها متقاربة.

هذه الخاصية تولد الخاصية الأساسية في مجموعة الأعداد الحقيقية وهي خاصية الحد الأعلى والتي تنص على أن أي جزء محدود منها من الأعلى يقبل حدا علويا ملاصقا به نسميه الحد الأعلى أي إذا سمينا مجموعتنا A فهي تحقق:

$$\exists M, \forall \xi > 0 , \exists x(\xi) \in A : M - \xi < x(\xi) \leq M$$

نرمز للحد الأعلى بـ $sup(A)$ وإذا كان ينتمي ل A نسميه عنصر أعظمي

$$max(A) = sup(A) \in A$$

وبنفس الطريقة نعرف الحد الأسفل أو الأدنى $Inf(A)$ و العنصر الأصغري إذا كان ينتمي إليها

$$min(A) = inf(A) \in A$$

من تعريف الحد الأعلى إذا عوضنا ξ بـ $1/n$ سنستنتج وجود متتالية تتقارب نحو الحد الأعلى.

وجود هذا الحد دوما في المجموعات الحقيقية المحدودة يعطيها خاصية التراص المحلي.

فنحن نعرف أنه من التعريفات المكافئة لتعريف التراص في فضاء متري أنه يكافئ امكانية استخراج من كل متتالية منه متتالية متقاربة فيه.

وتعرف هذه المبرهنة بمبرهنة بولزانو ويرستراس

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8me_de...

فكون كل محدود يقبل حدا أعلى وحدا أسفل في مجموعة الأعداد الحقيقية يجعل أي متتالية منه محدودة فهي تقبل حدا أعلى وحدا أسفل وهذا ما يمكننا من استخراج متتاية منها متقاربة نحو أحديهما فكنتيجة ملاصقة كل محدود متراص.

وهذا كذلك ما يفسر بلوغ الدوال المستمرة على متراص حديها.

إذ لو كانت لدينا دالة f مستمرة على متراص A فكل متتالية مشكلة من صورها توافق متتالية من سوابقها أي

$$y(n) = f(U_n)$$

وبما أن U_n من متراص A فيمكننا استخراج متتالية V_n متقاربة منها نحو a أي $V_n = U(E(n))$

حيث E تطبيق الاستخراج للرتب فيكون لدينا

$$\lim y(E(n)) = \lim f(U(E(n)))$$
$$= \lim f(V_n) = f(\lim V_n) = f(a)$$



فأدخلنا النهاية ف f بسبب استمراره.

وهذا يبين لنا أنه يمكن استخراج متتالية متقاربة من y_n داخل $f(A)$ فالمجموعة $f(A)$ متراص فلذلك صورة كل متراص بتطبيق مستمر هي متراص.

ومن ذلك نستنتج أن f تبلغ حديها فالنتيجة كما تظهر هي أعم من الفضاء الطبولوجي R .

تعرف هذه المبرهنة في R بمبرهنة ويرستراس أو مبرهنة القيم الحدية

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8me_des...

خاصية التراص المحلي في R يمكننا نقلها ل R^m لأنه إن كان لدينا جزء محدود منها وأخذنا منه متتالية فستكون بشكل الاحداثيات:

$$U_n = (x_0(n)\ ,\ x_1(n),\ ...,\ x_m(n))$$

وبما أن كل متتالية من الشكل $x_i(n)$ محدودة فيمكننا البدء باستخراج متتالية متقاربة من $x_0(n)$ ولتكن $x_0(E_0(n))$ حيث $E_0(n)$ يستخرج لنا من n رتبا تجعل x_0 متقاربة.

فنجد متتالية جديدة مستخرجة

$$U(E0(n)) = (x_0(E_0(n))\ ,\ x_1(E0(n)),\ ...,\ x_m(E_0(n)))$$

تتقارب فيها الاحداثية الأولى $x_0(E_0(n))$

بنفس الطريقة يمكننا استخراج متتالية متقاربة من $x_1(E_0(n))$ ولتكن $x_1(E_1(E_0(n)))$

ونواصل هكذا إلى أن نصل ل x_m فنجد

$$U(E_m(...(E_0(n))...)) =$$
$$(x_0(E_m(...(E_0(n))...))\ ,\ ...,\ x_m(E_m(...(E_0(n))...)))$$

وكل احداثياتها متقاربة فنكون بذلك بينا أن خاصية التراص المحلي تنتقل ل R^m .

لكن ماذا يحدث لو انتقلنا لفضاء نظيمي غير منته الأبعاد مثل فضاء كثيرات الحدود مثلا ؟

لو تأملنا ما فعلناه سابقا في R^m من استخراج المتتاليات سنلاحظ أن هذه الاستخراجات المتتالية لها معنى إن كان عددها منته بانتهاء البعدm .

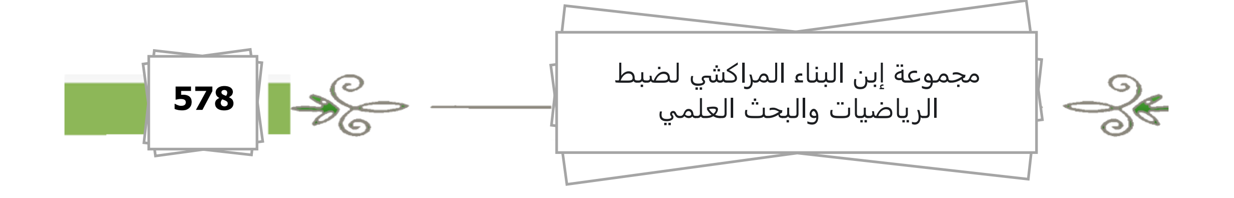
لكن لو واصلنا للمالانهاية فقد لا نستخرج شيئا وهذا نلاحظه بالمثال البسيط التالي في فضاء كثيرات الحدود غير منته البعد المزود بنظيم max بوضع المتتالية $U_n = x^n$ فنحن نلاحظ أن هذه المتتالية محدودة إذ $\|U_n\| = 1$ ورغم ذلك لا يمكن أن نستخرج منها متتالية متقاربة إذ لدينا دائما من أجل n يختلف مع m :

$$\|U_m - U_n\| = \|x^m - x^n\| = max(|1|,|-1|) = 1$$

لو أردنا أن نطبق الطريقة السابقة بالاستخراج سنجد

$$U_n = (0,0,...,1,.....)$$

حيث 1 هو في موضع x^n أي رتبة $n+1$ لأننا نبدأ من الصفر.



فتكون $X_0(E_0(n)) = 0$

لكن مهما واصلنا الاستخراج سنلاحظ أن 1 في الرتبة n يهرب للمالانهاية من حيث رتبته فلا يمكننا أن ننهي استخراجاتنا.

فنفقد هنا خاصية التراص المحلي ليس بسبب عدم محدودية القيم لكن بسب عدم محدودية البعد فيمكن للمتتالية الهروب للمالانهاية عبر الأبعاد بدل القيم.

هذا الذي تخبرنا به مبرهنة ريس وهو وجود تكافؤ بين التراص المحلي أو تراص كرة الوحدة وانتهاء بعد الفضاء النظيمي الحقيقي.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Lemme_de_Riesz...

يجب أن نذكر هنا مبرهنة أخرى وهو مبرهنة تيخونوف

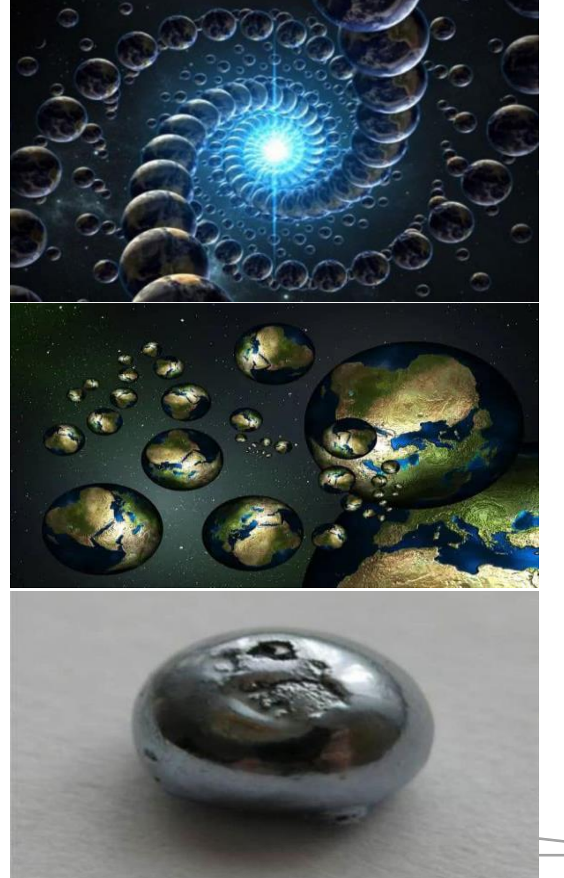
théorème de Tykhonov

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8me_de...

والتي تنص على أن الجداء الديكارتي لفضاءات متراصة هو فضاء متراص بطبولوجيا الجداء وإن كان الجداء غير منته فهذه المبرهنة تستعمل مسلمة الاختيار.

وهذا يعني أن طبولوجيا الجداء هي ليست نفسها المعرفة بالنظم في الفضاءات النظيمية وإن كان يوجد تكافؤ في الأبعاد المنتهية ذلك أن جميع النظم متكافئة.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Topologie_produit



Théorème de Riesz

Théorème — Soit *E* un espace vectoriel normé réel. Les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

1. *E* est de dimension finie ;
2. toute partie bornée de *E* est relativement compacte (c'est-à-dire d'adhérence compacte) ;
3. la boule unité fermée de *E* est compacte ;
4. *E* est localement compact.

لنضبط الرياضيات معا : خصائص الدالة تدرس على مجموعة تعريفها، مبرهنة بلومبرج كنموذج.

أغلب مفاهيم الرياضيات تنطلق من خصائص مجموعة الأعداد الحقيقية ثم تعمم على غيرها.

مجموعة الأعداد الحقيقية مليئة بالغرائب ومن غرائبها مسألة الاستمرار فهي لا تتعلق بالضرورة بمجال.

مبرهنة بلومبرج تنص على أنه أي دالة حقيقية معرفة على R يمكن قصرها على مجموعة كثيفة لتصبح دالة مستمرة.

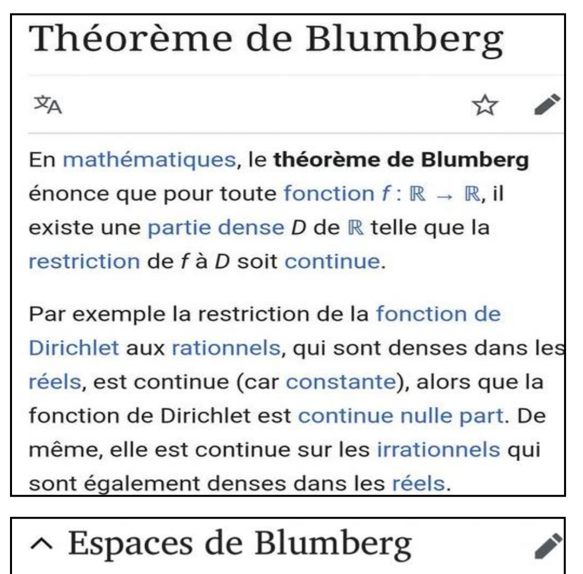
والاستمرار هنا يكون حسب طبولوجيا الأثر لذلك دالة مثل دالة ديركليه المعرفة بالقيمة 1 عند الأعداد الناطقة وصفر عند الباقي غير مستمرة عند أي نقطة على R لكن متى قصرناها على Q أصبحت مستمرة وكذلك لو قصرناها على R\Q تصبح كذلك مستمرة.

بصفة عامة مبرهنة بلومبرج تخبرنا أن فضاء متري هو فضاء بلومبرج إذا وفقط إذا كان فضاء لبير.

مبرهنة بلومبرج ليست مجرد غريبة من الغرائب الرياضية لكنها تخبرنا أن الدالة طريقة توزيع صور وأن خصائصها لا تتعلق بها فقط بل تتعلق بمجموعة تعريفها والطبولوجيا المزودة بها.

فالاستمرار ليست خاصية دالة فقط بل خاصية مشتركة بين سلوك الدالة والفضاء الطبولوجي.

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8me_de...



Théorème de Blumberg

En mathématiques, le **théorème de Blumberg** énonce que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe une partie dense D de $\mathbb{R}$ telle que la restriction de f à D soit continue.

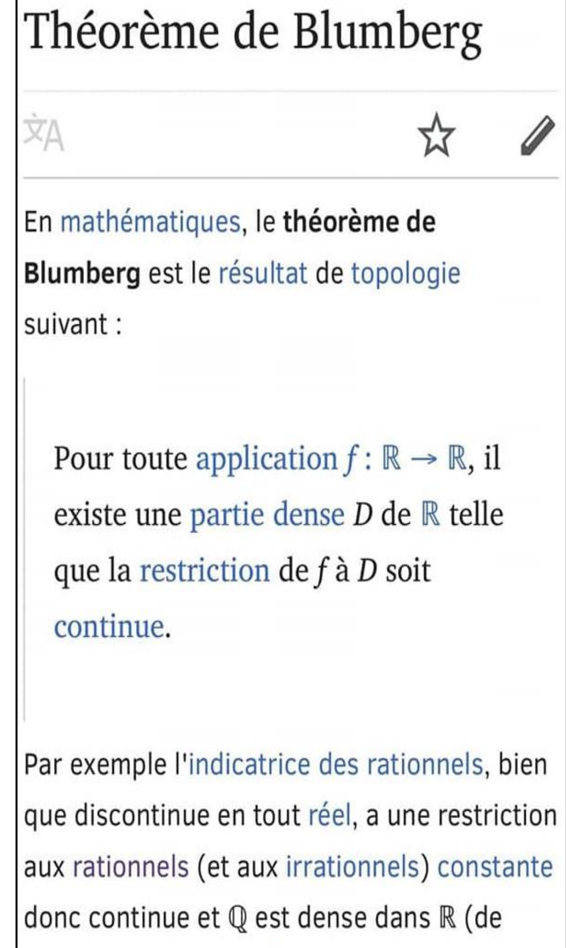
Par exemple la restriction de la fonction de Dirichlet aux rationnels, qui sont denses dans les réels, est continue (car constante), alors que la fonction de Dirichlet est continue nulle part. De même, elle est continue sur les irrationnels qui sont également denses dans les réels.



Espaces de Blumberg

Plus généralement, un **espace de Blumberg** est un espace topologique X pour lequel toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ admet une restriction continue sur un sous-ensemble dense dans X. Le théorème de Blumberg affirme donc que $\mathbb{R}$ (muni de sa topologie usuelle) est un espace de Blumberg.

Si X est un espace métrique, alors X est un espace de Blumberg si et seulement si c'est un espace de Baire.



Théorème de Blumberg

En mathématiques, le **théorème de Blumberg** est le résultat de topologie suivant :

> Pour toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe une partie dense D de $\mathbb{R}$ telle que la restriction de f à D soit continue.

Par exemple l'indicatrice des rationnels, bien que discontinue en tout réel, a une restriction aux rationnels (et aux irrationnels) constante donc continue et $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (de même que son complémentaire).



بين المفهوم والتعريف : التعامد في فضاء هلبرتي نموذجا

ما هو التعامد ؟ تعامد قطع مستقيمة سهل التصور والرسم لكن المفهوم تطور لتصبح هناك تطبيقات متعامدة فكيف يمكن تصورها على ارض الواقع ؟

قد يقول أحد نطبق التعريف فالتعامد مجرد إنعدام للجداء السلمي لكن ما معنى هذا التعريف ؟ هل هو مجرد آلة رياضية صنعت من أجل ان تصنع ؟ خالية من المعاني ؟ ذلك غير ممكن إنما هي ناتج عن تصور تجريدي مر بمراحل عبر فهم عميق للفضاء الإقليدي.

إنعدام الجداء السلمي يعني عدم تأثير أحد الشعاعين على الآخر حسب الجداء السلمي المختار ففي الفضاء الهلبرتي الجداء السلمي ما هو إلا علاقة بين الأشعة تمثل تأثيرها في بعضها من ناحية الطويلة ومن ناحية الوجهة.

فمفهوم الإسقاط ما هو إلا تمثيل للقسم المؤثر لشعاع في شعاع آخر لذلك لا يتجاوز الجداء السلمي جداء الطويلتين إذ هو أقصى تأثير ولا يكون إلا بترابط الشعاعين أي تساوي وجهتيهما.

ولذلك هو خطي فمجموع تأثيرين يساوي تأثير المجموع.

هذا التأثير على ميدان الواقع نجد له تطبيقات عدة كالقوة فاسقاطها هي مقدار القوة المؤثرة في وجهة الشعاع لذلك نجده في مفهوم العمل.

إن معرفة هذا المفهوم نستفيد منه أنه متى وجدنا اتجاهات في مسألة وقابلنا مفهوم تأثير خطي سلمي بينها فنلجا إلى تعريف جداء سلمي لتمثيل هذا التأثير.

فهذا الفرق بين المفهوم والتعريف فالتعريف نظري لكن لا يعطيك متى تستعمله ففي الواقع الكون ليس إمتحانا يفرض لك معطيات مسبقة من جداء سلمي وفضاء هلبرتي حتى يتسنى لك تطبيق مبرهناته إنما الكون ظواهر لابد من ربطها بالمفاهيم الرياضية حتى يتسنى لك دراستها تحت نظريات عامة وبدون المفاهيم تبقي التعاريف خالية من المعنى.





بين الجداء السلمي ومسلمة التوازي ومبرهنة فيثاغورث ومبرهنة طاليس

هناك علاقة وطيدة بين الجداء السلمي ومبرهنة فيثاغورث ومبرهنة طاليس.

الفضاء الإقليدي مبني على مسلمة التوازي والتي تكافئ كل من مبرهنة فيثاغورث ومبرهنة طاليس.

فمبرهنة طاليس ما هي إلا تعميم للإسقاط إذ تقول أن التوازي يحافظ على النسب بين الاطوال من مستقيم لآخر أو بمعنى آخر بين بعد لآخر لان المستقيم ما هو إلا فضاء شعاعي بعده واحد.

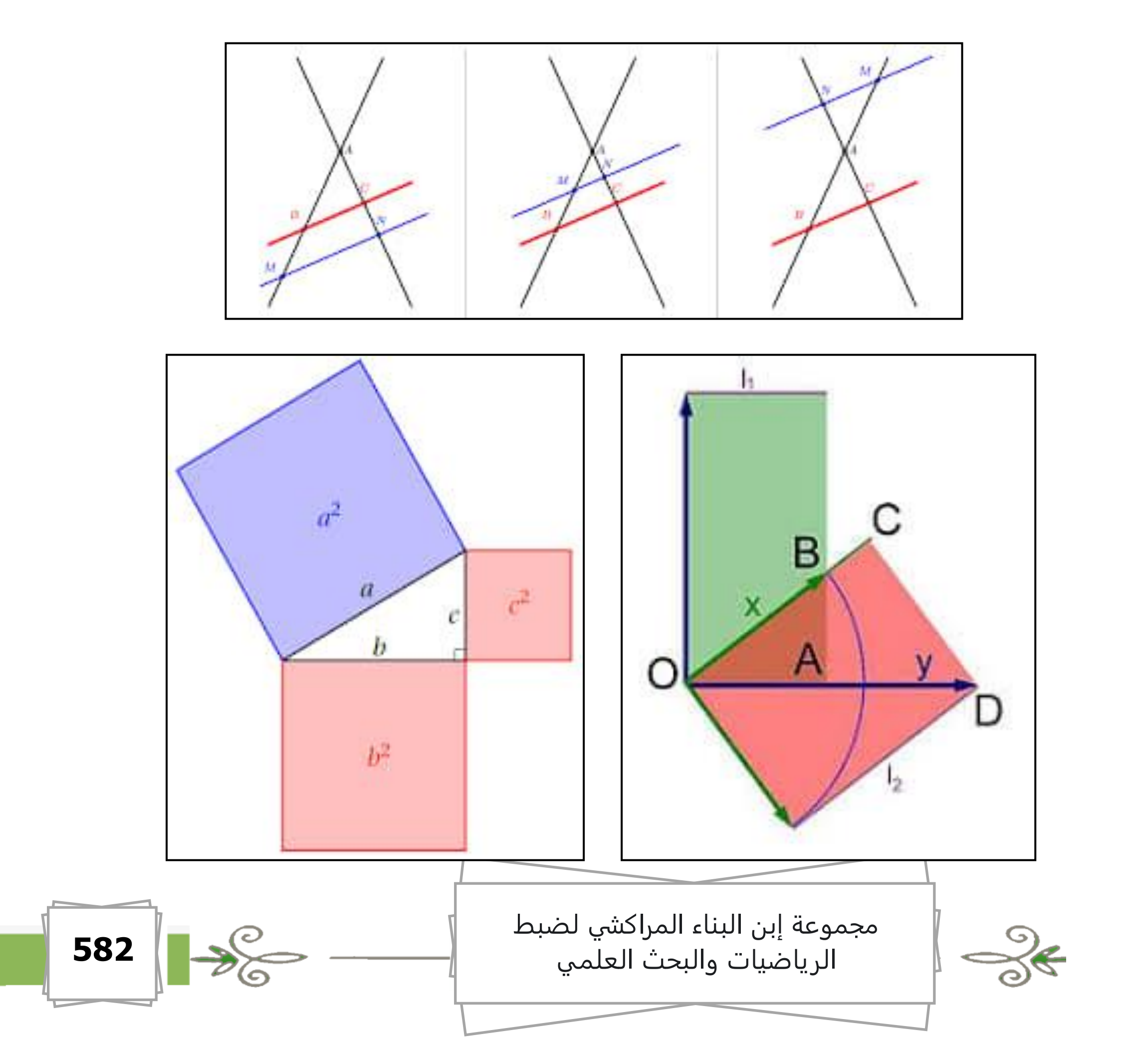
مبرهنة فيثاغورث تقول نفس الشيء بطريقة مختلفة فهي تقول أن المساحات متجانسة بين بعدين متعامدين أي مجموع مربع الضلعين العموديين يساوي مربع الوتر فمهما أطلنا الضلعين بنفس التناسب سنحصل على وتر بنفس التناسب وهو نفسه ما تقوله مبرهنة فيثاغورث.

الجداء السلمي تجريد لهذه الخاصية فهو يقول هناك تجانس بين أبعاد الفضاء أي أن تأثير شعاع في بعد على شعاع في بعد آخر متناسب مع طوله.

وهذا التأثير هو ما نحسب له طول الاسقاط العمودي إذن الجداء السلمي ما هو إلا تعبير عن مبرهنة طاليس وعند التعامد نستنتج منه مبرهنة فيثاغورث.

ولذلك الفضاء الهلبرتي بجدائه السلمي يعتبر تعميما للفضاء الإقليدي إذ ان الفضاء الهلبرتي الحقيقي المنته الابعاد هو فضاء إقليدي.

من مبرهنة فيثاغورث نستنتج قانون طول الدائرة وكذاك يمكننا استنتاج قانونه من مبرهنة طاليس وما نسميه العدد بي في الحقيقة هو نتيجة للفضاء الإقليدي والذي هو مبني على مسلمة التوازي.



ماذا أضاف الجداء السلمي على النظيم في فضاء شعاعي ؟

الجداء السلمي تطبيق خطي يربط بين شعاعين أي يعطي علاقة بين الأبعاد وهو الشيء المفقود في النظيم إذ النظيم يعطي علاقة بين النسب فقط فالنظيم يعطي تجانس بالنسبة لكل بعد أو شعاع مع الفضاء الأحادي الذي يولده أما الجداء السلمي فيعطي تجانس زائد بين الأبعاد ولذلك ينتج الإسقاط والتعامد وهما أهم خواص الفضاء الهلبرتي



تفسير متراجحة كوشي شوار في الجداء السلمي:

تفسير المتراجحة ينبع من تفسير الجداء السلمي ، فالجداء السلمي هو تأثير شعاع في شعاع أو بعد في بعد وبما أن الشعاع اتجاه و طول و الجداء السلمي متجانس بالنسبة للأطوال كانت أكبر قيمة لهذه التأثير هي طول الشعاع لذلك كان الجداء السلمي لشعاعين أقل من جداء طولهما أي أقل من جداء تأثيرهما الأعظمي.

من الناحية الرياضية براهين هذه المتراجحة متعددة منها ما في الصورة:

$$\forall t > 0 \,, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E$$

$$||\vec{u} - t\vec{v}||^2 = < \vec{u} - t\vec{v}, \vec{u} - t\vec{v} > = ||\vec{u}||^2 - 2t < \vec{u}, \vec{v} > + t^2 ||\vec{v}||^2 \geq 0$$

$$\Longrightarrow \Delta = (-2 < \vec{u}, \vec{v} >)^2 - 4||\vec{u}||^2 ||\vec{v}||^2 \leq 0$$

$$\Longrightarrow 4(< \vec{u}, \vec{v} >)^2 \leq 4||\vec{u}||^2 ||\vec{v}||^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{| < \vec{u}, \vec{v} > | \leq ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}||}$$



تكميم تغيير الإتجاه : من الزاوية إلى الجداء السلمي

في مجموعة الأعداد الحقيقية تغيير الإتجاه يمر عبر تغيير الإشارة إذ الأعداد إما موجبة أو سالبة لكن متى ذهبنا للمستوى ظهر لنا مفهوم الإستدارة ومنه مفهوم الزاوية التي نحاول ربطها بنصفي مستقيم يتشاركان في نقطة البداية.

الإنتقال من نصف مستقيم للآخر يتم عمليا بالدوران بقوس لذلك الفكرة الأولى التي تخطر على بالنا هو تكميم الزاوية عن طريق حساب طول قوسها.

لكن المشكل الذي يطرح أن الإتجاه مفهوم شعاعي فربطه بنصفي مستقيم وبطول قوس يدخل مفاهيم قوية تتعدى الإتجاه وتغيير الإتجاه

أما تعريف الزاوية بنصفي مستقيم يمكننا التخلص منه عن طريق تعويضهما بشعاعين أو ما يسمى الزاوية الموجهة.

لكن المشكل المطروح كيف نكمم ذلك دون اللجوء للقوس ؟

لو تأملنا في طول القوس لوجدناه مفهوما متعلق بالفضاء الإقليدي فطول القوس ما هو إلا نهاية لتقريب القوس بقطع مستقيمة صغيرة والتي لحساب طولها نستعمل علاقة فيثاغورث.

فطول القوس ما هو إلا تطبيق لا نهائي لعلاقة فيثاغورث وعلاقة فيثاغورث نفسها تعود لمفهوم المثلث القائم.

لكن كيف يمكننا الكلام عن مثلث قائم وهو يحتاج لزاوية قائمة ونحن نبحث عن مفهوم لقيس الزاوية ؟

للتخلص من ذلك يمكننا النظر لعلاقة فيثاغورث من ناحية أخرى فطول الوتر ما هو إلا طول شعاع يساوي جمع شعاعين في الضلعين المقابلين أي $U = V + K$ وهذا يقودنا للجداء السلمي إذ

$$\|U\|^2 = \|V\|^2 + 2VK + \|K\|^2$$

وبما أن K و V متعامدين نجد: $\|U\|^2 = \|V\|^2 + \|K\|^2$

فيمكننا إعطاء مفهوم للتعامد عبر الجداء السلمي إذ الجداء السلمي ما هو إلا تأثير شعاع في شعاع فناسب أن نعرف التعامد بإنعدام التأثير.

وعلى هذا يمكننا التخلص من مفهوم الزاوية في فضاء شعاعي عبر الجداء السلمي ونكمم تغير الإتجاه بين شعاعين بقسمة الجداء السلمي على جداء طوليهما.

لذاك لا نستعين في بناء الفضاء الهلبرتي بمفهوم الزاوية رغم أنه تعميم للفضاء الإقليدي لكن تزويد الأشعة بجداء سلمي كاف لتعريف قيس الزوايا ومبرهنة فيثاغورث.



بين نظيم الدالة ونظيم شعاع

إن كان نظيم شعاع في فضاء إقليدي يمثل طول الشعاع عبر القطعة المستقيمة الحاملة له في الفضاء التآلفي فالأمر قد يبدو لأول وهلة مختلفا بالنسبة لنظيم دالة في الفضاءات النظيمية المعتادة للدوال.

لكن الأمر على غير ذلك فالطبولوجيا مبنية على المقارنة فلا يمكن أن نتكلم عن نهاية إن لم نقارن مجموعة بمجموعة أو نقاط بطبولوجيا سواء بالإحتواء أو عبر المسافة فمفهوم الإقتراب نعبر عنه عن طريق هذه المقارنات.

لكن مشكلة المقارنة بالمسافة أنها مبنية على الأعداد فإذا أردنا مقارنة دوال في فضاء دوال فلابد أن نعطي لهذه الدوال قيم عددية احادية أي كل دالة نميزها بعدد حتى نستطيع مقارنتها بأخرى.

وهنا يأتي النظيم فهو يلعب دورين دور المسافة ودور التجانس أي: $\|land\ x\| = |land|\ \|x\|$

الآن لابد ان نعطي معنى للقيمة العددية للدالة أو بتعبير آخر نكمم الدالة لكن ليس أي تكميم إذ النظيم مسافة بين الشعاع والصفر.

فلابد من مقارنة الدالة عدديا بالصفر وهنا يمكننا تصور تكميم للدالة عبر مفاهيم متعددة منها أكبر قيمة لصورها فهذا تكميم عبر الحد الأعلى يمكن مقارنته بالصفر.

أو يمكننا حساب قيمة وسطية لصورها عبر التكامل مثلا وهذا يمثل مجموع كثافتها أو تكميم لتوزيع صورها عبر سوابقها.

يمكن ان نتصور مفاهيم متعددة لقيمة الدالة كلها تعبر عن بعد صور الدالة عن الصفر.

إذن نظيم الدالة هو تكميم عددي يعبر عن بعد صورها عن الصفر نحاول التعبير عنه بعدد واحد.

مثال ذلك متوسط بعد صور الدالة عن الصفر جداء قياس مجموعات السوابق عبر تكامل لوبيغ أو الحد الاعلى للقيمة المطلقة للصور.

فكل هذه القيم تعطي معنى لبعد الدالة عن الصفر.

ولو تأملنا الشعاع في الفضاء الإقليدي عبر الفضاء التآلفي فسنجد أن طول شعاع هو المسافة بين نقطة المبدأ أي الصفر وآخر الشعاع أو بمعنى أصح آخر نقطة من القطعة المستقيمة الحاملة له فالمفهوم واحد.



كثيرات الحدود المتعامدة ؟ هل هي واقع معاش أو جنون رياضياتي ؟

قبل الحديث عن كثيرات الحدود المتعامدة في فضاء هلبرتي لابد لنا أن نعود لمعنى التعامد نفسه.

عندما نتكلم عن التعامد يذهب ذهن القارئ إلى الزاوية القائمة أو المستقيم المتقاطع مع آخر في زاوية قائمة.

هذه الرؤية الهندسية ناتجة عن مشاهدتنا الحسية للتعامد في الواقع فالهندسة الإقليدية مستوحاة من الواقع والواقع مليئة بهذه الزوايا القائمة وغير القائمة التي نراها خاصة في أثر أشعة الشمس على الأرض مما ينتج عنه الظل.

لكن الرياضيات علم تجريد فهي لا تكتفي بالنظر للخصائص في الواقع بل تمحصها وتجردها ثم تأخذ أبسط ما فيها كفكرة فتعممه على الباقي.

فما هي الزاوية ؟ الزاوية كائن ينتج من تداخل بعدين لذلك نمثلها هندسيا بنصفي مستقيم فبعد واحد لا يكفي لإظهار هذه الزوايا.

وتداخل البعدين نراه خاصة في أشعة الشمس التي تسقط على الأرض فتظهر الظل.

فالظل ظاهرة طبيعية لتداخل بعدين فالأرض محليا كأنها مسطحة والشمس تضيف عليها بعدا بأشعتها.

لكن أمر مهم ملاحظ أنه إذا كانت أشعة الشمس عمودية على الأرض كما يحدث عند الزوال في دائرة الإستواء فإن ظل الأشياء يختفي.

أي أن بعد الشمس لا يؤثر أو لا يترك أثرا على الأرض وهذا هو التعامد أو ما جردناه رياضيا بالإسقاط.

فإذا جردنا كل هذا وعدنا للهندسة الإقليدية فما نسميه تداخل بعدين هو تأثير بعد في بعد والتأثير نراه بالإسقاط فأثر شعاع في بعد على شعاع في بعد آخر هو إسقاط هذا الشعاع على حامل الآخر فإذا كانت الزاوية قائمة فالإسقاط معدوم.

نترجم هذا رياضيا بالجداء السلمي فالجداء السلمي مجرد آلية حسابية تمكننا من تكميم هذه الفكرة أن الأبعاد تؤثر في بعضها أو بتعبير أدق الأشعة بين الأبعاد تؤثر في بعضها والأشعة كما ذكرنا سابقا هي تنوع في التكميم.

هذه الفكرة في التأثير لها تطبيقات في الواقع منها ما نسميه في الفيزياء بعمل قوة تنتقل في مسافة موجهة.

بديهيا نحن نعلم أنه إذا كانت القوة في إتجاه المسافة موازية لها فستكون بأحسن حالة انتاج وإن كانت مائلة بالنسبة للمسافة فتأثيرها ينقص أما إن كانت عمودية على المسافة فعملها معدوم فلا يمكن نقل جسم بقوة عمودة في الإتجاه الآخر إذ لابد أن تكون القوة مائلة ليتحرك الجسم.

فهذا تطبيق واقعي للجداء السلمي فالجداء السلمي يمكننا من قياس تأثير الأبعاد في بعضها وعندما ينعدم التأثير فذلك يعني أن البعد لا يؤثر في الآخر وهنا تظهر لنا آلية رائعة لفصل الأبعاد عن بعضها.

إن الإنسان كما نعلم يتعامل مع القيم الكمية منفصلة واحدة بواحدة فإذا كان أمامه أبعاد متعددة فإنه سيحاول التكميم بقيم منفصلة قيمة لكل بعد لأن هذا يمكنه من دراسة كل بعد لوحده.



لذلك إخترعت الرياضيات ما يسمى بقاعدة الفضاء المتعامدة وهي مجموعة أشعة متعامدة منفصلة عن بعضها البعض فإذا أردنا دراسة شعاع في أبعاد متعددة يكفي إسقاطه على كل بعد فهذا يعطينا تكميما له متعدد الأبعاد.

تصور أنه يطلب منا دراسة خليط من الحليب بالقهوة والسكر فإن أول ما يخطر ببالنا هو قياس نسبة كل منها في الكأس فهذا بالفعل ما نقوم به مع الأشعة.

ولقياس تأثير كل شعاع على بعد معين يكفي إسقاطه عليه ولإسقاطه يكفي استعمال الجداء السلمي.

فما كان في البداية مجرد فكرة بسيطة وهي تأثير بعد على بعد أصبح آلية حساب تكمم لنا الظواهر.

ومن هذا يمكننا تعميم هذا المبدأ على جميع الظواهر فمتى ظهرت لنا ظاهرة معقدة حاولنا تفكيكها على شكل تداخل ظواهر بسيطة ولهذا يكفي أن نصنع فضاء شعاعيا من الظواهر أي أشعة ظواهر فلا ننسى أن الأشعة مجرد تنوع كميات فتصبح الظاهرة البسيطة مجرد نوع من الظواهر له قيمة عددية حسب خاصية نحددها.

وتصبح الظاهرة المعقدة مركبة من مجموع خطي لكميات من هذه الظواهر البسيطة.

ولكي يتم فصل كل ظاهرة على حدى يكفي أن نختار هذه الظواهر البسيطة التي تشكل أساس فضائنا الشعاعي بحيث لا تؤثر على بعضها مثنى مثنى أو بتعبير آخر تكون منفصلة أي بحساباتنا الرياضياتية جداؤها السلمي معدوم.

فهذه الطريقة المبتكرة عامة جدا تصلح في الهندسة الإقليدية بواسطة أشعة متعامدة وتصلح كذلك في الموجات في الكون فما يحدث هو تداخل موجات مع بعضها.

لكن إن كان هذا المبدأ بسيطا فالتطبيق يحتاج وضع معاني لهذه المفاهيم فإن كان في الهندسة الإقليدية الشعاع مجرد طويلة وإتجاه والجداء السلمي مجرد ضرب طويلتي شعاع في تجب الزاوية التي بينهما ففي الظواهر الأكثر تعقيدا الأمر مختلف، فكيف نكمم تأثر شعاع في شعاع عندما يكون الشعاعة دالة ؟

بل كيف يمكننا تكميم دالة ؟

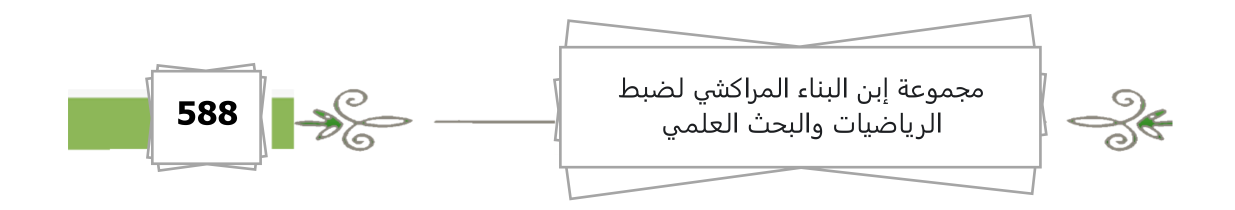
الذي يظهر بادىء الرأي أنه يمكننا إعطاء طويلة للدالة بحدها الأعلى بقيمتها المطلقة أو ما نسميه $\sup(|f(x)|)$

لكن هذا حساب لا يعبر عن واقع التكميم إذ لم يأخذ بعين الإعتبار جميع قيم الدالة واكتفى بأكبر قينة منها.

فإذا فكرنا قليلا تظهر لنا فكرة جمع جميع قيم الدالة بطريقة تشبه ما نفعله مع الفضاء الشعاعي الإقليدي ففي فضاء شعاعي نحن نحسب $\|(x,y,z)\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

هكذا نأخذ بعين الإعتبار جميع القيم.

لكن المشكلة أن الدالة لها عدد غير منته من القيم فكيف نصنع ؟



وهنا تظهر لنا آلية نستعملها في الواقع فعند حساب كمية القمح التي نجنيها من زراعة حقل فنحن نزنها ولا نعد حباتها حبة حبة.

مثل هذا نحسن صنعه رياضياتيا بما نسميه القياس فنحن نستطيع وزن الدالة عن طريق تكامل لوبيغ فالدالة مجرد توزيع صور على سوابق فيكفي وزن هذه القيم بالنسبة للسوابق عن طريق التكامل لأن التكامل يأخذ بعين الإعتبار قياس الصور أي وزنهم وقياس السوابق فهو تكميم لكمية الصور بالنسبة لتوزيعها على سوابقها.

فإذا انتهينا من إعطاء مفهوم لكمية دالة بقي لنا إعطاء مفهوم لتأثير دالة في دالة أو ما نسميه بالجداء السلمي وهذا نحسنه كذلك إذ نعلم أن تأثير دالة في نفسها هو أقوي تأثير فلابد أن يعطي وزن مربعها وهذا نحسنه بحساب تكامل جداء الدالة في نفسها أي $f(x)^2$ وبصفة عامة يمكننا حساب تأثير دالة في دالة بحساب تكامل الجداء $f(x) . g(x)$

فهذا تعميم لما كنا نفعله مع الأشعة في الهندسة الإقليدية وهو يمثل جداء سلميا يعطينا تأثير دالة في دالة.

وما دام لدينا الآن آلية لدراسة تأثير دالة في دالة بقي أن نجد أساسا لفضائنا يساعدنا في دراسة الدوال عن طريق تقسيم تأثيرها على كل شعاع من الأساس على أن يكون الأساس متعامدا وذو أشعة بسيطة كما ذكرنا سابقا.

وأبسط ما نعرفه من الدوال هي كثيرات الحدود وأبسط ما نعرف من كثيرات الحدود ، أحاديات الحد لذلك سنفكر في

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

لكن لابد أن نختار كثيرات الحدود هذه بشكل تكون فيه متعامدة مثنى مثنى فإذا أخذناها على المجال

$]-1,1[$

يمكننا إختار كثير الحدود الموالي بحيث يكون متعامدا مع ما سبق أي متعامد مع 1 ومع x فسنجد بالحسابات $P_2(x) = (3x^2-1)/2$ ونواصل البناء بطريقة تراجعية كل كثير حدود جديد يزداد درجة ويكون متعامدا مع من سبقه.

فسنصنع ما يسمى بكثيرات حدود لوجندر.

وهي كثيرات حدود متعامدة فيما بينها أي لا تؤثر في بعضها بالجداء السلمي أو بتعبير أدق تأثيرها على بعضها معدوم من حيث الوزن بالقياس.

يمكننا الآن كتابة أي دالة من فضائنا بمجموع خطي من كثيرات الحدود هذه لكنه مجموع غير منته أو بتعبير آخر منحنى دالة هو تداخل منحنيات كثيرات الحدود هذه.

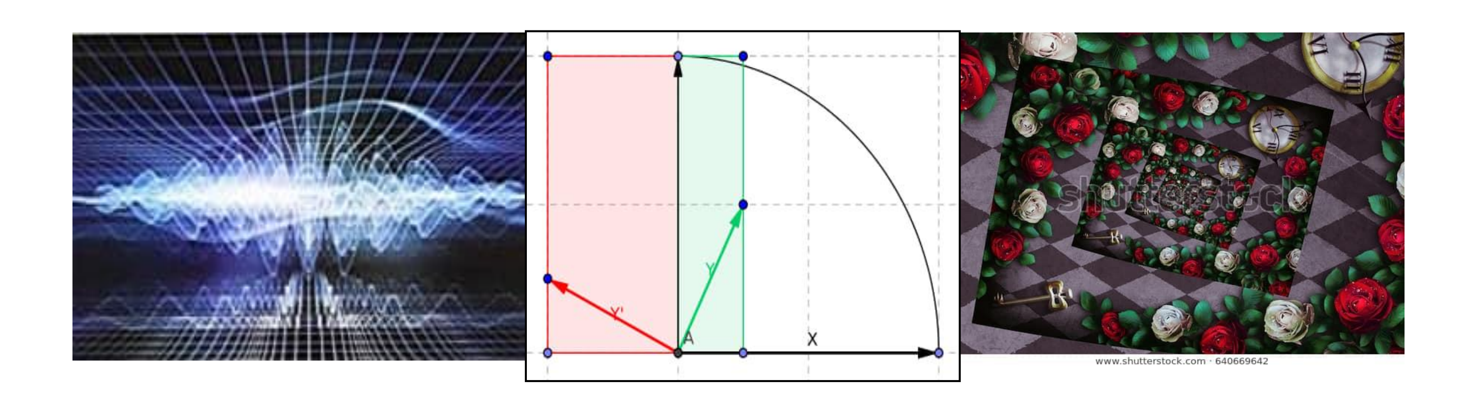
ومثل هذا التداخل نعرف منه انواعا كثيرة فقد لاحظناه سابقا في النشر المحدود لدالة إلا أن وحيدات الحد في النشر غير متعامدة.



من طريقة صناعتنا لهذه العائلة من كثيرات الحدود المتعامدة ندرك أنها غير وحيدة وأنه يمكننا صناعة عائلات متعددة.

وكذلك ندرك أنه يمكننا إستبدال كثيرات الحدود بأشعة أخرى كالدوال الجيبية مثلا أو ما نسميه بسلاسل فورييه.

الفكرة تبقي نفسها تفكيك الظواهر المعقدة إلى ظواهر بسيطة منفصلة عن بعضها البعض سلميا من حيث التأثير وذلك بغرض تكميم الظاهرة المعقدة وتفسيرها بواسطة ظواهر بسيطة نحسن التحكم فيها.



Legendre Polynomials

n = 0
n = 1
n = 2
n = 3
n = 4
n = 5

$P_n(x)$

x

ماذا تخبرنا مبرهنة التمثيل لريس فريشي ؟

مبرهنة ريس فريشي تنص على أن أي تطبيق خطي مستمر من فضاء هلبرتي نحو R هو عبارة عن جداء سلمي في شعاع معين ووحيد أي يوجد a وحيد من الفضاء الباناخي بحيث $f(x) = \langle a,x \rangle$

نحن نعلم أن كل تطبيق خطي f من فضاء E منته البعد نحو آخر يحقق المساواة

$$Dim(Kerf(f)) + Dim(Img(f)) = Dim(E)$$

أي بعد نواته زائد بعد صورته يعطينا بعد فضاء الانطلاق.

كحالة خاصة إذا كان التطبيق غير معدوم وصورته في R سيصبح لدينا $Dim(Img(f)) = 1$

ومنه $Dim(Kerf(f)) + 1 = Dim(E)$ أي $Dim(Kerf(f)) = Dim(E) - 1$

أي أن التطبيق الخطي ينعدم على الفضاء ماعدا بعد واحد.

ولو أضفنا شرط كون هذا الفضاء إقليدي فيمكننا صناعة قاعدة متعامدة على نواة f وإتمامها بشعاع لتصبح أساسا للفضاء E .

فتطبيقنا الخطي سينعدم عند جميع هذه الأشعة ما عدا الشعاع الأخير الذي أضفناه.

وهذا بالضبط نسميه الإسقاط فما فعلناه هنا هو إسقاط الأشعة على الفضاء المولد بالشعاع الأخير.

فتطبيقنا الخطي يمكن أن يعرف بواسطة الجداء السلمي بالإسقاط على شعاع في بعد واحد.

وهذا يمكن ملاحظته في الهندسة إذا كان عندنا تطبيق خطي من R^n نحو R فيمكننا رؤية R كجزء من R^n ومنه تطبيقاتنا الخطية تحاكي المستقيمات في الفضاء التآلفي المولد بـR^n .

لكن إذا كان فضاء إنطلاق f ليس منته البعد لا يمكننا القيام بالحسابات السابقة ورغم ذلك سنتساءل هل النتيجة السابقة عامة أو خاصة بالأبعاد المنتهية ؟

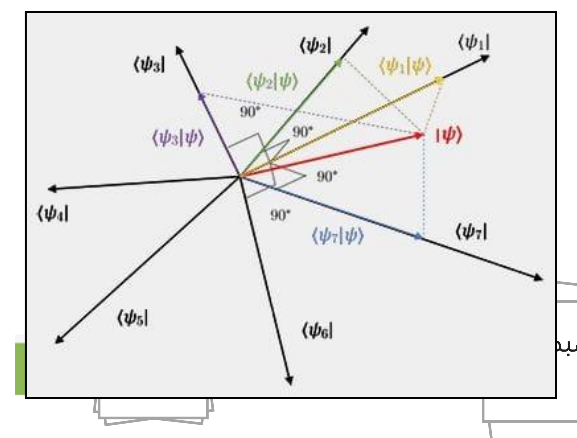
مبرهنة ريس فريشي تعمم هذه النتيجة فتقول النتيجة تبقى صحيحة ما دمنا في فضاءات هلبرتية أي باناخية والتطبيق مستمر.

لماذا نشترط تمام الفضاء واستمرار التطبيق الخطي ؟

نشترط ذلك حتى تكون النواة مغلقة لأن $Kerf(f) = f^{-1}(\{0\})$ فهي صورة عكسية بتطبيق مستمر لمجموعة مغلقة فهي مغلقة ومنه هي فضاء هلبرتي لأنه مغلق داخل فضاء هلبرتي فهذا كاف لأن نجد له أساسا بسلسة أشعة متعامدة ونتمها بشعاع في الفضاء الكلي ليصبح أساسا لكل الفضاء.

فنجد نفس النتيجة السابقة أن التطبيق الخطي هو إسقاط على الشعاع الأخير لأنه ينعدم على باقي أشعة الأساس والشعاع الأخير إذا جعلنا طويلته 1 فهو وحيد.

كنتيجة لهذا أن فضاء التطبيقات الخطية المستمرة من E نحو R يماثل عناصر E وهذا يخول لنا تمديد خصائص طبولوجية من E نحو هذا الفضاء.



المشاغب: ما هو الجبر الباناخي ؟

الجبر الباناخي هو محاولة تعميم للفضاء النظيمي ليشابه الفضاء النظيمي الحقيقي أو المركب بإضافة عملية الضرب والمتراجحة الثنائية للنظيم بها.

ففي R و C نلاحظ وجود عملية الضرب مع قواعد الحلقة فيهما و علاقتها بالنظيم أي

$\|x.y\| \leq \|x\|.\|y\|$

فالفكرة نفسها وهي أخذ فضاء نظيمي نعرف عليه عملية ضرب تجميعية وتوزيعية على الجمع.

مع كون الفضاء تام أي بناخي

ونضيف الشرط الثالث :

$\|x.y\| \leq \|x\|.\|y\|$

فهذا يسمى جبر بناخي وإذا كانت عملية الضرب تبديلية نقول جبر باناخي تبديلي وإذا كانت لعملية الضرب عنصر وحدة أي الواحد موجود في الفضاء فنقول واحدي.

هناك من ينطلق ليعرف جبر باناخي من مفهوم K جبر و هو فضاء شعاعي على حقل K مزود بعملية الضرب.

فيضيف النظيم وكونه تاما أي بناخيا ثم المتراجحة السابقة.

إذن كتلخيص، الجبر الباناخي هو:

فضاء نظيمي تام مزود بعملية ضرب تجميعية وتوزيعية مع المتراجحة النظيمية لعملية الضرب

$\|x.y\| \leq \|x\|.\|y\|$

إذا كانت عملية الضرب تبديلية نقول تبديلي وإذا قبلت العنصر الحيادي الواحد نقول واحدي.

من الأمثلة على الجبر الباناخي :

فضاء الأعداد الحقيقية بنظيم القيمة المطلقة

فضاء الأعداد المركبة بنظيم الطويلة

فضاء الدوال الحقيقية المستمرة على المجال المغلق بين الصفر والواحد و المزود بنظيم المالانهاية.



نظرات في تحويل فورييه، تحويل لابلاس، والتوزيعات...

قد تبدو هذه التحويلات متشابهة لأن جميعها يستعمل التكامل مع دوال تجربة ونسمي دالة التجربة (fonction de test) ما نستعمله أمام الدالة عند التكامل بضربها فيه: $e^{(-p\,t)}$,$e^{(-i\,\epsilon\,X)}$...

لكن هناك اختلافات جوهرية بينها سنحاول رؤيتها هنا.

قبل النظر للمفهوم الرياضي لهذه الآليات لنحاول النظر إليها في الواقع.

الظواهر في الواقع وإن كنا نتمكن من التعبير عليها بدوال فهي في الأصل خليط من تأثير عدة دوال فيمكن رؤية كل ما في الكون ككائنات متحركة وكل كائن كدالة متعلقة بالزمن.

فالتيار الكهربائي نعبر عليه بدالة وهو نفسه مكون من إلكترونات التي هي نفسها موجات والموجات دوال متعلقة بالزمن.

فإن كنا في الماضي ننظر للمادة كشيء جامد مكون من ذرات وإلكترونات وجزيئات عموما فاليوم نحن ننظر إليها كشيء متحرك مكون من جزيئات والتي نفسها تعتبر موجات حسب فيزياء الكم.

فإذا نظرنا للظواهر كتداخل موجات لأنها في الأصل نتيجة لموجات جزيئات فيمكننا دراسة هذه الظواهر عن طريق دراسة مركباتها الأولية.

من أجل تحقيق ذلك لابد أن نكتب الدالة على شكل تداخل خطي لدوال من أساس دوال أولية.

هذا ما نسميه في الرياضيات بفضاءات هلبرت والدوال الأولية هي القاعدة المتعامدة فيه.

كتابة دالة بهذا الشكل تحتاج دراسة لها في الواقع، لكن لدراسة دالة في الواقع نحتاج استعمال دالة أخرى لقياسها، فعندما تقيس التيار الكهربائي مثلا فأنت تستعمل جهازا يصنع مجالا كهرومغناطيسيا فهو في حد ذاته دالة وليس فقط دالة بل دالة مؤثرة في تيارك.

أي بصيغة أخرى لا يمكن فصل المراقبة عن التجربة وهذا ما نعبر عليه رياضيا بالتوزيعات.

فالتوزيعة ما هي إلا مراقبة دالة بدالة.

لكن أين تحويل لابلاس من هاتين النظرتين ؟ هو في الحقيقة بينهما فإذا كنا نستطيع النظر لدالة ككتابة خطية في قاعدة دوال وكنا نرى كل عامل خطي من عوامل الكتابة كمراقبة للدالة في ذلك البعد فيمكننا رؤية الدوال الأساسية كمتغيرات تعطينا العامل الخطي المراقب...

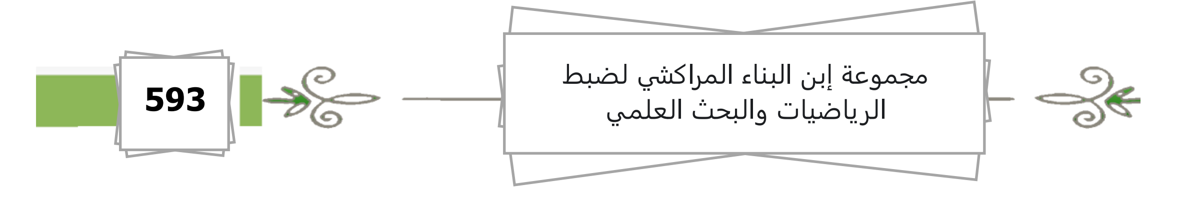
وسنعيد التوضيح ليتضح الأمر:

عندنا دالة نكتبها كمجموع خطي بعوامل في قاعدة دوال أولية:

التطبيق الذي يأخذ الدالة نحو العامل الخطي هو تحويل فورييه للدالة متغيره بمتغير الدالة

التطبيق الذي يحول كل دالة لعامل خطي هو توزيعة متغيرها الدالة

التطبيق الذي يحول دالة لمعامل خطي باختيار دالة أولية من قاعدة هو تحويل لابلاس متغيره هي الدالة الأولية للقاعدة...



فهذه التحويلات كلها تنظر لنفس الشيء لكن من نواحي مختلفة.

من الناحية الرياضية:

التكامل في تحويل فورييه هو اسقاط للدالة على بعد معين أي كتابة الدالة بواسطة تأثيراتها على الأبعاد فالدالة ينظر إليها كتركيب خطي لدوال جيبية تمثل قاعدة للفضاء.

أما تحويل لابلاس فهو مؤثر خطي أي ينقل دالة من صفة لأخرى بمتغير الدالة الأولية للقاعدة $e^{(-p\,t)}$ لذلك المتغير يتحول من t ل p و p هو الذي يعبر على الدالة الأولية $e^{(-p\,t)}$ فهو اسقاط في بعد $e^{(-p\,t)}$ البعد هنا متغير بتغير p .

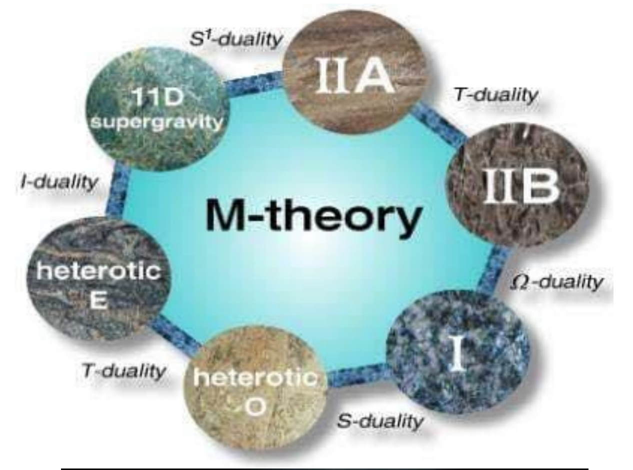
ويمكن أن نرى تحويل لابلاس كتوزيعة متغيرة بدالة التجربة أي نغير الدالة التي نجرب بها على الدالة الأصلية.

هذه المفاهيم كغيرها عندما ظهرت كانت مختلفة لأن كل مكتشف لمفهوم ينظر إليه من زاويته لكن مع حلول القرن العشرين وإعادة بناء الرياضيات على أسس متينة وظهور نظرية القياس والمكاملة للوبيغ جمعت هذه المفاهيم تحت نظرة موحدة فنحن ندرس نفس الظاهرة لكن كل دارس يدرسها من زاوية.

كفائدة هذا ما حدث كذلك مع نظرية الحبال فعند ظهورها كانت هناك 5 نظريات في 11 بعد لكن بعد العمل عليها تبين أنها كلها نظرية واحدة سميت بـThéorie M تعمل في 12 بعدا فكل نظرية كانت تنظر للكون من جهة معينة.

وهذا كثير في النظريات فالذي يؤمن به الفيزيائيون هو أن كل الظواهر الكونية تعود لنظرية واحدة تفسر كل شيء.

او بعبارة أخرى عندنا كمسلمين أن للكون خالق واحد....



$$\mathrm{F}(p)=\mathcal{L}\{f\}(p)=\int_{0^-}^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\mathcal{F}(f):\xi\mapsto\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

$$I_f(\varphi)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$





يا أستاذ حدثني عن المنوعات التفاضلية

الإنسان لمدة طويلة كان يظن أن الأرض مسطحة، فهي لا تبدوا لنا عند رؤيتها محليا أنها محدبة، ولولا مراقبة البشر لما حولهم لما اكتشفوا كرويتها.

خاصية الانحناء الذي لا يكاد يرى عندما يكون الجسم كبيرا فيما يبدو لنا أو الانحناء صغيرا نلاحظها يوميا في كثير من الأمور بل البشر يذهب لأبعد من ذلك فهو يقيم ويطوي الأشياء كما يريد فمن منا الذي لم يلعب بخيط فجعله تارة كقطعة مستقيمة وتارة في شكل مستدير.

هذا يدفعنا لمحاولة ربط هذه الخصائص بالرياضيات، فإمكانية تشويه الأشياء في أشكال مختلفة دون تغيير طبيعتها يدفعنا للسؤال التالي:

هل رياضيا هناك علاقة بين تسطيح الأرض الكروية محليا لتقترب من المستوي ؟

أليس السير فوق دائرة كالسير فوق قطعة مستقيمة ؟ فلو كنت نملة على خط منحني هل ستلاحظ فعلا أنه منحني ؟

لننظر لذلك من الناحية الرياضية:

متى تكلمنا عن الأشكال الهندسية يظهر لنا مفهوم المسافة ومفهوم المسافة يخفي وراءه مفهوم الطبولوجيا فهل هناك علاقة طبولوجية بين الدائرة والقطعة المستقيمة إذا زودنا كلاهما بالمسافة الاعتيادية ؟

لأول وهلة الجواب لا، لأن الدائرة منحنى مغلق والقطعة المستقيمة مفتوح فلو تصورنا وجود تماثل طبولوجي بينهما فسنقف أمام معضلة إذ يكفي أن ننزع نقطة من الدائرة وصورتها من القطعة المستقيمة لنحصل على دائرة منزوعة نقطة مترابطة وقطعتين مستقيمتين غير مترابطتين فوجود تماثل مستمر مستحيل لأن الاستمرار يحافظ على الترابط.

وهذا نلمسه حدسيا فلو سرنا فوق دائرة باستمرار وسار آخر في المقابل فوق القطعة المستقيمة فإنه سيصل لحافتها فسيتوقف أما نحن فلن نتوقف عن الدوران.

هذا يخبرنا أن النملة التي تسير فوق القطعة المستقيمة ستدرك على الأقل أن لها حافتين بعكس مسيرها فوق الدائرة فلن تجد فيها حوافا.

وهذا يقودنا للقول أن النملة بسيرها لن تفرق بين قطعة مستقيمة وقوس فكلاهما عنده حافتين .

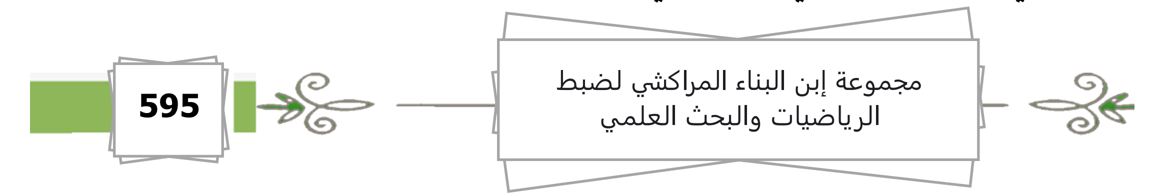
إذن يمكننا أن نقول أن الدائرة محليا تماثل طبولوجيا القطعة المستقيمة عن طريق الأقواس.

وهذا ما نراه فوق سطح الأرض فالكرة محليا تماثل طبولوجيا المستوي.

هذا يقودنا لمحاولة تقريب هذه الأشكال الهندسية محليا إلى الفضاءات الشعاعية من الشكل R^n

من أجل ذلك يكفي أن نجد عند كل نقطة من الشكل الذي نريد دراسته مفتوحا بحيث هناك تماثل طبولوجي بينه وبين مفتوح من R .

للتذكير التماثل الطبولوجي هو تطبيق تقابلي مستمر في الاتجاهين.



فإذا استطعنا تغطية شكلنا بمجموعة من المفتوحات بحيث كل مفتوح منها يوجد بينه وبين مفتوح من R^n تماثل سنصنع تغطية تقربهما محليا طبولوجيا.

هذا يذكرنا بالخرائط فهو بالفعل ما نقوم به عند رسمها فنحن نسقط الكرة الأرضية قطعة قطعة لتصبح في شكل مستوي.

لذلك نسمي في الرياضيات هذا النوع من الأشكال بالمنوعات الطبولوجية ونسمي n من R^n الذي يماثلها محليا ببعدها ونسمي تغطية المفتوحات مع تقابلاتها مع مفتوحات R^n بالأطلس وكل مفتوح من التغطية مع تماثله بالخريطة المحلية.

رغم أن ما قمنا به يجيب على تشابه سير النملة على قوس وسيرها على دائرة فهي لن ترى الفرق لكن هناك شيء ناقص، فلو غيرنا الدائرة بمربع فسنلاحظ أنهما مختلفان في الشكل رغم التماثل في الطبولوجيا ؟

المربع عنده مشاكل في رؤوسه الأربعة أما الدائرة فملساء عند كل نقطة فالتشابه الطبولوجي غير كاف هنا.

لكي نصنع دائرة من قطعة يكفي حَنْيُها لكن لصناعة مربع يجب كسره عند الرؤوس لنشكل زوايا، والكسر نعرفه فنحن نلاحظه عادة في نقطة زاوية عند رسم منحنى دالة، ينتج ذلك عن مشكل في الاشتقاق.

الجواب عن هذا التساؤل يدفعنا لمحاولة إدخال تماثل أقوى من التماثل الطبولوجي وذلك عن طريق التفاضل المشكل أنه إن كنا نستطيع التفاضل في R^n فنحن لا نستطيع القيام به على الأشكال الكيفية ؟

في الحقيقة هذا ليس بمشكل إذ يكفي أن نعود للأطلس السابق فهو كما قلنا معرف بخرائط محلية تغطي الشكل، كل منها مكون من تماثل من مفتوح في R^n نحو مفتوح من منوعتنا،

فإذا أخذنا مفتوحين متقاطعين Ui و Uj من R^n و تماثليهما φi و φj فإننا نلاحظ أن تركيب الأول مع التطبيق العكسي للثاني:

$$\varphi i \circ \varphi j^{-1}$$

يعطينا تطبيقا من R^n نحو R^n وهذا نحسن تفاضله لذلك إذا فرضنا أن كل هذه التطبيقات من صنف C^k حصلنا على تعريف أقوي نسميه بالمنوعة التفاضلية من بعد n و رتبة k .

هذا ما نسميه بالتشويه أو التشكيل فالدائرة محليا مثلا يمكننا تقريبها من مماسها فهذا تشويه قابل للمفاضلة.

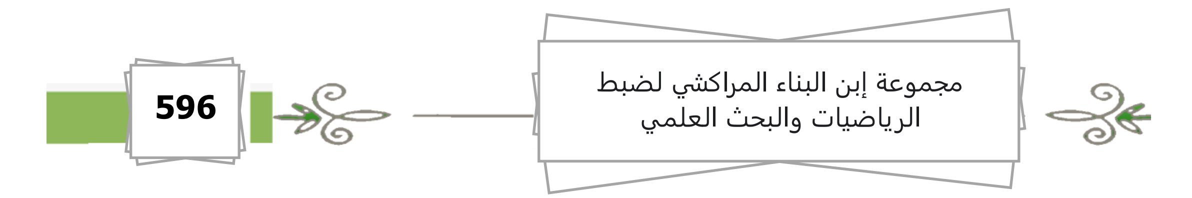
في الحقيقة هذا ما نقوم به في التقريب التآلفي فنحن نقرب المنحنى محليا من مستقيم.

فكل ما فعلناه هنا هو تعميم هذه الفكرة فنحن نقرب الأشكال محليا بمستقيمات ومستويات وغيرها.

الذي فعلناه أنه بعد تقريبنا للدوال والتطبيقات بتطبيقات تآلفية انطلقنا هنا لتقريب الفضاءات نفسها، أليس في هذا ازدواجية النظرة في المسائل ؟

بعد أن كنا نقرب التطبيق من تطبيق خطي بواسطة الطبولوجيا أصبحنا نقرب الفضاء الطبولوجي بفضاء تآلفي بواسطة التطبيقات...

هذه الطريقة تفتح لنا آفاقا جديدة فكل ما كنا نفعله في R^n يمكننا تمديده للمنوعة التفاضلية.



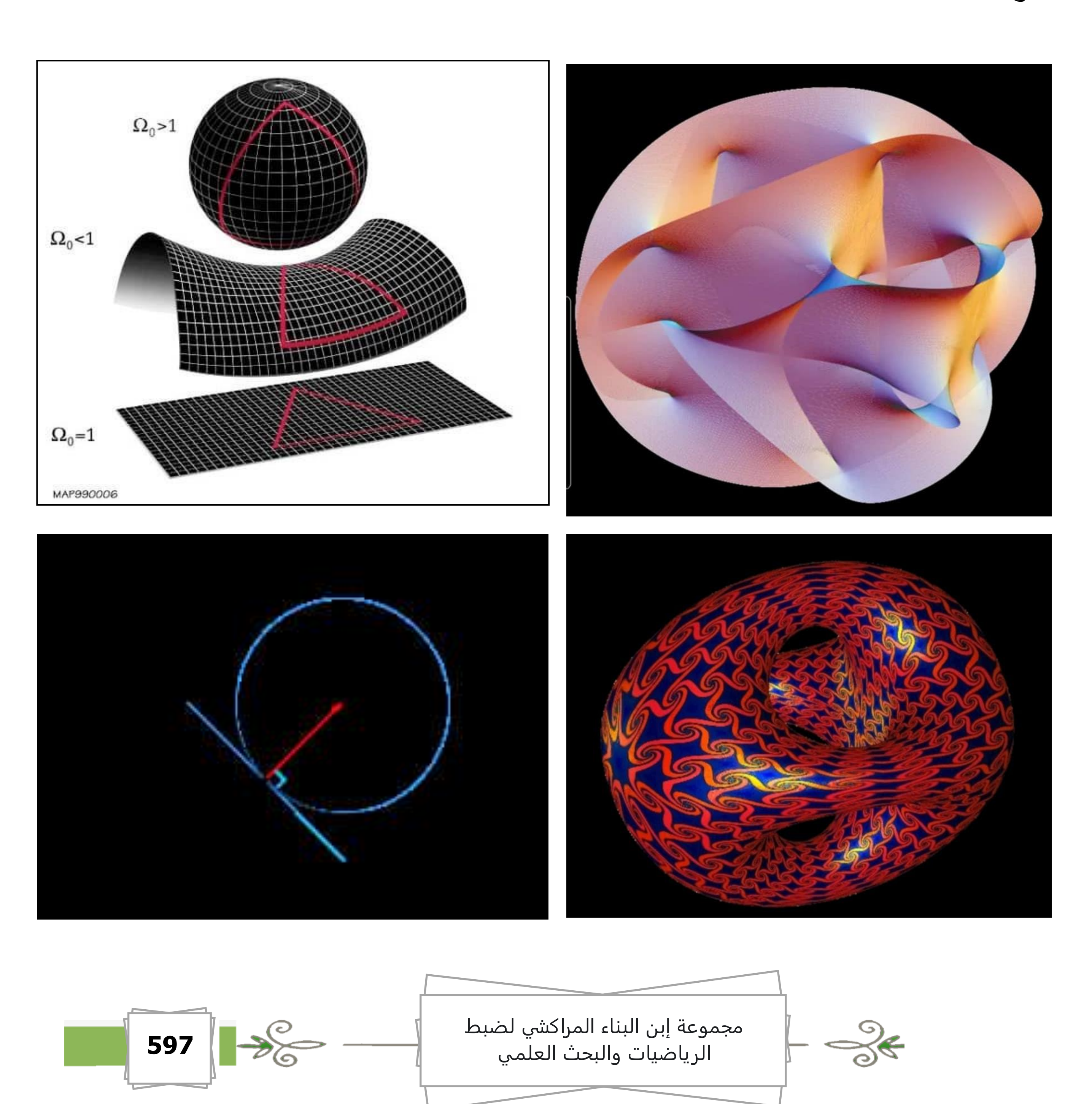
هل تريد أن تفاضل تطبيقا f على المنوعة التفاضلية ؟ الأمر بسيط أنظر له هكذا $\varphi i \circ f \circ \varphi j^{-1}$
ها قد أصبح تطبيقا من R^n نحو نفسها فيمكنك الكلام عن تفاضله.

تريد المكاملة ؟ اتبع نفس الطريقة.

تريد الكلام عن الزمر التفاضلية ؟ لا مشكلة عندك التفاضل فما بقي عليك إلا الإتيان بمنوعة تفاضلية ملساء وهي منوعة من رتبة مالانهاية وزودها ببنية زمرة بحيث تكون كل من العمليتين الجمع والنظير تحليليتان فهنا تصنع ما يسمى بزمر لي.

لكن ماذا عن واقعنا ؟ هل الكون يمثل منوعة تفاضلية ؟ هذا الذي يذهب إليه الفيزيائيون اليوم لكن ما شكلها ؟ ... هذا أمر صعب التحرير.

الأكيد أن المنوعات التفاضلية أعطتنا طرقا جديدة لدراسة الكون وذلك عن طريق تقريبه محليا من فضاءات مألوفة R^n .



من البنية الطبولوجية نحو البنية التفاضلية.

عندما راقب البشر الواقع اكتشف مفهومين:

المفهوم المتقطع والذي عبر عليه بالأعداد الطبيعية.

المفهوم المستمر والذي عبر عليه بالخطوط المستقيمة والدوائر والأشكال الهندسية عموما.

مع تقدم الحسابات استطاع البشر إستعمال عبارات جبرية لقياس الواقع والتي أخذت زينتها بوضع الخوارزمي طرق حل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية، فولد بذلك علم الجبر.

بجانب ذلك اكتشف البشر طرق أخرى لمراقبة الواقع والمتمثلة في استعمال الدوال الجيبية.

فكان من المعقول أن يحاول ربط الزوايا بجيوبها عبر جداول عددية.

وكذلك فعل عند اكتشافه للدالة اللوغارتمية.

هذه الجداول مثلها مثل الأعداد الطبيعية مفهومها متقطع.

لكن بجانب الأعداد الطبيعية ظهرت أعداد اخرى كالناطقة والجبرية ثم المتسامية والعقدية.

فكل هذه الأعداد ساهمت في مساعدة البشر في وصف الواقع.

ونجاح هذه الأعداد في وصف الواقع ناتج عن **أمرين** :

الأول كونها مبنية على مفهوم تكميم التكرار والكون فيما يظهر لنا مبني على تكرار جسيمات.

الثاني : الكتابة العشرية ، ذلك أن الجسيمات الموجودة في الكون تكرارها كبير لا يمكننا حصره لمشكلتين : ان العدد كبير جدا والبشر لا يستطيع قياس كل هذا العدد الهائل والمشكل الثاني أننا نستعمل المادة لقياس المادة لذلك نحتاج أضعاف المادة إذا أردنا قياسها وتدوين ذاك.

فاستمرار المادة فيما يبدو لنا ظاهرا ناتج عن عدم ادراكنا لكثرة جسيماتها وهذا ما قاد البشر للتقريبات بالكتابة العشرية وتغيير الجداول بدراسة دوال عن طريق ما نسميه الطبولوجيا والتفاضل.

فبدل وضع جداول للدوال المثلثية واللوغارتمية وضع البشر طريقة جديدة لحساب قيم تقريبية لها عند الحاجة.

هذه الطريقة تمر عبر النهايات والإشتقاق والتفاضل عموما وتقريب الدوال بعبارات جبرية.

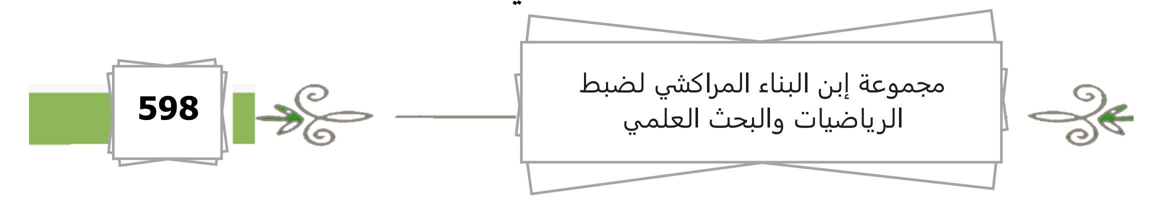
ذلك أن الكون مبني على التكرار والتكرار يعبر عليه بعمليات جبرية كالجمع والضرب.

فظهرت ما يسمى بالبنى الجبرية الطبولوجية.

كل هذه الرياضيات المبتكرة صنعت لنا ما نسميه بميكانيك نيوتن والذي نجح لقرون في التعبير عن الواقع إلى أن اصطدم البشر بظواهر كونية لا يستطيع تفسيرها بهذه المبتكرات الحسابية.

تفسير هذه الظواهر جاء عن طريق اختراع الهندسة التفاضلية فإن كان التفاضل يحاول تقريب الدالة بدوال خطية محليا أو ما نسميه التقريب التآلفي كحالة خاصة منه فيR ، فإن الهندسة التفاضلية تقرب البنية نفسها محليا من بنية جبرية خطية R^n .

فالبنية الجبرية الخطية غير موجودة دائما هندسيا كما هو الحال في هندسة إقليدس.



والهندسة الريمانية تبين ذلك فكان تقريب الهندسة من الهندسة الخطية طريقة للتعبير عنها.

يتم ذلك عبر التماثلات التفاضلية داخل ما نسميه بالمنوعات التفاضلية وبهذا ولدت ما يسمى بالهندسة التفاضلية فهي فرع يجمع بين البنية الهندسية والبنية التفاضلية.

هذه الطريقة الجديدة في تقريب البنية نفسها أعطت نتائجها عندما أدخلها أينشتاين في النظرية النسبية.

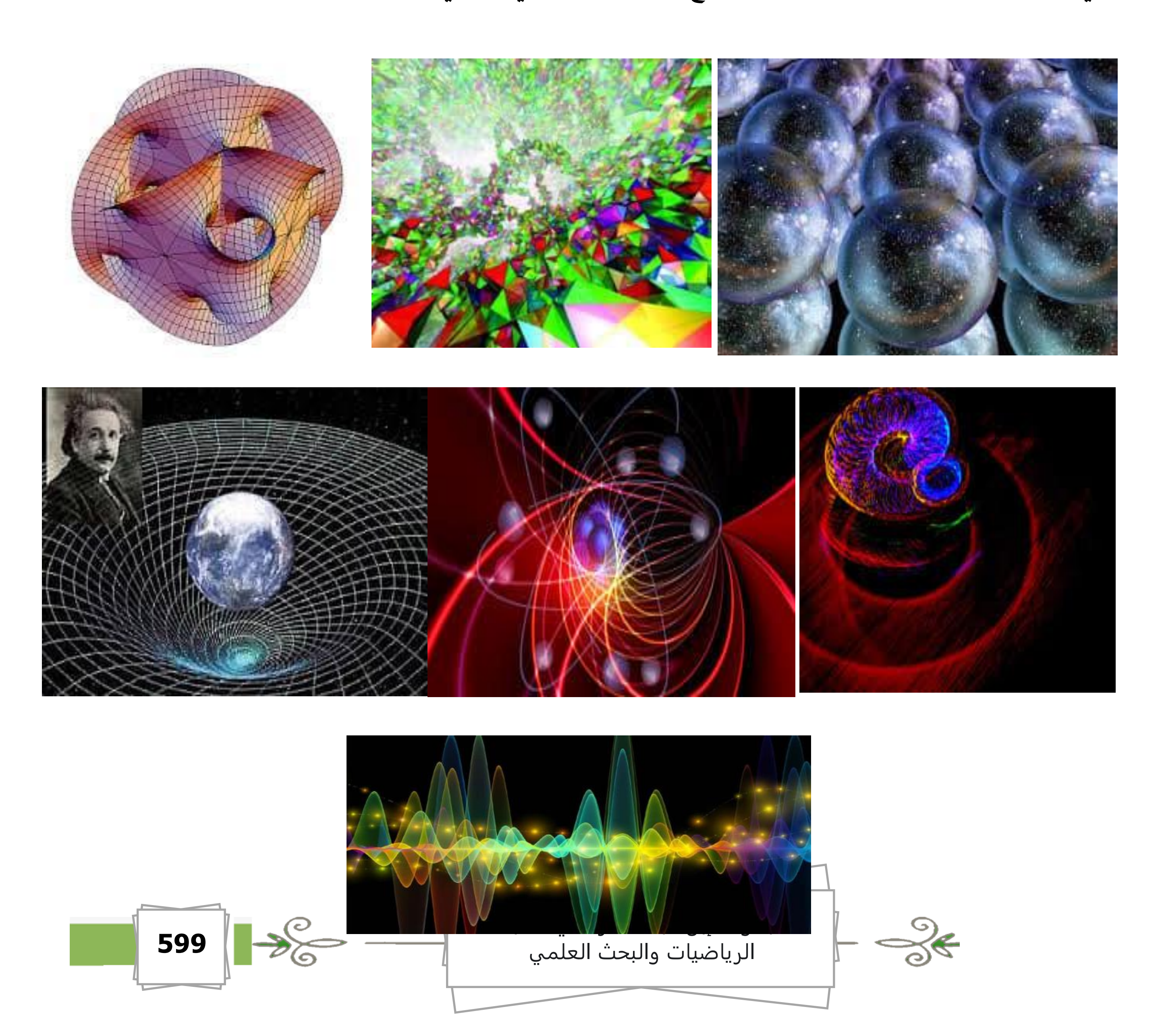
فلأول مرة أصبحت الظواهر الفيزيائية ليست نتيجة تكرار فقط بل هي نتيجة لتأثير هذا التكرار على الفضاء الزمكاني نفسه.

أما ميكانيك الكم فعنده نظرة أخرى للكون فهو يأخذ بعين الاعتبار الجانب غير المضبوط في الفيزياء، أو تأثير المراقب فيما يراقبه والذي عولج رياضيا بالاحتمالات داخل بنية طبولوجية جبرية تسمى الفضاء الهلبرتي.

يظهر جليا أننا بحضرة نوعين من الفيزياء مبنيان على نوعين من الرياضيات، فمحاولة التزاوج بينهما ليست بالأمر الهين وهذا الذي تحاول فعله النظريات الحديثة.

فمستقبل الفيزياء أصبح مرهونا بمستقبل الرياضيات أكثر من ذي قبل.

الرياضيات كانت ولا زالت آلة لمراقبة الواقع صنعت عن طريق تجريد خصائصه.



ما هي زمر لي ؟

لقد ذكرنا في مرات عدة أن الكون فيما يبدو لنا مكون من جسيمات مكررة ومترابطة.

وأن الرياضيات قامت بتكميم هذا التكرار عن طريق المجموعات العددية.

ثم وضعا طرق عديدة للإحاطة بهذا الكم الهائل من التكرار والترابط المعقد عن طريق التقريب بالنهايات والإستمرار والتفاضل والتكامل.

وحتى يتعلق التقريب بالتكرار كان لزاما وضع ما يسمى بمفهوم الزمرة الطبولوجية فإن كانت الزمرة العادية تعالج تركيب وتفكيك عناصرها بواسطة عملية داخلية وبالضبط عمليتين الجمع والقلب بالنظير فإن الزمرة الطبولوجية تضيف استمرار العمليتين بالنسبة لطبولوجيا تزود بها الزمرة.

مفهوم الزمرة الطبولوجية تطور ليعمم على البنى الجبرية حتى وصل للفضاءات الهلبرتية.

فهذه الفضاءات تخلط بين المفهومين الجبري و الطبولوجي.

ثم أضيف مفهوم التفاضل وهو تعميم لمفهوم الإشتقاق بتقريب الدوال من دوال خطية.

الخطية حاضرة بقوة في البنى الجبرية فكل شيء يتم دراسته حسب تقريبات منها إلا أن الكون الذي كان يبدو لنا أملسا ممكن التمثيل بـ R^3 تبين لنا أنه ليس بخطي وأكثر تعقيدا.

لكنه يبقى خطي محليا لذلك صنعنا ما يسمى بالمنوعات التفاضلية وهو تقريب محلي للمجموعات بـ R^n عن طريق تماثلات قابلة للتفاضل.

كان من البديهي ان الخطوة التالية تزويد هذه المجموعات

ببنى جبرية وأولها بنية زمرة ومن هنا نشأت زمر لي.

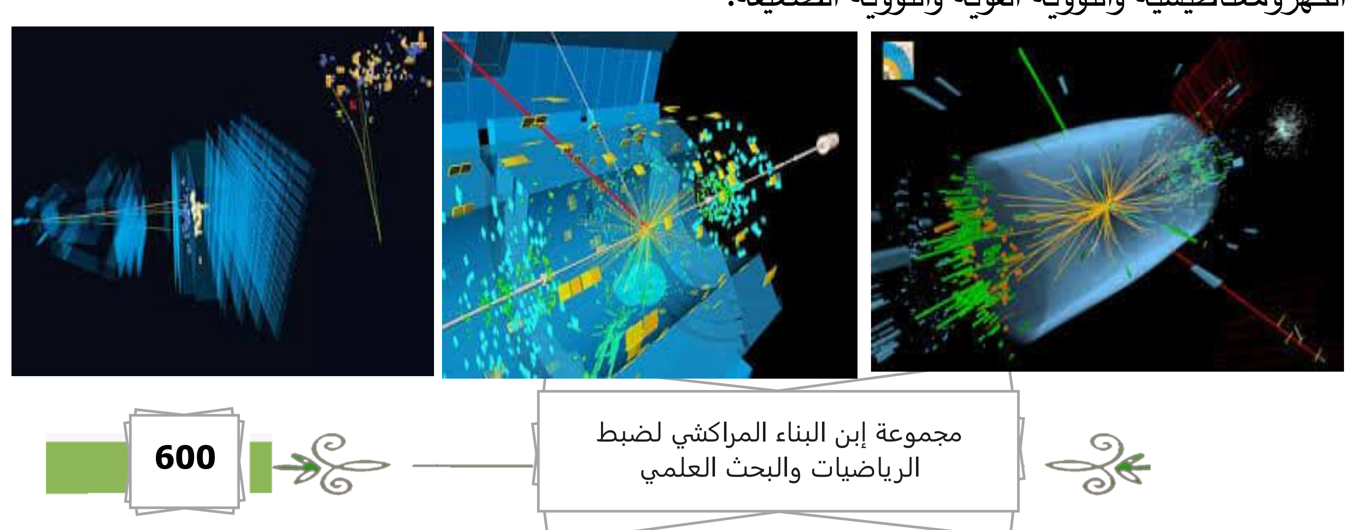
فزمر لي هي زمرة تجمع بين مفهومين:

بنية زمرة بعملية الجمع والقلب بالنظير

بنية منوعة تفاضلية ملساء

والعلاقة بينهما بأن تكون كلتا العمليتين الجمع والقلب أو التطبيقان الناتجان عنهما أملسان بالنسبة للمنوعة التفاضلية.

هذه الزمر لها استعمالات عديدة منها النموذج الاعتيادي الذي يشرح القوى الثلاثة في الكون : الكهرومغناطيسية والنووية القوية والنووية الضعيفة.



نظرية القياس والمكاملة

عبد الحكيم بن شعباتة

مدخل إلى القياس
برهان عدم قابلية مجموعة الأعداد الحقيقية للعد بإستعمال البرهان بالتراجع

مدخل

لو أخذنا ثلاث مجالات حقيقية بحيث $H \subset I \cup J$ ، $I = [a_I, b_I], J = [a_J, b_J], H = [a_H, b_H]$

فلدينا طول المجال H أصغر أو يساوى مجموع طولي المجال J ، I ، لنرمز لطول المجال ب σ

إذن لدينا $\sigma([a,b]) = \sigma(]a,b[) = b - a$

وبحساب بسيط نجد $H \subset I \cup J \implies \sigma(H) \leq \sigma(I) + \sigma(J)$

هذه الخاصية يمكن تعميمها بالتراجع إلى عدد كيفي من المجالات $H \subset \bigcup_{0 \leq i \leq n} I_i \implies \sigma(H) \leq \sum_{0 \leq i \leq n} \sigma(I_i)$

أي طول المجال أقل من مجموع أطوال المجالات التي تغطيه فكما ترون هذه بداية تعريف للقياس وهذا الذي قام به كنتور في برهانه الأول عن عدم قابلية العد لمجموعة الأعداد الحقيقية

البرهان

الفكرة هي أن نبرهن بالتراجع أن الأعداد الحقيقية إن كانت قابلة للعد فيمكن حصرها في مجالات مجموع أطوالها محدود وهذا تناقض

لنفرض أن المجال $[0,5]$ قابل للعد و منه نجد متتالية U_n بحيث $[0,5] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{U_n\}$

يمكننا وضع كل عنصر من المتتالية داخل مجال كيفي ، سنبرهن بالتراجع أنه يمكننا وضع جميع أفراد المتتالية في مجالات مجموع أطوالها أقل من أي عدد موجب تماما δ

لدينا من أجل $n = 0$ $\quad U_0 \in]U_0 - \frac{\delta}{4}, U_0 + \frac{\delta}{4}[$ الذي طوله هو $\delta > \frac{\delta}{2}$

من أجل $n + 1$

إذا فرضنا أن هناك مجالات $I_0, I_1, \ldots, I_n$ تغطي المتتالية من 0 إلى n بحيث $\forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n : U_i \in I_i$

ومجموع أطوالها أقل من δ أي $l = \sum_{0 \leq i \leq n} \sigma(I_i) < \delta$ فيكفي أن نختار المجال

$$U_{n+1} \in]U_{n+1} - \tfrac{\delta - l}{4}, U_{n+1} + \tfrac{\delta - l}{4}[$$

ومنه

$$\sum_{0 \leq i \leq n+1} \sigma(I_i) < \delta$$

يكفي أن نمر إلى النهاية لنجد

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma(I_n) \leq \delta$$

لكن نلاحظ أن $[0,5] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \implies \sigma([0,5]) = 5 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma(I_n) \leq \delta$

لكن هذا تناقض إذ هذه المتراجحة غير متحققة دائما مثل حالة $\delta = 1$ ومنه $\mathbb{R}$ غير قابلة للعد

البرهان مستوحي من برهان كنتور، الذي بعد نشره بسنوات دفع بورال إلى تعريف عشائره و مفهوم المجموعة ذات قياس معدوم، ثم عرف تلميذه لوبيغ القياس و تكامله

إذن في الحقيقية نظرية القياس ما هي إلا نتيجة لمحاولة كنتور لتكميم عدد عناصر مجموعة و التي أتمها بورال و لوبيغ،

فإن كنا غير قادرين على عد عناصر مجموعة فيمكن تعويض ذلك بوزن مجموعاتها ، في حالتنا هي قياس أطوالها

إذا لم تكن قادرا على عد حبات الباطاطا المنتجة من حقلك فأنت قادر على وزنها

تعريف العشيرة

العشيرة هي عائلة من مجموعات جزئية لمجموعة تحقق الشروط التالية:

المجموعة الخالية والمجموعة الكلية عناصر منها

هي مستقرة بالنسبة لاتحاد عدود لعناصر منها أي اتحاد قابل للعد لمجموعات منها هي مجموعة منها

كل متممة عنصر منها هي عنصر منها وهذا يعني اذا أضفنا الشرط السابق ان العائلة مستقرة كذلك بالنسبة للتقاطع العدود لأن متممة الإتحاد هي تقاطع المتممات.

نسمي هذه العائلة عشيرة أو سيغما الجبر (Tribu ou σ–algèbre)

وهناك من يسميها جسم بوريل

نلاحظ أن الشرط الأول يمكن تعويضه بان العائلة غير خالية لان اتحاد مجموعة ومتممتها يعطي المجموع الكلية ومتممة المجموعة الكلية تعطي المجموعة الخالية.

Définition[2] — Soit X un ensemble. On appelle **tribu** (ou **σ-algèbre**) sur X, un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de X qui vérifie :

1. $\mathcal{A}$ n'est pas vide
2. $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire
3. $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable.



العشيرة البوريلية

العشيرة البوريلية في فضاء طوبولوجي هي أصغر عشيرة تشمل جميع المفتوحات.

العشيرة اللوبيغية

لفهم عشيرة لوبيغ لابد من فهم المجموعات المهملة حسب قياس معين.

أول من تكلم على العشائر هو بوريل فانطلق من المفتوحات لصناعة عشيرته وهي أصغر عشيرة تحويها والتي تسمى بعشيرة بوريل.

وهو كذلك من وضع مفهوم المجموعة المهملة فبتعريف قياس على هذه العشيرة يمكننا تعريف المجموعة المهملة بأنها مجموعة محتواة في مجموعة من العشيرة قياسها معدوم.

ليس شرطا أن تنتمي هذه المجموعة إلى عشيرة القياس لتكون مهملة، فكل مجموعة قياسها معدوم هي مهملة لكن العكس ليس صحيح دائما.

بما أن هذه المجموعة محتواة في مجموعة قياسها معدوم الحدس يدفعنا لتمديد العشيرة بهذه المجموعات بجعل قياسها معدوما كذلك.

يمكننا بذلك تمديد عشيرة بوريل عن طريق توليد عشيرة جديدة بإضافة المجموعات المهملة ومتمماتها واتحادات المجموعات الأخرى.

بما أن قياس هذه المجموعات المهملة معدوم فإضافتها للعشيرة لا يغير قياس المجموعات السابقة لأن القياس يبقي قياس مجموعة العشيرة زائد قياس مجموعات مهملة والأخير فرضناه معدوما.

العشيرة الجديدة نسميها بالعشيرة المتممة وبهذه الطريقة نعرف قياس لوبيغ انطلاقا من قياس عشيرة بوريل.

عموما المجموعة المهملة محتواة في مجموعة قياسها معدوم لكن ليس شرطا أن تكون قابلة للقياس لكن في قياس لوبيغ نجد نفس الشيء لأنه قياس متمم فكل مجموعة مهملة هي مجموعة قياسها معدوم والعكس صحيح.

قياس لوبيغ هو القياس المعرف بإكمال عشيرة بوريل بإضافة المجموعات المهملة وهذه العشيرة الجديدة تسمى العشيرة اللوبيغية.



تعريف القياس

هو تطبيق معرف على ما يسمى عشيرة

نحو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة المتممة بزائد مالانهاية ويحقق الشرطين:

قياس المجموعة الخالية يساوي الصفر

تجميعي على مجموعات قابلة للعد غير متقاطعة مثنى مثنى.

هذا التعريف ، ماذا يعني كل قسم منه ولماذا عرف هكذا ؟

يمكن الانطلاق من كونه تعميم لمفهوم المساحة والحجوم .

القياس محاولة لتعميم مفهوم المساحة والحجم وبما أن الاحجام المألوفة مثلا هي المكعبات سنحاول تقريب شكل غير هندسي بالمكعبات لحساب حجمه وهذا لا يتأتي إلا بعدد مكعبات صغيرة ولا نهائي لنصل إلى أحسن نتيجة.

إذن لابد من استعمال حجوم اتحاد عدود لمكعبات غير متقاطعة ومنه صياغة هذا الشرط ان يكون قياس الاتحاد العدود لمجموعات غير متقاطعة هو مجموع قياسها

معنى حيثما كان

تعني القضية صحيحة على كل المجموعة ماعدا على جزء مهمل.

خواص القياس

1)لماذا فرضنا خاصية التجميع العدود في القياس ؟

الجمع العدود للمرور إلى النهاية وإدخال اكبر عدد ممكن من المجموعات داخل المجموعات القيوسة لانه اكبر تعميم ممكن باستعمال خاصيات الجمع

2)لماذا نفرض قياس المجموعة الخالة يساوي الصفر ؟

وذلك للمحافظة على خاصية التجميع لاتحاد أي مجموعة مع المجموعة الخالية

كيف تلتقي نظرية الإحتمالات بنظرية القياس؟

الاحتمال عبارة عن قياس كلي يساوي الواحد اي اذا كان قياس المجموعة الكلية يساوي 1 فهو احتمال

ما الفرق بين قياس لوبيغ وقياس جوردان ؟

الفرق في العدودية وفي طريقة التقريب

جوردان يقرب بعدد منته من المكعبات ولوبيغ يقرب بعدد غير منته وقابل للعد من المكعبات



مجموعة فيتالي

مثال على مجموعة غير قابل للقياس ، إنشاؤها يتم باستعمال مسلمة الإختيار

ما الخاصية التي حطمتها مجموعة فيتالي في مفهوم قياس لوبيغ لتصبح غير قابلة للقياس ؟

الخاصية هي خاصية السحب:

$$\forall r \in \mathbb{R} : \mu(A) = \mu(A + r)$$

الدالة القيوسة هي التي صورتها العكسية لمجموعة قيوسة، مجموعة قيوسة، فما هي أبسط الدول القيوسة التي صورتها حقيقية ؟

المستمرة حيثما كان.

المستمرة حيثما كان اي هي مستمرة على كل المجموعة ما عدا على مجموعة قياسها معدوم

دالة قابلة للإشتقاق حيثما كان و لكن غير مستمرة على غالبية نقاط مجموعة الأعداد الكسرية ذو الكتابة العشرية المنتهية.

تمثل المعكوفتين دالة الجزء الصحيح و بالنسبة للكتابة العشرية فنختارالكتابة المنتهية إن كانت موجودة وإلا الكتابة غير المنتهية

BENCHABANA Abdelhakim 07/07/2018

$\forall x \in \mathbb{R}$

Decimal numeral system :

$x = \pm a_n a_{n_1} \ldots a_0, b_1 b_2 \ldots = \pm(\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k + \sum_{k=1}^{m} a_k 10^{-k}),\ n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

$f(0) = 0$

$f(x) = \frac{|x|}{x}(\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k + \sum_{k=1}^{m} a_k 10^{-2k})$

To prove that :

1) $f(-x) = -f(x)$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^* : f(x) = \frac{|x|}{x}[|x|] + \frac{|x|}{x} \sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-2k}([10^k(|x| - [|x|])] - 10[10^{k-1}(|x| - [|x|])])$

3) f is almost everywhere differentiable, but,it is not derivable over an entire interval

يا أستاذ حدثني عن القياس والتكامل

الأستاذ : يا ولدي إن العقل البشري كان و لا يزال يصنع الكثير من المفاهيم الرياضية من الواقع لذلك أنا سائلك بعض الأسئلة قبل أن أحدثك عن تاريخ القياس و مفهومه.

إن كان عند مزارع حقل عنب فكيف يحسب ما أنتجه حقله من العنب، هل يعد العنب حبة حبة في عناقيدها ؟

التلميذ : لا يمكنه حساب ذلك بهذه الطريقة إنما يزنه بميزان

الأستاذ : و لماذا لا يمكنه استعمال عد حبات العنب، ألا نعد النقود لمعرفة ما عندنا من المال ؟

التلميذ : لا يمكن لأن حبات العنب كثيرة جدا وسيقضي عمره و هو يعدها حبة حبة

الأستاذ : إذن بما أن المزارع لا يستطيع عد حبات العنب فهو يزنها جملة جملة ، في الحقيقة عد النقود أو وزن العنب كلاهما نوع من القياس فالقياس ما هو إلا تكميم لخاصية، لكن ليس كل طريقة تكميم صالحة فإذا كنا نعد النقود فلا نستطيع عد العنب لذلك نزنه و الوزن ما هو إلا مقارنة لكمية المادة بالنسبة لكمية مادة اصطلحنا عليها باسم الكيلوغرام.

لكن هل نزن طول و عرض الأشياء ؟

التلميذ : لا لكن نقيس ذلك بالمتر

الأستاذ : إذن تكميم الطول ما هو إلا قياس و ذلك بمقارنة خاصية الطول للأشياء بطول شيء متعارف عليه اسمه المتر، فكما ترى القياس ما هو إلا مقارنة بين مجموعتي عناصر و ما يصلح لقياس خاصية لا يصلح لأخرى.

فنحن لا نزن الكهرباء بالكيلوغرام فالكهرباء غير قابلة للوزن أي غير قابلة للمقارنة بكمية المادة التي تعارفنا عليها باسم الكيلوغرام و كذلك الحجم فنحن نقيسه بمقارنته بمكعب اصطلحنا عليه المتر المكعب لكن لا نزنه بالميزان.

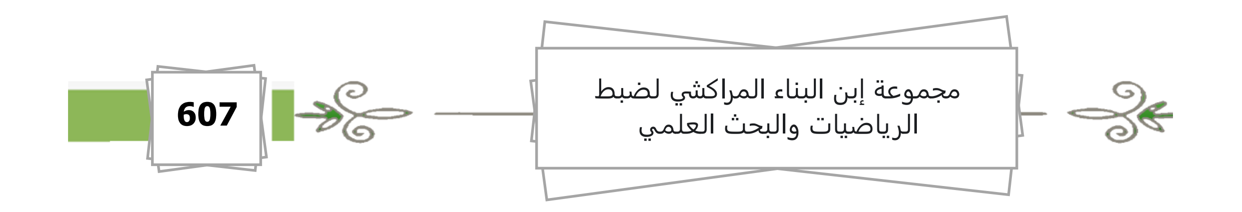
التلميذ : لكن ألا نستطيع معرفة الوزن بواسطه الكتلة الحجمية ؟

الأستاذ : الكتلة الحجمية ما هي الا علاقة بين الحجم و الوزن فهي مجرد دالة من مجموعة يمكن قياسها بالحجوم نحو مجموعة يمكن قياسها بالأوزان.

إذا فهمت ما سبق يا ولدي فقد فهمت القياس و التكامل.

التلميذ : كيف ؟

الأستاذ : لنبدأ من البداية، عندما اكتشف الانسان العد سرعان ما اكتشف أنه يمكنه قياس الأطوال و المساحات و الحجوم فالأمر بسيط ، بالنسبة للطول ما علينا إلا أن نختار شيئا له خاصية الطول فنصطلح عليه بالواحد ثم نكرره ليتساوى طوله مع أي شيء آخر نريد قياس طوله و ذلك بالعد.



في هذا الميدان أبدع الاغريق باختراعهم الهندسة فقاموا بقياس أطوال المثلثات و مساحة المربعات و صنعوا لذلك قوانين.

لكن كان مفهوم القياس بدائيا عندهم فمساحة المربع ما هي إلا ضرب طول ضلعه في نفسه لأنهم يرونه مقسم إلى مربعات وحدة و هي التي طول ضلعها ما اصطلحنا عليه بواحد ، فكأنهم رؤوا حساب المساحة ما هو إلا حساب عدد المربعات داخل مربع أكبر أو مستطيل أما المثلث فما هو إلا نصف مستطيل إذا كان قائما و إن لم يكن كذلك يمكن تقسيمه إلى مثلثين قائمين.

لكن الشيء الذي أضافه الإغريق نقلهم المساحة بديهيا نحو القرص و كذلك التنقل من حجوم المكعبات إلى حجوم الأشكال الأخرى كالمخروط و الكرة و الاسطوانة.

الذي أضاف قفزة نوعية في هذا الميدان هو ارخميدس إذ لحساب مساحة القرص ما فعله هو اعتباره مجموعة مثلثات قاعدتها قوسية ثم فتحها جنبا لجنب ليصنع بها شريطا كما في الصورة فكأنه قسم القرص إلى عدد لا نهائي من المثلثات ، فقد مر إلى النهاية حدسيا لتقريب القرص من مضلعات هندسية مساحتها معروفة.

التلميذ : لكنه لم يكن يعرف النهايات

الأستاذ : نعم يا ولدي فما فهمه حدسا ما كان بالامكان صناعته رياضيا إلا بصياغة استلزمت قرونا من اكتشاف الأعداد الناطقة ثم الحقيقية ثم المكاملة ثم القياس.

فطريقة أرخميدس هذه هي طريقة ما نسميه قياس جوردان اليوم و الذي صنع في نهاية القرن التاسع عشر !!!!

التلميذ : تقريبا عشرون قرنا لصناعة تكامل و قياس!!!

الأستاذ : نعم فالمفاهيم الرياضية التي نفهمها اليوم و نظنها سهلة استغرق الانسان في فهمها عشرات القرون.

احتاج الإنسان لفهم القياس لتطوير نظام العد و ذلك كان من طرف الهنود بنظام العد العشري، ثم صناعة الأعداد الناطقة و كثيرات الحدود و إظهار مفهوم الدالة و هذا جاء من عند العرب فالعرب كانوا ثاني من قدم خطوة نوعية في مجال القياس.

التلميذ : هل كان العرب يعرفون التكامل ؟

الأستاذ : العرب أظهروا مفهوم الدالة بصناعتهم جدوال للقيم الجيبية و هو أول مفهوم للتطبيق، فلا يمكن الكلام عن تكامل دون دوال

وكذلك درسوا هندسيا القطوع الزائدة و الناقصة و كان هذا أو بداية للتمثيل البياني للدالة، بل ذهبوا إلى أكثر من ذلك بتطويرهم للكتابة العشرية بتقريب التقسيم بكسور عشرية و هذا أول مفهوم حسابي للنهاية بل حسبوا حجوم أشكال هندسية بطريقة أرخميدس فنجد عند الإخوة بن موسى طريقة في الحساب المتناهي الصغر



وعند ثابت ابن قرة استعمال تقسيمات لحساب الأحجام بما يوافق ما يعرف اليوم بمجموع وريمان وعند ابن الهيثم أين نجد كل مكونات تكامل بمجموع داربو.
بانتقال الحضارة إلى الغرب، واصلوا البناء على مكتشفات العرب من صناعة الأعداد الحقيقية و تصور الدوال و دراسة النهايات ثم مفهوم الاستمرار و الاشتقاق، لكن كانت الدوال في البداية بدائية تشبه الدوال المألوفة عندنا ككثيرات الحدودو و الجيبية و اللوغارتمية.
لكن اكتشاف العلماء للاشتقاق وجههم نحو التقريب التآلفي و ذلك بتقريب الدالة بكثير حدود من الدرجة الأولى بل عمموا ذلك إلى أن صنعوا النشر المحدود كنشر تايلور و هنا بدأ الأمر يختلف إذ هذا النشر إذا مددناه يصبح تعريف لدالة بواسطة مجاميع غير منتهية فاهتم العلماء بهذا النوع الجديد من الدوال.
بجانب هذا ، تطورت الفيزياء كثيرا مرورا بقوانين نيوتن إلى دراسة هزات الأوتار و انتشار الحرارة مما أدخل الفيزيائيين عالم المعادلات التفاضلية.
قام الرياضي برنولي بإدخال الدوال الجيبية في دراسة الأوتار ثم جاء فورييه أين اكتشف المعادلة الحرارة و في محاولة لحلها أدخل فيها الدوال الجيبية فصنع ما نسميه اليوم نظرية سلاسل فورييه و تحويلات فورييه ففتح بذلك المجال أمام العلماء لدراسة دوال تكتب بسلاسل دوال مألوفة.
التلميذ : لكن ما علاقة هذا بالقياس و التكامل
الأستاذ : العلاقة هي في كيفية حساب معاملات فورييه ، فسلاسل فورييه ما هي إلا مجموع خطي لدوال جيبية غير منتهية لكن لحساب معاملات كل دالة طور العلماء طريقة المكاملة.
القفزة النوعية التي أحدثتها سلاسل فورييه هو الخلط بين النهايات و مجاميع الدوال و معاملات تحتاج لحسابات تكاملية على عكس نشر تايلور أين نلجأ إلى الاشتقاق
بداية ظهور التكامل المعاصر كانت على يد ريمان فقد واصل أعمال أستاذه غوص حول سلاسل فورييه و لحساب معاملاتها عرف ما نعرفه اليوم بتكامل ريمان.
و ذلك بحساب المساحة المحصورة بين منحنى الدالة ومحور السينات بواسطة طريقة أرخميدس بتقريب المساحة بتقطيعها بمستطيلات عبر تقطيع محور السينات في مجال ثم جمعها و حساب نهايتها عندما يؤول التقسيم إلى الصفر.
طريقة ريمان في التكامل أدت إلى ظهور مبرهنات عديدة كاكتشاف كون هذه المساحة مجرد دالة أصلية لدالة المنحنى لكنها فتحت بابا واسعا أمام الرياضياتيين ، ما هي الدوال التي يمكن مكاملتها بطريقة ريمان ؟
التلميذ : ريمان لم يستعمل القياس
الأستاذ : نعم ، تكامل ريمان كان مجرد إعادة استعمال للمفاهيم السابقة لكنه لم يظهر تقريب المساحات بالمضلعات فلم يهتم ريمان بفهوم المساحة كمساحة إنما اهتم بالعلاقة العكسية بين الدالة و الدالة الأصلية



فتكامل ريمان دراسة للدوال لا دراسة للمجموعات و كما حدثتك في البداية القياس شيء متعلق بالمجموعة بل بمقارنة المجموعة بمجموعة أخرى.

التلميذ : هذا يشبه الطوبولوجيا ففيها نقارن المجموعات بالمفتوحات.

الأستاذ : نعم الآن يظهر ذلك كشيء بديهي لكن الأمر لم يكن بذلك السهولة.

تكامل ريمان يهتم بترتيب تقطيعات محور السينات وكانه يتبع رسم منحنى الدالة وهذا له علاقة وطيدة للاستمرار بنظرة بشرية اذ يقحم البشر في ذلك الزمن وكأن الدالة تسير بغير انقطاع وريمان يحسب المساحة الممسوحة تحت المنحنة بإضافة مستطيلات

في نهاية القرن التاسع عشر حد شيء غير نظرة الرياضياتيين للدوال، فقد كانوا يعتقدون قبل ذلك أن معظم الدوال قابلة للاشتقاق ماعدا عند نقاط و أن الدالة اذا كانت مستمرة فهي قابلة للاشتقاق إلا عند نقاط معزولة إلى أن جاء ويرستراس فاستعمل سلاسل الدوال لصناعة دالة مستمرة غير قابلة للاشتقاق عند أي نقطة!!!!

ما قام به وستراس دفع العلماء إلى دراسة هذه الدوال ، ما هي الدوال القابلة للمكاملة ، هل هي مستمرة دائما ، أم غير مستمرة عند نقاط منعزلة...

اهتم بهذا الموضوع العالم كنتور

التلميذ : كنتور صاحب عدم قابلة العد لمجموعة الأعداد الحقيقة ؟

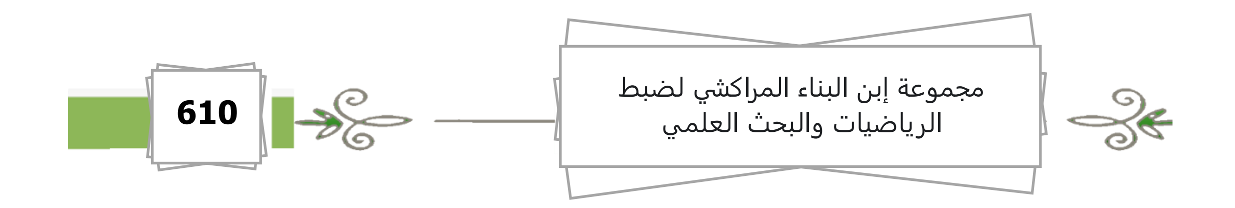
الأستاذ : نعم إنه هو ، بدأ عمله بدراسة الدوال القابلة للمكاملة حسب ريمان ثم أخذ يهتم بنقاط تقطعها لكن كيف يكمم هذه النقاط ؟ ... في زمانه كان العلماء لا يعرفون الطبولوجيا و لا القياس و يخلطون بين مفاهيمهما ،

ما هي المجموعة الكثيفة ؟ ما هي المجموعة المهملة ؟ بل البعض كان يظن أن المجموعة الكثيفة غير مهملة .. كل هذا دفع كنتور في مرحلة أولى لمحاولة توضيح هذه المفاهيم من كثافة و ملاصقة و ما غير ذلك ثم درس الدوال و استمرارها فمفهوم النهاية لا ينفك عن التلاصق و التراكم و ما شابه لكن في خضم بحثه حاول تكميم هذه المجموعات ... كيف يحسب عدد نقاطها ؟

التلميذ : هذه مسألة حساب عدد حبات العنب ؟

الأستاذ : هي كذلك ألم أقل لك أنك إذا فهمت المقدمة التي ذكرناها فقد فهمت القياس

كان من الواضح أن هذه المجموعات غير منتهية فلم يكن هناك بد لكنتور إلا بمحاولة تكميمها بمقارنتها بمجموعات أخرى ؟ لكن كيف يفعل ذلك ؟ أول شيء هي مقابلتها مع مجموعة الأعداد الطبيعية فعرف ما نراه حدسيا المساواة بين عدد عناصر مجموعتين هي وجود تقابل بينهما و هذا ما نسميه الكاردنال فنقول ان المجموعتين لهما نفس القوة إذا وجدنا تقابلا بينهما وأن المجموعة قابلة للعد إن كانت تقابل الأعداد الطبيعية.



فاكتشف أن الأعداد الناطقة قابلة للعد ثم حاول صناعة تقابل بين مجموعة الأعداد الحقيقية و الأعداد الطبيعية و في محاولته هذه لجأ إلى فكرة جديدة وهي محاولة قياس طول المجموعات الحقيقية فقال لو كانت الأعداد الحقيقية قابلة للعد فيمكنني وضع كل نقطة منها في مجال صغير ثم أجمع أطوالها لكن المشكلة أنك تتحكم في الطول كما تريد فبإمكانك تصغيره ليصبح مجموع السلسة أقل من أي عدد موجب تريد، فوصل إلى تناقض لأننا نرى مثلا أن طول المجال من الصفر إلى الواحد هو الواحد فكيف نضع نقاطه في مجالات مجموع أطوالها صغير أصغر من الواحد.

فاكتشف كنتور أن الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد بل اخترع أول طريقة لمحاولة تكميم المجموعات بالأطوال.

التلميذ : طريقته تشبه محاولة قياس مجموعة بمجالات ؟ لكن ما الفرق بينها و بين تكامل ريمان أين يقرب المساحة بمستطيلات على مجالات ؟

الأستاذ : الفرق في المفهوم يا ولدي فريمان يحاول دراسة دالة أما كانتور فيدرس مجموعه...

قبل كنتور بثلاث سنوات قام جوردان بخطوة في هذه الجهة فقال بما أن الجميع يحاول دراسة الدوال القابلة للمكاملة بمفهوم ريمان فلماذا لا أدرس المجموعات التي يبنى عليها هذا التكامل ، دفع جوردان لهذا الأمر ظهور التكاملات الثنائية فهي عادة تحسب على أشكال فصنع ما يسمى اليوم بقياس جوردان و هو مكافئ لتكامل ريمان لدالة أحادية على المساحة المكاملة عليه.

نعود لكنتور يا ولدي، فبعد أن صنع طريقته القياسية لبرهنة عدم قابلية العد للأعداد الحقيقية تساءل عن العلاقة بين المجالات و قابلية العد فصنع مجموعة غريبة تعرف باسمه هي مجموعة مغلقة بين الصفر و الواحد غير قابلة للعد لكنها لا تحوى على أي مجال ...بل هي مهملة بمفهوم قياسنا

بعد سنوات قليلة قام بوريل و هو أستاذ لوبيغ باقتباس طريقة كنتور ليعرف القياس، كان غرض بوريل دراسة المجموعات المهملة وذلك لدراسة الدوال العقدية التحليلية، أعمال بوريل كانت في سياق أعمال ريمان حول هذه الدوال فالدالة زيتا لريمان غنية عن التعريف فهي دالة عقدية.

بوريل أراد دراسة النقاط الشاذة لهذه الدوال لذلك استعمل القياس في اطار جعلها في مجموعة مهملة أو ما قياسها صفر في مفهوم بوريل، و الطريقة مماثلة لطريقة كانتور انطلق من المجالات فبما ان المجالات المحدودة يمكن قياسها انطلق منها لكتابة مجموعاته عن طريق اتحاد هذه المجموعات او تقاطعها.

التلميذ : لكن هذه المجالات تعرف بها الطبولوجيا كذلك ؟

الأستاذ : نعم لكن في عصر بوريل لم تظهر بعد فائدة الانطلاق من المجالات الطوبولوجية فلها فائدة اخرى إذ إذا أردت دراسة استمرار و اشتقاق دوال و في نفس الوقت قياس مجموعة نقاطها الشاذة فأفضل شيء هو أن تنطلق من المفتوحات لقياس مجموعاتك فهي تدخل في الاستمرار و في القياس.



طريقة بوريل حدسية بما أنك تريد قياس المجموعات فقارنها بما نعرف قياسه و هي المجالات إذن اكتبها كاتحاد و تقاطع مجموعات من هذا الشكل ثم احسب طول هذه المجالات لتصل إلى الصفر فكانه تمديد لمفهوم القياس من مجالات إلا اشكال مركبة منها ، لكن المشكلة أنه لا يمكنك كتابة كل المجموعات الحقيقية كاتحاد أو تقاطع مجالات.

التلميذ : أليس هذه مسألة الكهرباء التي لا يمكننا وزنها ؟

الأستاذ : نعم هذه هي عدم قابلية القياس ، أي لا يمكننا مقارنة كل مجموعة بغيرها.

الذي أكمل بناء نظرية القياس هو لوبيغ تلميذ بوريل، إذ انتبه إلى شيئين : الأول أنك لا تحتاج أن تقول أن مجموعة مهملة لابد أن تكتب كاتحادا أو تقاطع مفتوحات بل يكفي وضعها داخل مجموعة قياسها صفر لتعتبرها مهملة بل يمكن تعميم القياس بهذه الطريقة على الكثير من المجموعات إذ يكفي أن تكتب مجموعة كاتحاد بين مجموعة بوريلية و هي التي تكتب كاتحاد و تقاطع مفتوحات و بين مجموعة مهملة بمفهوم لوبيغ و هذا ما اعطي مفهوم قياس لوبيغ.

الشيء الثاني الذي لاحظه لوبيغ هو أنه يمكن اعاداة تعريف تكامل ريمان بطريقة مختلفة فاذا كان ريمان يقسم محور الفواصل ثم يحسب المساحة على كل مجال فلوبيغ قال في النهاية المساحة ما هي إلا قياس فبدل ذلك يمكننا أخذ قيمة الدالة ثم النظر إلى قياس مجموعة كل سابقة من سوابقها فأجمعه بضرب القياس في قيمة الدالة فعند لوبيغ الدالة كأنها مجرد كثافة لها قيم عند كل مجموعة وقيمتها الكلية ما هي إلا جمع الكثافة في قياس كل مجموعة.

التلميذ : أليس هذا ما يشبه الكتلة الحجمية ؟

الأستاذ بالضبط ، عندما نحسب الكتلة انطلاقا من الكتلة الحجمية ما نقوم به إلا اعتبار الكتلة الحجمية ككثافة للكتلة في الحجم فنقيس الحجم و نضربه فيها.

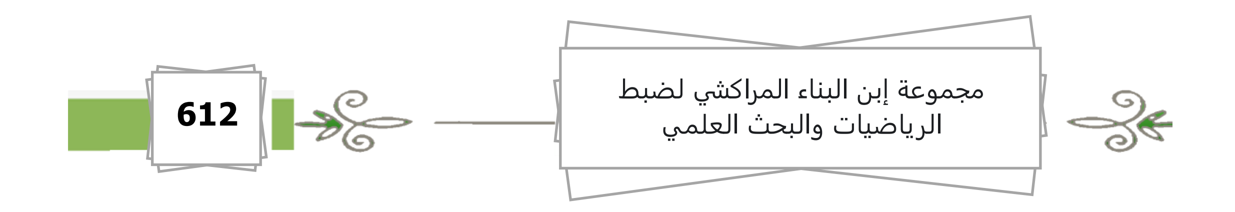
فتكامل ريمان تكامل مساحات بدليل انه ينطلق من مساحات مكونة بدوال درجية ليجمعها فينتج مساحة كلية.

وهذا يفسر عدم قابلية تكامل ريمان لبعض الدوال التي لا تقبل تشكيل مفهوم المساحة محليا.

أما تكامل لوبيغ فهو تكامل كمية موزعة محليا معبر عليها بكثافة فهو يرى قيمة الدالة ككثافة للسابقة وعليه الكمية الكلية ما هي إلا مجموعة الكثافات المحلية في أوزان مجموعاتها.

وهذا يفسر قابلية تكامل لوبيغ لبعض الدوال وإن كانت في بعض المجموعات المهملة لا تقبل كثافة.

لكن لوبيغ ذهب إلى أكثر من هذا ، إذ ما قام به مبني على المجموعات أي هي نظرية قائمة بذاتها لا مجرد استعمال لما سبق فقد أعاد تعريف التكامل انطلاقا من المجموعات.



عندما ظهر تكامل لوبيغ سر به الفيزيائيون كثيرا إذ استطاعوا حساب تكاملات دوال لم يمكنهم مكاملتها بمفهوم ريمان ثم لم يدم الأمر طويلا حتى اكتشف فاتو و هو صديق لوبيغ مبرهنته و التي تربط تكامل نهاية دوال بنهاية تكاملات دوال.

التلميذ : ما فائدة ذلك ؟

الأستاذ : على الأرض الواقع كل الدوال نحسبها بطريقة تقريبية و الكثير من الدوال نعبر عليها بنهايات فمن البديهي أن ينظر الرياضياتون لخاصية التكامل هل إذا حسبوا تكامل حدود متتالية الدوال فهو يقترب من تكامل نهاية الدوال او لا.

فبظهور توطئة فاتوا و مبرهنه التقارب الرتيب ثم المهيمن أجاب الرياضياتيون على هذا الانشغال خاصة و أن شروط التقارب المهيمن بسيطة اذ يكفي التقارب البسيط للدالة حيثما كان و أن يكون تكاملات حدود المتتالية أصغر من دالة قابلة للتكامل بمفهوم لوبيغ.

ثم قياس لوبيغ يحافظ على خواص دواله في النهايات فالدوال المستمرة قابلة للقياس و نهاية متتالية دوال قابلة للقياس هي دالة قابلة للقياس ليس كتكامل ريمان أين تحتاج شروط أكبر لضمان التكامل كالاستمرارية و مع ذلك نهاية متتالية دوال مستمرة ليست شرطا مستمرة فيصعب التعامل معه لذلك.

تكامل لوبيغ سهل جدا وأوسع و شروطه أبسط.

لا تحتاج تعريفا كاملا للدالة عند لوبيغ لكي تكاملها إذ يكفي أن تكون معرفة حيثما كان و نقول عن خاصية أنها حيثما كان إذا كانت محققة ماعدا على مجموعة مهملة

التلميذ : أستاذ ما الفرق بين حيثما كان في القياس و الكثافة في الطوبولوجيا ؟

الأستاذ : الكثافة والقياس شيئان مختلفان فالكثافة هي توزيع لا نهائي لعناصر حول جميع النقاط فهي خاصية عناصر وتوزيعها حسب الجوارات.

اما القياس فهي محاولة تأطير مجموعات بمجموعات اعطيناها قيمة عددية فهي خاصية مجموعات.

لذلك نجد مجموعة الاعداد الناطقة كثيفة لانه مهما اخترنا من عدد حقيقي وجدنا عناصر ناطقة بجواره، لكن قياسها معدوم ذلك أنها قابلة للعد فيمكن تأطيرها في مجموعات قياسها يؤول إلى الصفر بل العنصر الوحيد قباسه صفر فاذا جمعنا قياس عناصر قابلة للعد فسيبقى الصفر.

والاعداد الحبرية قابلة للعد لذلك كان قياسها هو مجموع قياس كل عنصر منها وهو الصفر.

خاصية التجميع في القياس هي من تخول لنا قياس اتحاد المجموعات بمجموع قياس كل مجموعة.

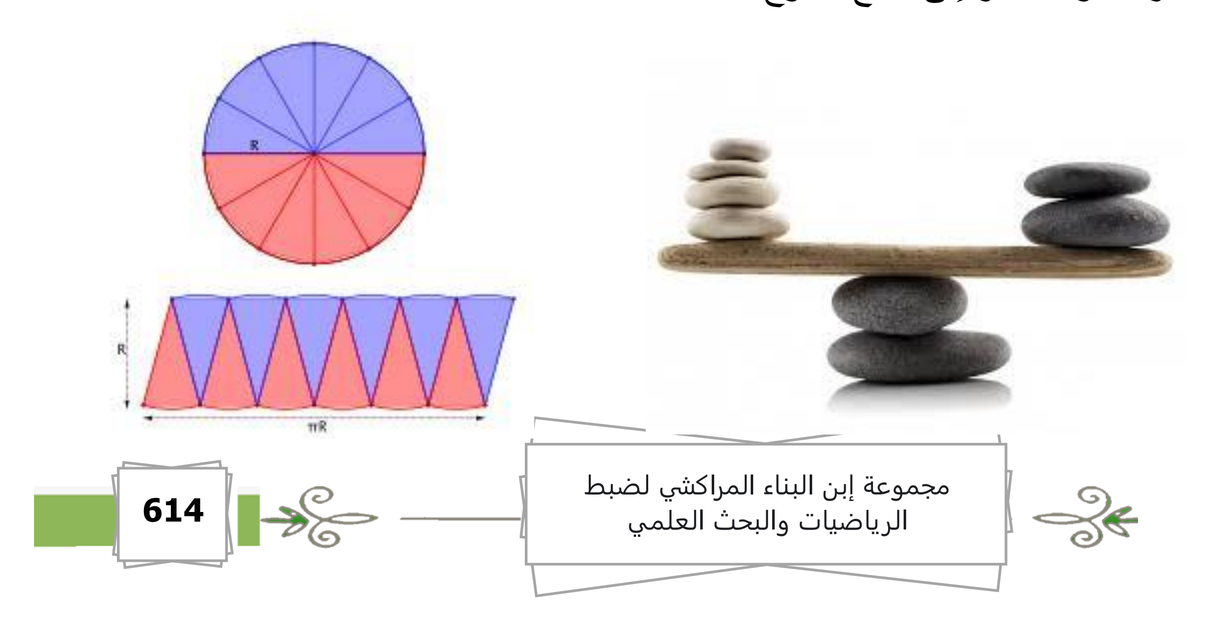
اذن القياس يهتم بالمجموعات لا بتوزيع العناصر بعكس الطبولوجيا فهي تهتم بتوزيع العناصر لذلك نتكلم فيها عن الجوارات.

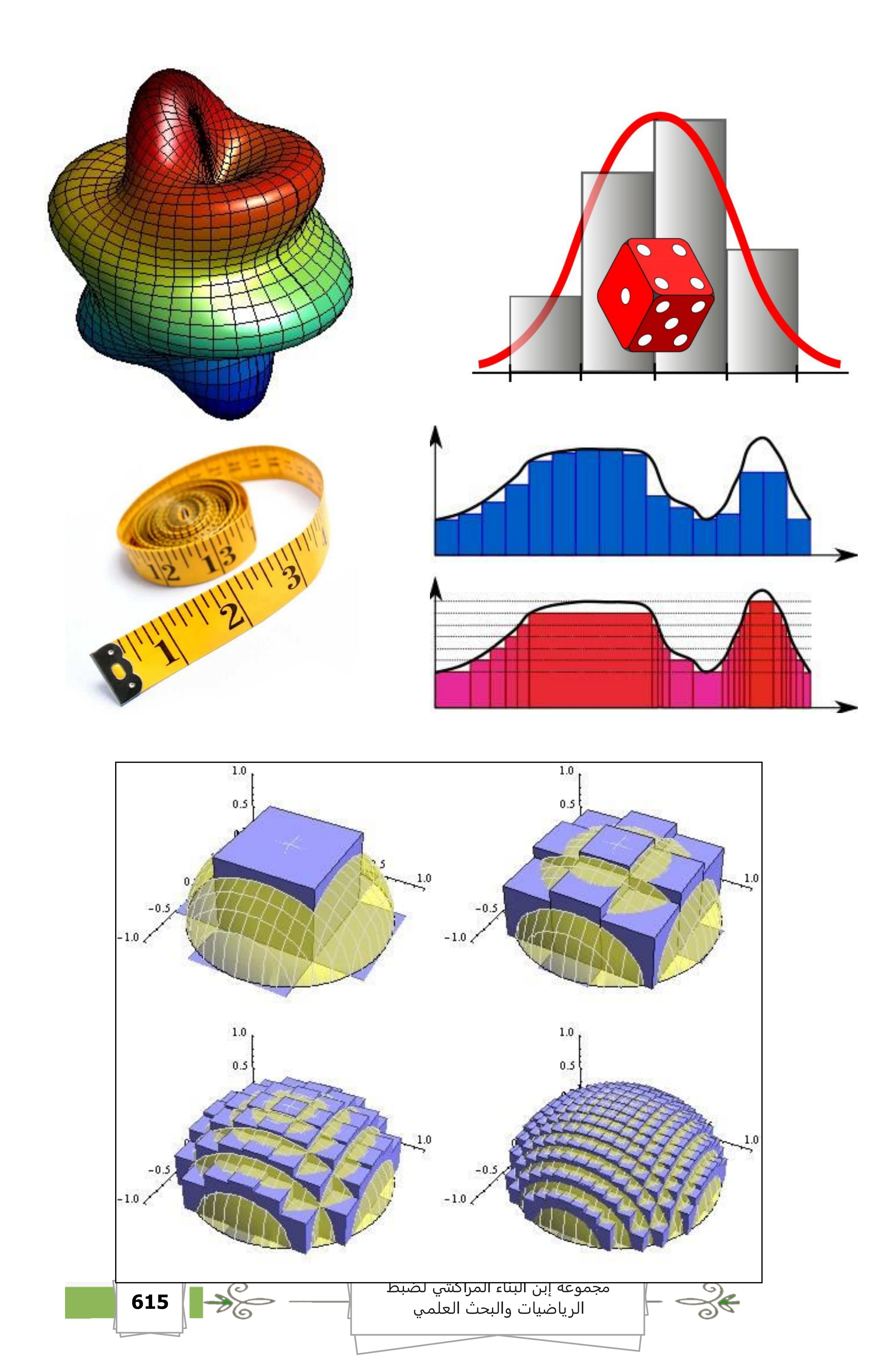
ففي الطبولوجيا نحاول تصغير الجوار للاقتراب من العنصر

اما في القياس فنحاول جمع المجموعات لحساب قياس مجموعة.



في الطبولوجيا اختار جوار او جوار اصغر منه يعطي نفس الخاصية.
في القياس تصغير او تكبير المجموعة قد يغير قياسها.
القياس نظرته كلية لذلك نقول حيثما كان
الطبولوجيا نظرتها محلية لذلك نتكلم عن الكثافة والجوار.
ما زال في أهمية نزرية لوبيغ انتباه بوريل إلى أن الاحتمالات في المجموعات غير القابلة للعد كمجموعة الأعداد الحقيقية يمكن التعبير عليها بتكامل لوبيغ اذ الاحتمال في النهاية ما هو إلا قياس مجموعة داخل مجموعة كلية قياسها الواحد و هذا ما وطأ لظهور نظرية الاحتمالات المعاصرة.
بل واصل العلماء في صناعة تكاملات أخرى على نفس طريقة لوبيغ انطلاقا من ضرب قيمة دالة في قياس مجموعة بالمعنى العام و هذا ما قام به هيتو في تكامله في التعبير عن العمليات العشوائية.
وواصل الفيزيائيون إستعمال هذه التكاملات فبتكانل لوبيغ عرفوا الفضاءات الهلبرتية والتي إستعملوها في فيزياء الكم.
أما الإقتصاديون فيستعملون القياس في علم الإحتمالات وتكامل هيتو في دراسة البورصة.
فلا نكاد نحد مجالا علميا اليوم إلا ودخلت فيه هذه المفاهيم.
هذه يا ولدي نظرة مختصرة لتطور نظرية القياس و التكامل لم أذكر لك فيها كل ما جرى فالأمر يطول لأنه عمل قرون من الزمن لكنها تبين لك تداخل المفاهيم الرياضية و كيف استطاع الانسان بحدسه بالانتقال من الواقع إلى مفاهيم رياضية لكن يا ولدي ان اختصرا القياس فيمكننا تشبيهه بوزن العنب.
فاذا أردنا حساب كمية العنب فيكفي وزنها لا حساب عدد عنباتها و وزنها هو تقريبها بمجموعات نعرف وزنها مسبقا كالكيلوغرام أما تكامل لوبيغ فهو كعصر العنب فاذا احتجت عصر العنب تأتي به أطنانا أطنانا فتعصره ثم تجمع العصير على خلاف تكامل ريمان ريمان يعصر عنقودا عنقودا فإذا كان العنقود هزيلا يقول لك لا استطيع عصره فكميته غير كافية أما لوبيغ فيقول لك لا بأس ضعه م غيره من العناقيد الهزيلة فإن لم يمكن عصره لوحده نعصره مع غيره فترتيب السينات مع تتابعها عند ريمان مهم و هذا ما يذكرنا بالاستمرار أما لوبيغ فلا يهمه ترتيب السينات انما الذي يهمه أنواع العنب فمتى جمعت من نوع كمية كافية لعصرها تعصرها بدون النظر إلى تتابع الأنواع




1.0
0.5
1.0
-0.5
-1.0
12
13
3
2
1

بين الدوال المستمرة والدوال القيوسة

دراسة استمرار دالة دراسة محلية فننظر ماذا يحدث بجوار نقطة a إذ نطلب أنه إذا كانت النقاط متجاورة ل a أن تكون الصور متجاورة لصورتها وهذا ما نترجم له بالنهاية عند a : $\lim f(x) = f(a)$

فالدوال المستمرة تعبر عن سلوك منظم محليا عند مقارنة سلوك صورها بسلوك سوابقها ولذلك يترجم هذا الشرط طبولوجيا ومحليا بأن:

الصورة العكسية لكل مفتوح هو مفتوح.

بالنسبة للقياس فالدراسة كلية ذلك أن القياس طريقة لتكميم المجموعات فعند النظر للدوال القيوسة لا ننظر لسلوكها عند نقطة معينة بل ننظر لسلوكها على المجموعات القابلة للقياس فنطلب منها أن تكون مجموعة الصور القيوسة سوابقها مجموعة قابلة للقياس.

فيترجم شرط الدوال القيوسة على شاكلة شبيهه للدوال المستمرة :

تكون الدالة قيوسة إذا حققت شرط الصورة العكسية لكل مجموعة قابلة للقياس هي مجموعة قابلة للقياس.

يلتقي مفهوم الدوال المستمرة والدوال القيوسة عندما تكون عشيرة القياس مولدة من الطبولوجيا فتصبح الدوال المستمرة حالة خاصة من الدوال القيوسة.

وهذا يستنتج من تعريف كليهما :

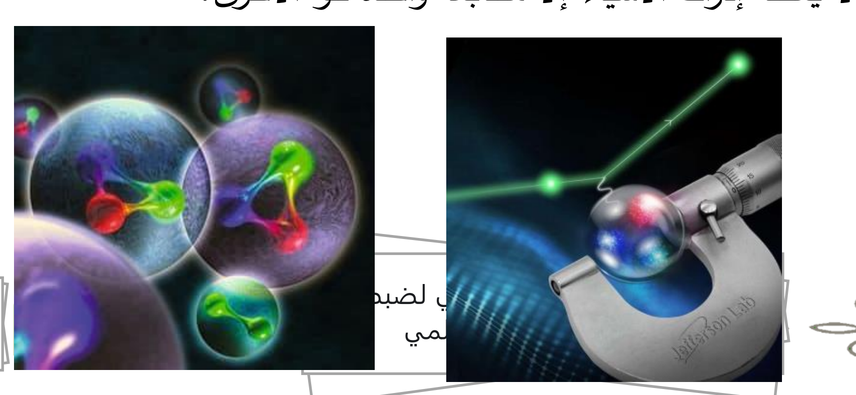
الدوال المستمرة تحقق شرط كل صورة عكسية لمفتوح هو مفتوح.

والدوال القيوسة تحقق شرط كل صورة عكسية لمجموعة قابلة للقياس هي مجموعة قابلة للقياس.

ففي الاستمرار مفهوم المفتوح محلي أما في القياس فمفهوم المجموعة القابلة للقياس كلي.

وعلى التعريفين يختلف منظور التكامل فتكامل ريمان يهتم بحساب محلي لذلك هو يستعمل جداء من الشكل $\Sigma f(x) dx$ ولهذا الدوال المستمرة تقبل المكاملة حسب مفهوم ريمان لأنها تقبل التقريب محليا فالتكامل قابل للحساب لقبول المجاميع قيمة وحيدة مهما كان التقريب المحلي.

أما الدوال القيوسة فهي تقبل المكاملة حسب مفهوم لوبيغ لتعلقها بالمجموعات القابلة للقياس لأن تكامل لوبيغ يهتم بحساب مجاميع على المجموعات القابلة للقياس فلا ينظر للقيم المحلية لكنه ينظر للصور مقابل قياس سوابقها كمجموعات. نظرة القياس للدوال مختلفة تماما عن نظرة الاستمرار فالقياس نظرته فيزيائية واقعية لأن القياس في التجارب محليا مستحيل لعدة أسباب منها ثوابت بلانك فلا يمكن قياس الظواهر إلا على مجموعات. أما نظرة الاستمرار فهي نظرة عقلية بشرية يتصور بها العقل البشري الدالة كمجموعة قيم تتابع زمنيا فالعقل البشري لا يمكنه إدراك الأشياء إلا متتابعة واحدة تلو الأخرى.





حدثني يا أستاذ عن الفرق بين تكامل ريمان و تكامل لوبيغ:

بن شعبانة عبد الحكيم

أراد مزارع أن يزن أكياس البطاطس التي جمعها (إي نعم بدون ضحك البطاطا دائما حاضرة) و بما أنه لا يملك ميزانا ذهب لأحدهم ليزنها.

هذا الأخيرعنده ميزان لا يزن الكتل الأقل من مئة كيلوغرام.

فأخذ الرجل يزن الكيس بعد الكيس و يجمع الموازين لكنه كلما وقع على كيس لا يزن أقل من مئة كيلوا قال له هذا غير قابل للوزن و في الأخير قال له بالميزان الذي عندي لا يمكنني وزن أكياسك!!!

لكن جاء ابن ذلك الرجل فقال لأبيه دعني أزنها لك، فأخذ الأكياس و رتبها حسب أحجامها ثم أخذ يزن كل مجموعة ذات نفس الحجم بأكملها وجمع المجموع فحصل على الوزن الكامل، فالأكياس التي كانت غير قابلة للوزن أفرادا لأنها أقل من مئة كيلوغرام أصبحت قابلة للوزن مع جمعها بعضا لبعض.

الطريقة الأولى للوزن هي طريقة ريمان والطريقة الثانية هي طريقة لوبيغ.

ريمان يرى الدوال كأنها نهاية لدوال درجية فيحسب المساحة التي يحصرها منحناها مع محور السينات بتقريبها من مستطيلات دوال درجية ثم يمر للنهاية، فتكامله يعتمد على تقسيم محور السينات لقطع صغيرة فهو ينطلق من محور السينات.

أما لوبيغ فيرى الدوال كقيمة معرفة على نقاط سوابقها مجموعات قابلة للقياس فهو يرتبها قيمة قيمة و ينظر لمجموعة سوابقها إن كانت قابلة للقياس فهو ينطلق من الصور ولا يهمه إن كانت بعض النقاط سوابقها خارجة عن المجموعة لأنها ذات قياس مهمل أو كيفما وردت القيم وإن كانت غير مرتبة.

طريقة تكامل لوبيغ تعطي تكامل ريمان لكن العكس غير صحيح.

نظرات في تكامل لوبيغ وريمان:

تكامل ريمان تكامل مساحات بدليل انه ينطلق من مساحات مكونة بدوال درجية ليجمعها فينتج مساحة كلية.

وهذا يفسر عدم قابلية تكامل ريمان لبعض الدوال التي لا تقبل تشكيل مفهوم المساحة محليا.

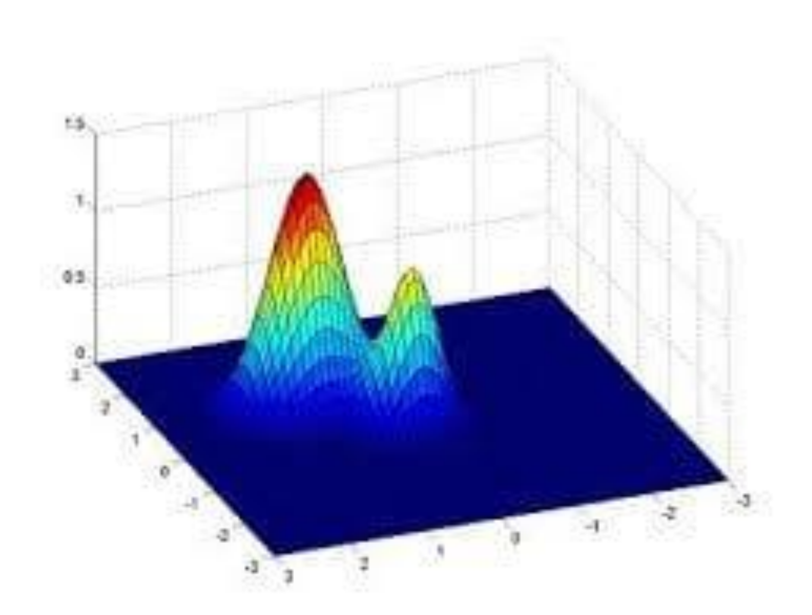
أما تكامل لوبيغ فهو تكامل كمية موزعة محليا معبر عليها بكثافة فهو يرى قيمة الدالة ككثافة للسابقة وعليه الكمية الكلية ما هي إلا مجموعة الكثافات المحلية في أوزان مجموعاتها.

وهذا يفسر قابلية تكامل لوبيغ لبعض الدوال وإن كانت في بعض المجموعات المهملة لا تقبل كثافة.

فتكامل لوبيغ أقرب للفيزياء نجده في مفهوم الطاقة والكتلة والحرارة وكل كمية موزعة محليا...

ولذلك نستنتج منه الاحتمالات لانها ما هي إلا كمية نسبية محليا لاختيارات.

ولذلك نستنتج منه التوزيعات فما هي إلا توسعة لمفهوم تكامل لوبيغ.



نظرية التقارب المهيمن تضمن وجود تكامل لوبيغ لكنها لا تضمن تواجد تكامل ريمان:

هذا المثال يمثل مجموعة دوال fn التي تساوي واحد عند الأعداد التي لها رقم بعد الفاصلة في رتبة n و 0 إذا كان غير موجود أو يساوي الصفر.

هذه الدوال تتقارب إلى الدالة f التي تساوي 1 عند الأعداد التي كتابتها العشرية غير منتهية و الصفر عند الباقي و هي دالة غير قابلة للتكامل حسب ريمان لأن الأعداد المنتهية الأرقام بعد الفاصلة كثيفة لكن الدالة قابلة للتكامل حسب ليبيزغ لأن مجموعة الأعداد المنتهية الأرقام بعد الفاصلة قياسها صفر.

نظرية التقارب المهيمن تضمن وجود تكامل لوبيغ لكنها لا تضمن تواجد تكامل ريمان

$I = [0,1]$ BENCHABANA Abdelhakim

$$f_n \begin{cases} f_n(x) = 0 : 10^n x - [10^n x] = 0 \\ f_n(x) = 1 : 10^n x - [10^n x] \neq 0 \end{cases}$$

$$f \begin{cases} f(x) = 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \, , 10^n x - [10^n x] = 0 \\ f(x) = 1 : \forall m \in \mathbb{N} \exists n \geq m \, , 10^n x - [10^n x] \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_I f_n(x)\, d\mu = \int_0^1 f_n(x)\, dx = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(x)\, d\mu = \int_I \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\, d\mu = \int_I f(x)\, d\mu = 1$$

$\int_0^1 f(x)\, dx$ not found

التقارب المهيمن : عندما نتجنب الانفجار...

من المبرهنات الأساسية في نظرية القياس مبرهنة التقارب المهيمن والتي تنص على أنه إذا كانت متتالية دوال كمولة f_n تتقارب ببساطة نحو f وكانت محدودة بدالة كمولة g أي $|fn(x)| \leq g(x)$

فإن نهاية تكامل f_n تساوي تكامل نهاية f_n أي تكامل f .

السؤال الذي يطرح نفسه لماذا اشترطنا المحدودية بـ g كمولة ؟

لو نزعنا هذا الشرط أي عدم إمكانية إيجاد دالة كمولة تحد f_n فسننتبه إلى أن ذلك يعني أنه إما

لا توجد دالة g تحد f_n عند كل نقطة أو أنها موجودة لكن غير كمولة أي أنه:

إما لا يمكننا تعريف دالة g انطلاقا من $\text{Sup } f_n$

عند كل نقطة وهذا يعني انفجار f_n أو أن تكامل $\sup f_n$ ينفجر.

ومشكلة التكامل في هاذين فمتى لم نستطع المكاملة فإما لعدم محدودية الدالة أو أن تكاملها هو غير المحدود.

لو أخذنا كمثال المتتالية f_n المعرفة بـ

$$1/n \, , x \in [0, n]$$

و

$$0 \, , x \in]n, +\infty[$$

والتي لا تحقق خاصية نهاية التكامل تساوي تكامل النهاية ذلك أنها تؤول للصفر لكن تكاملها يساوي واحد.

فسنجد أن $\sup f_n$ يكون معرفا بـ

$$1 \, , x \in [0,1]$$
$$1/2 \, , x \in]1,2]$$
$$1/3 \, , x \in]2,3]$$

....

وتكامل هذه الدالة هو مجموع السلسة مقلوب n التي تؤول نحو المالانهاية وهذا يفسر اختلاف نهاية التكامل عن تكامل النهاية ذلك أن التكامل هو جمع لا نهائي لقيم تؤول للصفر فمتى دخلت المالانهاية من جهة أفسدت النهاية.

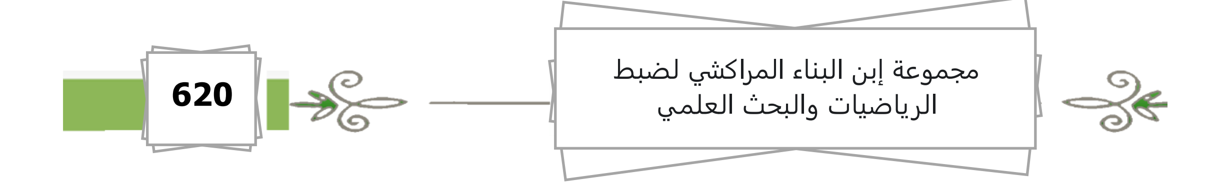
فالمشكلة هنا في إنفجار تكامل $\sup f_n$

وكمثال آخر المتتالية f_n المعرفة على مجال الوحدة: $f(x) = n \, , x \in]0, 1/n]$

ومنعدمة في باقي المجال

فهي لا تحقق كذلك نهاية التكامل تساوي تكامل النهاية

فلو أردنا تعريف $\sup f_n$ فسنجدها تنفجر بجوار الصفر ذلك ان $\sup n$ هو المالانهاية.



فللخروج من مأزق الانفجار نشترط في مبرهنة التقارب المهيمن محدودية المتتالية f_n بدالة كمولة فنخرج من المشكلتين انفجار الدالة و انفجار التكامل.

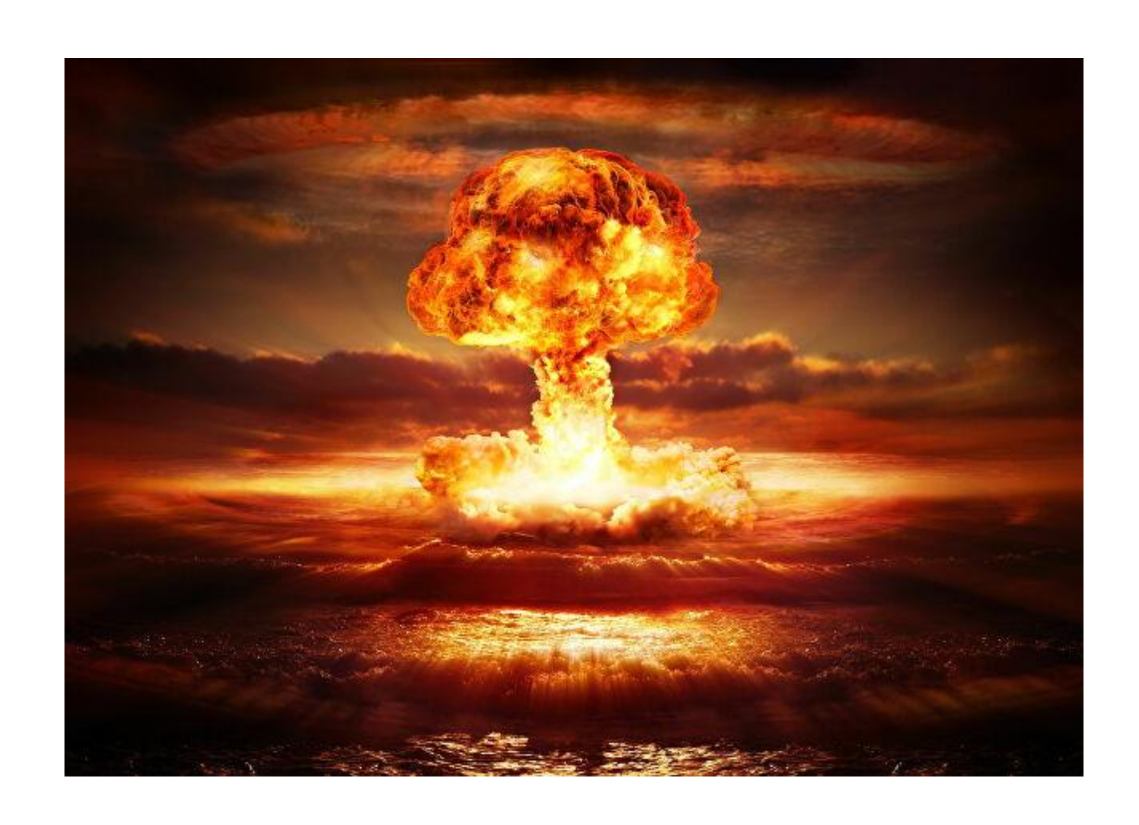
قد نجد حالات لا تحقق شروط مبرهنة التقارب المهيمن لكن رغم ذلك نهاية التكامل تساوي تكامل النهاية وهذا شبيه بحالة عدم التعيين عند الوصول لجداء المالانهاية في الصفر فقد توجد النهاية وقد لا توجد.

مثال ذلك الدالة f_n المعرفة على مجال الوحدة بـ $f_n(x) = n , x \in]0,1/n^2]$

ومنعدمة عل باقي المجال

فهنا التكامل هو مقلوب n يؤول للصفر وهو تكامل النهاية.

ورغم ذلك لا يمكن حد المتتالية بـ g كمولة لأنها ستنفجر بجوار الصفر.



تكميم الواقع بين العد والتكامل

على ماذا يعبر التكامل في الواقع ؟

البعض يظنه مساحة لكنه أعم ذلك فهو قياس والقياس أعم من المساحة.

فالتكامل هو نوع من القياس لكن ما هو القياس ؟

القياس هو تكميم مجموعات بمقارنتها من حيث التركيب بمجموعات نصطلح على كميتها ولو تأملنا هنا لوجدنا أن العدد يدخل في هذا التعريف لذلك نقول أن الجمع قياس العد فالعدد نوع من أنواع القياسات كذلك.

أما التكامل فهو تكميم خصائص محلية أو خصائص موزعة محليا فهو من هذه الحيثية أعم من العد لأن العد يهتم بالتكرار فقط أما التكامل فيهتم بخصائص محلية فالفرق بينهما أن العدد يهتم بالشيء ومثيله أما التكامل فيضم المختلفات.

كمثال للتكامل : المساحة فهي خاصية محلية للسطوح أي السطح محليا يماثل جزء من المستوي فتنقل له خاصية المساحة من المستوي محليا ثم تعمم بتكميم كلي.

مفهوم المحلية يختلف حسب نظرتنا للواقع فقد تكون محلية مكانية أو محلية زمنية.

فالتكامل ينظر له كتكميم خاصية موزعة أو ككثافة لخاصية فتكامل لوبيغ يجمع قيم متعلقة بمجموعة سوابق قابلة للقياس بضرب معامل قياس مجموعة سوابقها.

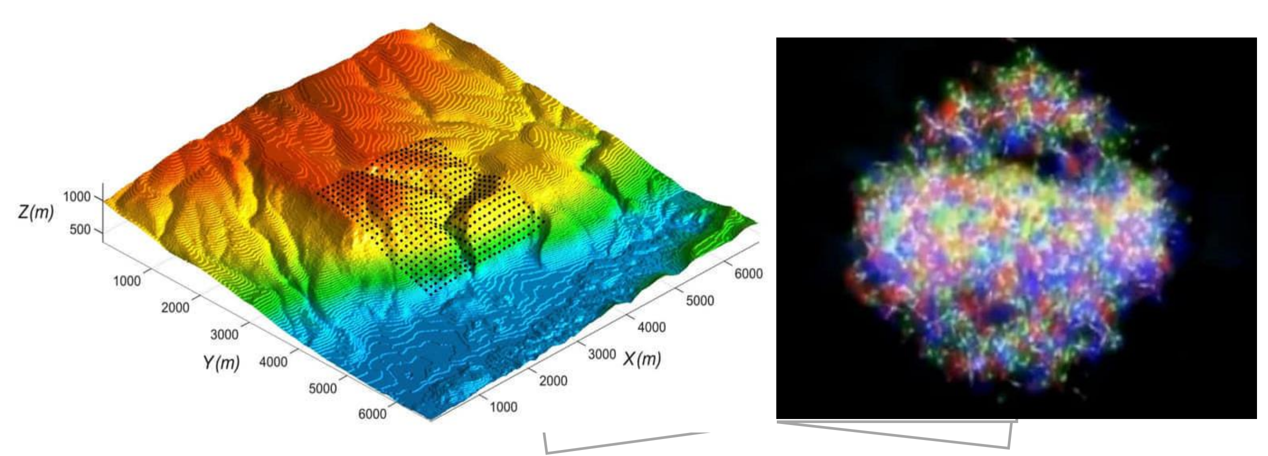
لماذا لجأنا للتكامل ؟

اللجوء للتكامل سببه قصر العمل بالعد ذلك أن تكميم العدد سهل إذا أمكن تمييز الشيء عن غيره وكانت العناصر قابلة للعد لكن متى لم يمكن ذلك فتكميم التكرار مستحيل.

لذلك لجأ البشر لطريقة أخرى لإظهار التكرار وهي الخصائص المحلية فبتقطيع الشيء إلى أجزاء صغيرة وتكميم كل جزء على حدة يمكن إعادة إظهار التكرار لكن لكي تكون النتيجة معبرة لابد من تقطيع لا نهائي مع جمع لانهائي ومن هنا يظهر التكامل.

تصور لو طلب منك مقارنة الأراضي بعدد حبات رملها أو المياه بعدد جزيئاته؟ هذا مستحيل إنما نقارنها بالمساحة والحجوم وغير ذلك.

التكميم هو الرابط بين الرياضيات والواقع عند التطبيق لذلك الفيزياء تهتم بهذا الجانب من الحسابات وعامة كل الميادين التي تلجأ للرياضيات فهي تمر عبر التكميمات بطريقة أو بأخرى والتكامل يعتبر طريقة تكميم ناجعة متى كانت المعلومات على واقع كثيرة جدا يعجز معها العد.



كمية الدالة بين تكامل ريمان وتكامل لوبيغ

الدالة مجرد توزيع مجموعة على مجموعة فهي تمثل توزيع مجموعة الصور على مجموعة السوابق.

من هذه الناحية يمكن رؤية الدالة ككثافة تتغير قيمتها عند كل نقطة.

إذا أردنا تكميم المادة الموزعة بالدالة أو كمية الدالة فالطريقة المباشرة هي جمع الصور لكن ذلك غير ممكن دائما فمتى كانت الدالة معرفة على مجموعات غير منتهية كمجموعة الأعداد الحقيقية لم يمكن الجمع وحتى لو إستعملنا السلاسل غير المنتهية والنهايات فلا يمكن ذلك في ظل مجموعات غير قابلة للعد.

فبدل من محاولة جمع الصور فطريقة ريمان تقترح تقسيم مجموعة السوابق إلى قطع وفي كل قطعة نختار ممثل عن صور الدالة.

بما الدالة المستمرة محليا فقيمها متقاربة فيمكن أن نقول أن إختيار أي ممثل من الصور في كل قطعة يعبر عن الصور الأخرى لصغر القطعة ولاستمرار الدالة فالفارق صغير بين الصور.

وبالمرور إلى النهاية مع جمع القيم الممثلة لصور الدالة مضروبة في طول القطع نحصل على قيمة تعبر عن كمية الدالة.

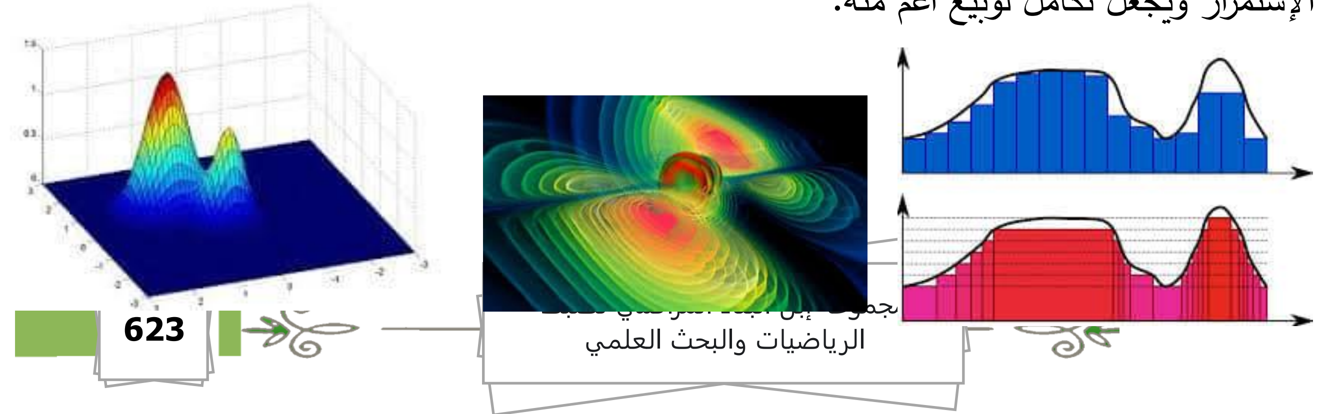
لكن متى كانت الدالة غير مستمرة فهذه الطريقة غير صحيحة لأنه يمكن أن نختار أكثر من ممثل عن صورة الدالة في قطعة معينة لعدم الإستمرار فليس جميعها مقارب لبعضه.

لكن هناك حالة لا يؤثر فيها عدم الإستمرار وهي إذا كانت هذه القطع التي تكون الدالة غير مستمرة عندها صغيرة بحيث يمكن اهمالها أي يمكن جعل طولها يقترب من الصفر أي مجموعة عدم استمرار الدالة مهملة بمفهوم لوبيغ. إذن هذا الإهمال يفسر وجود تكامل ريمان في هذه الحالة بل هو شرط كاف ولازم.

لوبيغ عنده نظرة أخرى فبدل قطع مجموعة السوابق واختيار ممثل من الصور فهو يعكس العملية فهو يأخذ قيم صور الدالة و ينظر لمن يمثلها من السوابق أو ما يقارب فيختار مجموعات قابلة للقياس كممثلة عن السوابق فيقيس طولها ثم يجمع قيم الدالة مضروبة في طول من يمثلها من السوابق للحصول على التكامل.

إذن كل من تكامل ريمان وتكامل لوبيغ يهدف لنفس الفكرة وهو حساب كمية الدالة الموزعة على مجموعة ولذلك يقوم الأول بتقطيع المجال ثم اختيار ممثل لصورة الدالة عند كل قطعة،

اما الثاني فياخذ جميع صور الدالة ثم ينظر لجميع ممثليها من السوابق أو ما يقاربها فيختار مجموعة ممثلة عنها فلذلك هو يشمل طريقة ريمان لأن ريمان يضيق فقط بجعل السوابق الممثلة لقيمة دالة قريبة محليا وذلك بسبب التقطيع فشرط القرب المحلي هو من يجعل تكامل ريمان غير صالح عموما إلا إذا أدخل الإستمرار ويجعل تكامل لوبيغ أعم منه.



الدالة بين تكامل ريمان وتكامل لوبيغ : التكامل كأنك تراه

تطبيق الرياضيات على الواقع يحتاج التعامل مع كميات لذلك أول ما تقوم به الفيزياء عند دراسة ظاهرة هو أخذ القياسات ثم التعامل معها في ظل نظريات رياضياتية فيزيائية.

أحد أهم الصعوبات التي واجهت الفيزياء هي تكميم الدوال إذ الدالة ليست مجرد عدد منته من الأشياء يمكن عده وينتهي الأمر.

الدالة في الواقع تمثل ظاهرة متغيرة عبر الزمان والمكان فوضعها تحت عدد يمثلها ليس بالأمر الهين خاصة مع دوال حقيقية أين يكون مجال تعريفها غير قابل للعد.

النهايات أعطت طريقة للجمع في المتتاليات لكن كما ذكرنا تبقى طريقة قاصرة إذا مررنا إلى مجموعات غير قابلة للعد فالمجموع غير النهائي لا يمكن تعريفه على مثل هذه المجموعات.

تكامل ريمان جاء بحل حدسي لمشكل تكميم الدالة بمحاولة جمع جميع قيم صورها لكن بما أن هذا مستحيل استعمل طريقة أخرى وهي تقطيع مجال تعريف الدالة على أجزاء ثم اختيار ممثل من قيم صور الدالة على كل تجزئة ثم جمع ضرب كل ممثل في طول تجزئته.

في الحقيقة هذه طريقة نستعملها كل يوم حدسيا فعندما نزرع أرضا فلاحية ثم نريد حساب استطاعة انتاجها فإننا نقسم وزن المحصول على مساحة الأرض، ثم إذا أردنا التنبؤ بالنتيجة مستقبلا في أرض أوسع نقوم بالعملية العكسية.

تكامل ريمان يقوم بهذه العملية الحدسية لكن هذه العملية تعتمد على وجود ممثل فحتى تكون ناجعة لابد أن تكون القيمة التي نختارها على كل تجزئة ممثلة فعلا لباقي القيم وهذا يعني أنه مهما اخترنا من عنصر من كل تجزئة ثم أخذنا صورته بالدالة كممثل فلابد أن نحصل على نفس قيمة تكامل ريمان وإلا لما كان له معنى.

وهذا يعني أن لا تكون هذه القيمة الممثلة بعيدة جدا عن باقي القيم في تجزئتها.

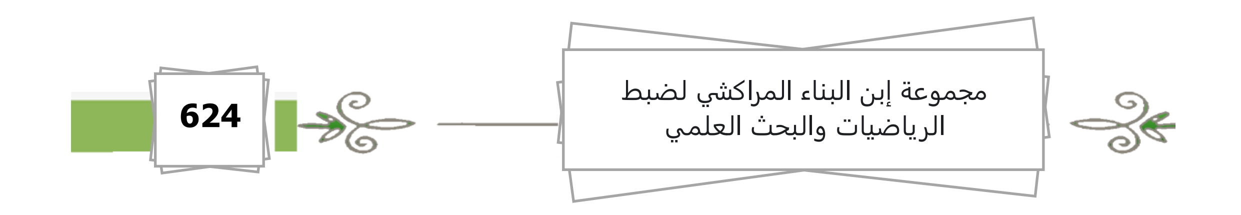
أي نحن نتكلم هنا عن الإستمرار إذ هو الشرط الوحيد الذي يخبرنا أن الدالة محليا قيمها متقاربة جدا.

لكن ماذا يحدث لو اختل شرط الإستمرار ؟ هل تكامل ريمان ممكن ؟

يمكننا أن ننظر لهذه المسألة على حالتين:

حالة اختلال مهمل، فلا ننسى أننا نضرب القيمة الممثلة في طول مجال تجزئتها والتي نواصل تصغيرها لكي تؤول للصفر.

فإذا كانت نقاط الخلل لهذه الدالة تقابلها تجزئات يؤول طولها للصفر فهي لن تؤثر على حساب التكامل لأن ضرب قيم الدالة في طول هذه التجزئات سيؤول للصفر فيمكننا اهمال مثل هذا الخلل لأنه غير مؤثر في قيمة التكامل.



هذا ما نسميه بشرط لوبيغ لوجود تكامل ريمان فهو شرط لازم وكافي وهو أن تكون الدالة مستمرة حيثما كان، أي نقاط الخلل في إستمرارها يقابلها مجموعة سوابق قياسها معدوم.

لكن متى كان الخلل في الإستمرار يتجاوز المجموعة المهملة فلا يمكننا التكلم عن ممثل لتجزئة إذن لا يمكننا الكلام عن تكامل ريمان فهذه الحالة الثانية التي نفقد عندها التكامل بمفهوم ريمان.

لوبيغ انطلق من نفس الفكرة لصناعة تكامله لكن بطريقة مختلفة فبما أننا نبحث عن تكميم لقيم الدالة فلماذا لا ننطلق من قيمها ؟

فبدل تجزئة مجال السوابق ثم البحث عن ممثل لكل مجال من قيم الدالة لننطلق مباشرة من قيم الدالة وننظر لقياس مجموعة سوابقها.

ففي النهاية التكامل ما هو إلا مجموع ضرب قيمة الدالة في قياس مجموعة سوابقها.

فيمكننا تجزئة قيم الدالة ثم اختيار واحد منها والنظر لقياس مجموعة سوابقها ثم الضرب والجمع.

فتكامل لوبيغ يرى الدالة ككثافة أي قيم موزعة على مجموعة لكن ليس شرطا أن تكون المجموعة مترابطة كما يرى ريمان في تعريفه للتجزئة.

تكامل لوبيغ ينظر لأصل المشكلة وهي القياس لذلك هو لا يحتاج للإستمرار إنما يحتاج فقط لقابلية القياس.

لما سئل لوبيغ عن الفرق بين تكامله وتكامل ريمان أجاب إذا كان عندك مبلغ من المال في محفظة من عدة فئات قطع نقدية فإن تكامل ريمان يقوم بإخراج القطع النقدية واحدة تلو الأخرى و يقوم بجمعها تباعا للحصول على المبلغ.

أما تكامل لوبيغ فيخرج جميع القطع ثم يضع كل فئة نقدية مع مثيلتها ثم يحسب مجموع كل فئة نقدية ثم يجمع جميع هذا. أه

تكامل لوبيغ أعم من تكامل ريمان وهو أنسب للفيزياء إذ الفيزياء في الأصل علم يعتمد على القياس.

قد نتساءل أيهما أقرب للحدس تكامل لوبيغ أو تكامل ريمان ؟

الجواب تكامل لوبيغ عند التطبيق إذ الهدف من تكميم دالة هو معرفة خصائصها لذلك نقوم بقياسها أي قياس قيمها.

أما تكامل ريمان فهو عملية حسابة تعتمد على صيغة الدالة لذلك هي تُدخل في حساباتها قيم الدالة وسوابقها على عكس تكامل لوبيغ فهو لا يحتاج إلا لقيم الدالة أما عن السوابق فهو ينظر لقياس مجموعات لا لسابقة بعينها.

لذلك تكامل ريمان أنسب لحساب التكاملات التي عندنا صيغها الجبرية ولهذا نربطه عادة بالدالة الأصلية.

أما تكامل لوبيغ فهو أنسب للدوال التي نفتقد لصيغتها ولهذا نربطه بالقياس.

لو تأملنا جيدا لوجدنا أنه لا يوجد فرق جوهري بين التكاملين متى نظرنا لحيثية وهي أن قياس مجموعة سوابق أليس بتقريب من أطوال مفتوحات ؟



ألا يذكرنا هذا بالتجزئة ؟

وكأن تكامل لوبيغ يقول لنا لماذا لا نعيد ترتيب مجموعة السوابق على شكل مجالات ثم نحسب طول كل مجال ثم نضرب في قيمة ممثله...

مشكلة تكامل ريمان أنه أدخل علاقة الترتيب في حساباته وهذا ما يبينه شرح لوبيغ بمثال القطع النقدية فهذا الترتيب في التجزئات هو الذي أحدث الخلل ولو نظر للتجزئة كقيم عشوائية لكن مجموعتها قابلة للقياس لأصبح تكامل لوبيغ.

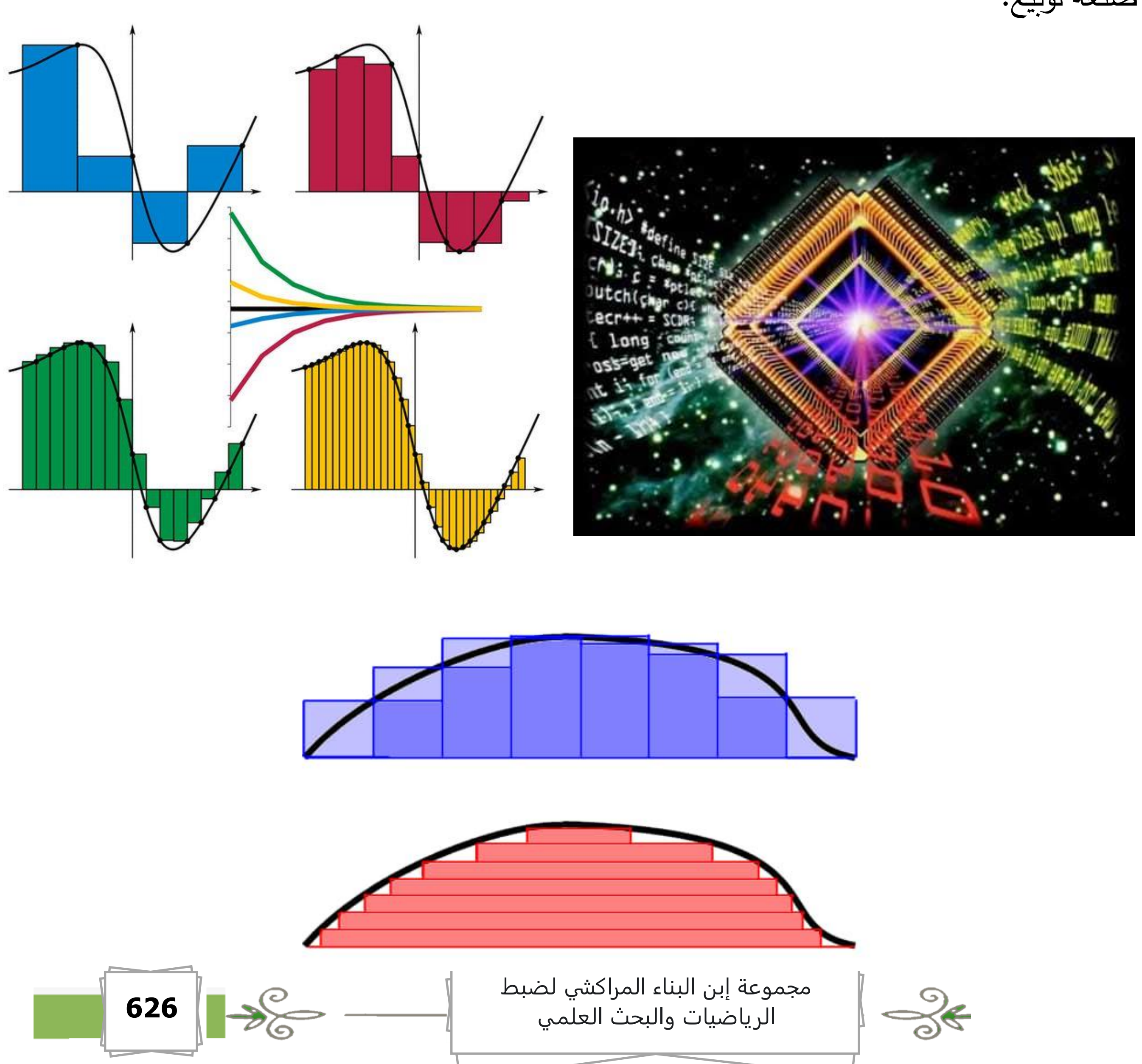
لوبيغ يقول لنا تكميم دالة يحتاج لقيمها وطبولوجيا فما دخل علاقة الترتيب في السوابق في المسألة ؟

ريمان احتاج لعلاقة الترتيب حتى يحول مجموعة السوابق إلى أجزاء قابلة للتكميم فيعطي معنى لكمية الدالة.

لوبيغ قال لا نحتاج للترتيب فالتجزئة مع المحافظة على التكميم ممكنة عبر للقياس.

فعلاقة الترتيب هنا مجرد وسيلة لا غاية في حساب التكامل فكل ما فعله لوبيغ هو الاستغناء عنها.

والحق أنه رياضيا لا دخل للدالة بعلاقة الترتيب فالترتيب مجرد نظرتنا لمجموعة فهو مجرد اختيار مهما غيرناه فالدالة لا تتغير فهو شيء زائد على الدالة فلا يمكن أن يكون ضروريا لحساب كميتها فهذا الذي صنعه لوبيغ.



الدالة بين تكامل ريمان، تكامل لوبيغ، وتكامل كورزويل– هينستوك : نحو تكامل أعم من تكامل لوبيغ.

رأينا في المقال السابق الفرق بين تكامل لوبيغ وتكامل ريمان:

(الدالة بين تكامل ريمان وتكامل لوبيغ : التكامل كأنك تراه)

وذكرنا أن فكرة ريمان لتكميم الدالة هي تجزئة مجال تعريفها ثم إختيار ممثل من صور الدالة على كل تجزئة وحساب نهاية ضرب قيمة ممثل الدالة في طول تجزئته عندما يؤول طول التجزئة إلى الصفر.

تكامل ريمان بسط هذه الفكرة إذ تجزئته هي تقسيم للمجال على عدد n من الأجزاء ولما n يؤول للمالانهاية نحصل على طول تجزئة يؤول للصفر.

أما لوبيغ فعمم الفكرة ولم ينظر لتجزئة المجال كترتيب قطع إنما أخذ مجموعات قابلية للقياس حسب صورها فيمكننا أن نرى تكامل لوبيغ كتعميم لطريقة التجزئة فكل جزء من تجزئته مفرق على مجموعة قابلة للقياس إلا أنه يقارن طوله بمجموع أطوال مجالات لأن مجموعات القياس في الأصل مولدة من مجالات.

بين التكاملين هناك تكاملات أخرى اهتمت بطرق مختلفة للتجزئة.

منها تكامل كورزويل–هينستوك (سنة 1950) Intégrale de Kurzweil–Henstock

فبدل تقسيم المجال على قطع متساوية في الطول فهذا التكامل يأخذ تجزئة كيفية مع ممثل لكل جزء فإذا كان عندنا مجال من a إلى b فيكون لدينا تجزئة $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$

وممثل لكل تجزئة $x_0 \leq t_0 \leq x_1 \leq t_1 \leq ... \leq t_{n-1} \leq x_n$

لم يبقى إلا أن نجعل طول مجالات التجزئة يؤول للصفر ويتم هذا بإختيار مقياس بدالة δ موجبة تماما معرفة على المجال بحيث $x_{i+1} - x_i \leq \delta(t_i)$ فنطلق عليها إسم δ دقيقة δ-fine

وتكون تجزئتنا المختارة من نوع δ-fine

هناك توطئة مهمة تسمى Lemme de Cousin

للفرنسي Pierre Cousin تخبرنا انه من ان أجل كل δ-fine يمكن إيجاد تجزئة أدق منها.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Lemme_de_Cousin

فعلى هذا يمكننا تعريف التكامل بطريقة مشابهة لمجاميع ريمان $\sum (x_{i+1} - x_i) f(t_i)$

ويكفي ان نختار متتالية دوال δ-fine تؤول للصفر لجعل المجموع يقترب من قيمة نسميها التكامل.

رياضيا صياغة التكامل بمفهوم كورزويل– هينستوك تطلب أنه مهما كان الإبسيلون المختار توجد δ-fine بحيث كل تجزئة من نوع δ-fine تجعل الفرق بين المجموع وقيمة التكامل أقل من الإبسيلون.

هذا التعريف للتكامل أعم من تعريف ريمان ففي حالة ريمان δ-fine هي الدوال الدرجية وقيمتها:

$\delta(t_i) = x_{i+1} - x_i$

فتكامل كورزويل–هينستوك تعميم لطيف لتكامل ريمان يلعب على كيفية النظر للتجزئة وجعلها تؤول للصفر لكنه يخفي نقاط عدم الإستمرار التي قد تحدث مشكلة في تكامل ريمان تحت اختيار t_i و δ .



السؤال الذي يطرح نفسه ما علاقة هذا التكامل (والذي نرمز للدالة القابلة للمكاملة به بقابلة للمكاملة بمفهوم KH) بتكامل لوبيغ ؟

الجواب الذي ستستغربونه أن تكامل كورزويل- هينستوك أعم من تكامل لوبيغ أي كل دالة قابلة للتكامل بمفهوم لوبيغ فهي قابلة للمكاملة بمفهوم كورزويل- هينستوك

المهم في الأمر أن مبرهنة التقارب الرتيب ومبرهنة التقارب المهيمن تبقى صالحتين مع تكامل KH .

الغريب في الأمر أنه على عكس تكامل لوبيغ إذا كانت الدالة قابلة للمكاملة بمفهوم KH فلا ينتج أن قيمتها المطلقة قابلة للمكاملة بمفهوم KH .

من نتائج هذا التكامل أن أي دالة f قابلة للمكاملة بمفهوم KH فالدالة المعرفة بتكاملها مستمرة و قابلة للإشتقاق حيثما كان بتساوي مع f .

بل كل دالة قابلة للإشتقاق مشتقتها قابلة للمكاملة بمفهوم KH .

فيمكننا أخذ مثال: $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$

المعرفة على مجال الوحدة والممدة بالصفر عند الصفر.

فالدالة قابلة للإشتقاق وهي من نوع KH لكن رغم ذلك مشتقتها غير قابلة للمكاملة بمفهوم لوبيغ لعدم محدوديتها.

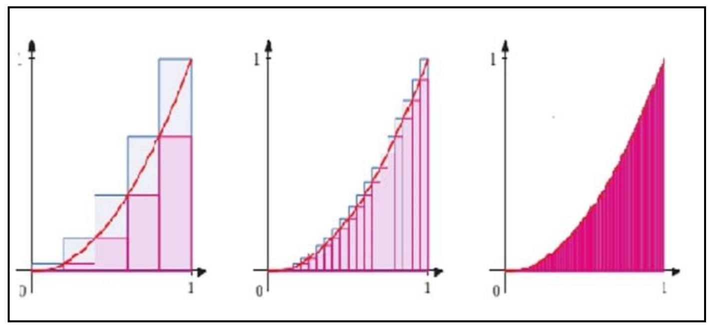
يعتبر تكامل KH طريقة أفضل لتعريف التكامل مقابل تكامل ريمان وذو نتائج قوية مماثلة لتكامل لوبيغ كمبرهنتي التقارب الرتيب والتقارب المهيمن دون اللجوء لنظرية القياس.

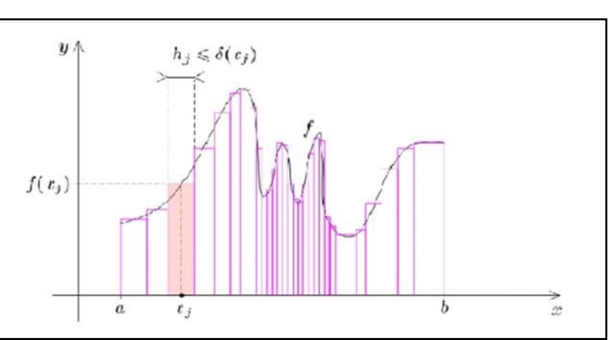
إلا أنه تكامل مقتصر على R^n بعكس تكامل لوبيغ الذي يمكن القيام به على أي مجموعة مزودة بالقياس .

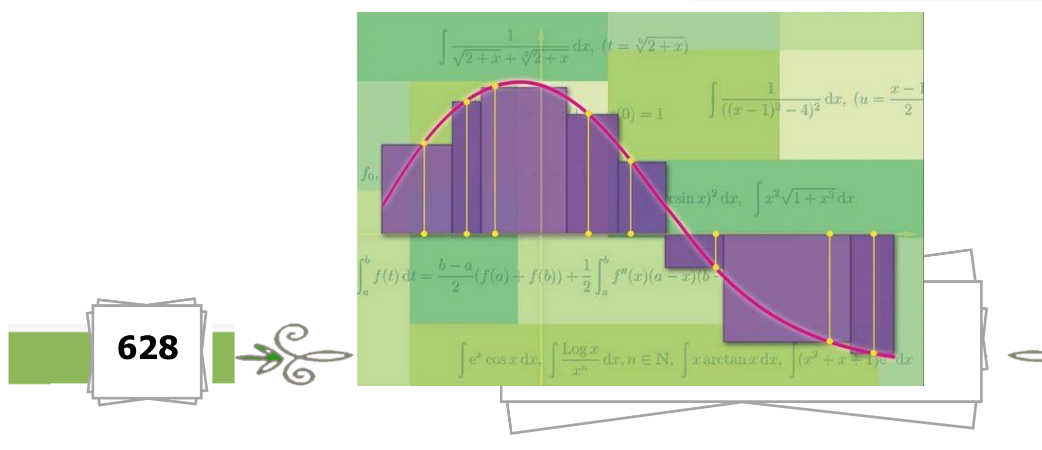
https://fr.m.wikipedia.org/.../Int%C3%A9grale_de_Kurzweil...

https://www.math.u-psud.fr/.../Inte.../kurzweil-henstock.pdf

http://memoirepfe.fst-usmba.ac.ma/get/pdf/2984







الدالة بين تكامل ريمان، تكامل ستلجس، تكامل هيتو : نحو تكميم أعم للدالة

لقد رأينا سابقا كيفية تكميم الدالة عن طريق تكامل ريمان وتكامل لوبيغ وتكامل كورزويل– هينستوك.

كل هذه التكاملات تحمل فكرة واحدة وهي اختيار قيم ممثلة للدالة وضرب صورها في قياس سوابقها ثم جمعها.

فكل هذه التكاملات تنظر للدالة كتوزيع لقيم على مجموعة سوابق ولجمعها تحاول صناعة جداء بين الصور والسوابق لا كقيم سوابق وإنما كقياس مجموعات.

المشكل الذي يواجه الفيزياء عند التطبيق هي القياسات فكما قلنا سابقا في الواقع ليس لدينا دائما صيغ للدالة إنما نلجأ للقياسات لحساب قيمها.

قد يقال مادام عندنا قياسات فيمكننا حساب هذه التكاملات رقميا لكن المسألة ليست بهذه السهولة إذ هذه نظرة من يرى الزمن كمجموعة هادئة خالية من الشوائب وكذلك المسافة.

لكن في الواقع عند القياس نحن لا نقيس صور الدالة فقط إنما نقيس صور الدالة وكذلك نقيس قيم السوابق فما نسميه زمنا هو في الواقع جهاز نقيس به الزمن فهو في حد ذاته دالة معرضة لأخطاء القياس.

إذن نحن نقيس دوال بدوال لذلك التكاملات العادية مثل ريمان ولوبيغ هي تكاملات مثالية أما عند التطبيق فالمسألة أصعب من مجرد جمع وضرب.

لمعالجة هذه المسألة يمكننا اعتبار تكميم الدالة يتم بالنسبة لدالة أخرى فبدل تكميم دالة f بتكامل

$\int f(x)\, dx$

يمكننا تكميم دالة مقارنة بدالة قياس أو تجربة $\int f(x)\, \varphi(x)\, dx$

تكامل ستيلجس يأخذ هذا المفهوم فهو يعمم مجاميع ريمان $\sum f(t_i)\, (\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))$

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Int%C3%A9grale_de_Stieltjes

وكذلك تكامل ستيلجس لوبيغ فهو يعمم تكامل لوبيغ

https://fr.m.wikipedia.org/.../Int%C3%A9gration_de...

نظرية القياس للوبيغ كذلك تعمم تكاملها عن طريق التوزيعات بطريقة مشابهة.

تكامل هيتو أو ما يسمى بتكامل H يأخذ نفس طريقة تكامل ستيلجس لكن من ناحية حساب العمليات العشوائية .

فدالة القياس تعوض بعملية وينر أو الحركة البورونية والدالة f تعوض بدالة العمليات العشوائية المرشحة لعملية وينر.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Int%C3%A9grale_d%27It%C5%8D

الذي يهمنا في مثل هذه التكاملات هي طريقة التكميم فالطريقة عموما تتم عن طريق مجموع لجداءات بين قيم دالتين.

يذكرنا هذا بالجداء السلمي المعرف عن طريق تكامل لوبيغ والذي يمثل تأثير دالة في أخرى.

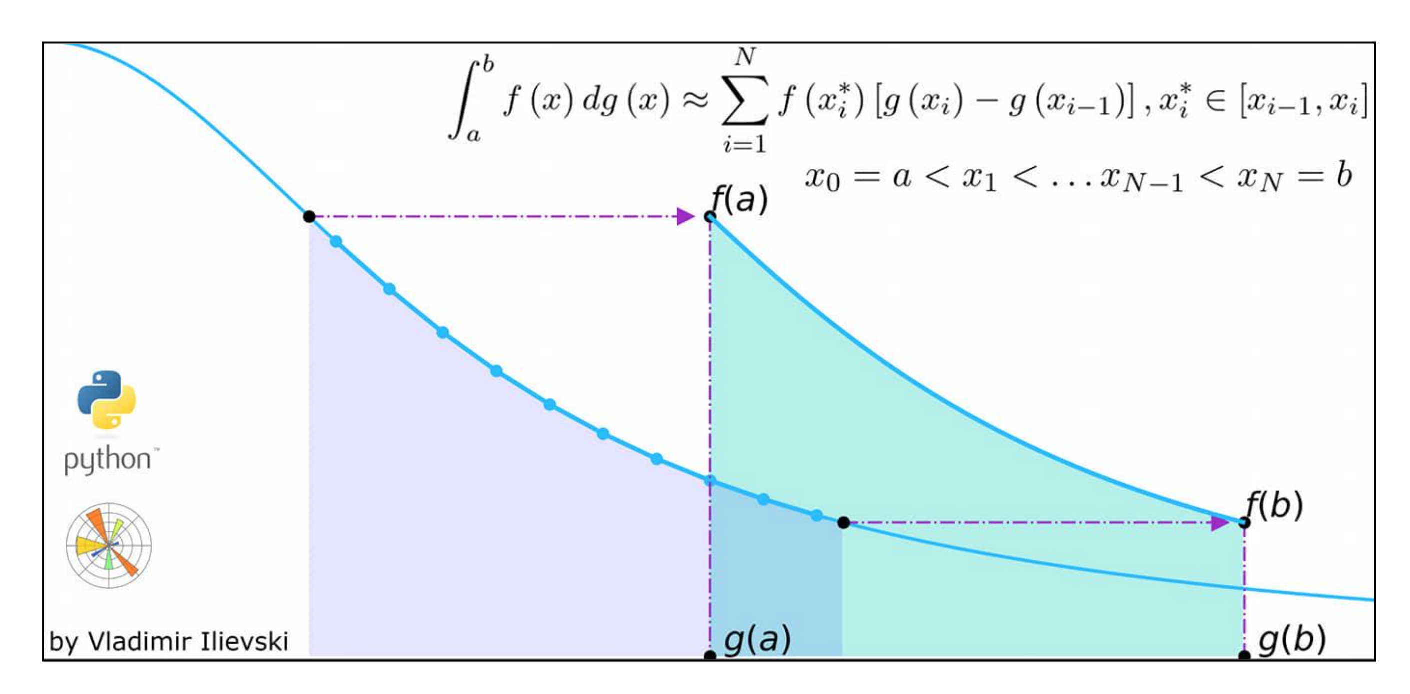
هذه الطريقة في تكميم الدوال لها تطبيقات متعددة كالتكامل في الهندسة التفاضلية على المنحنيات

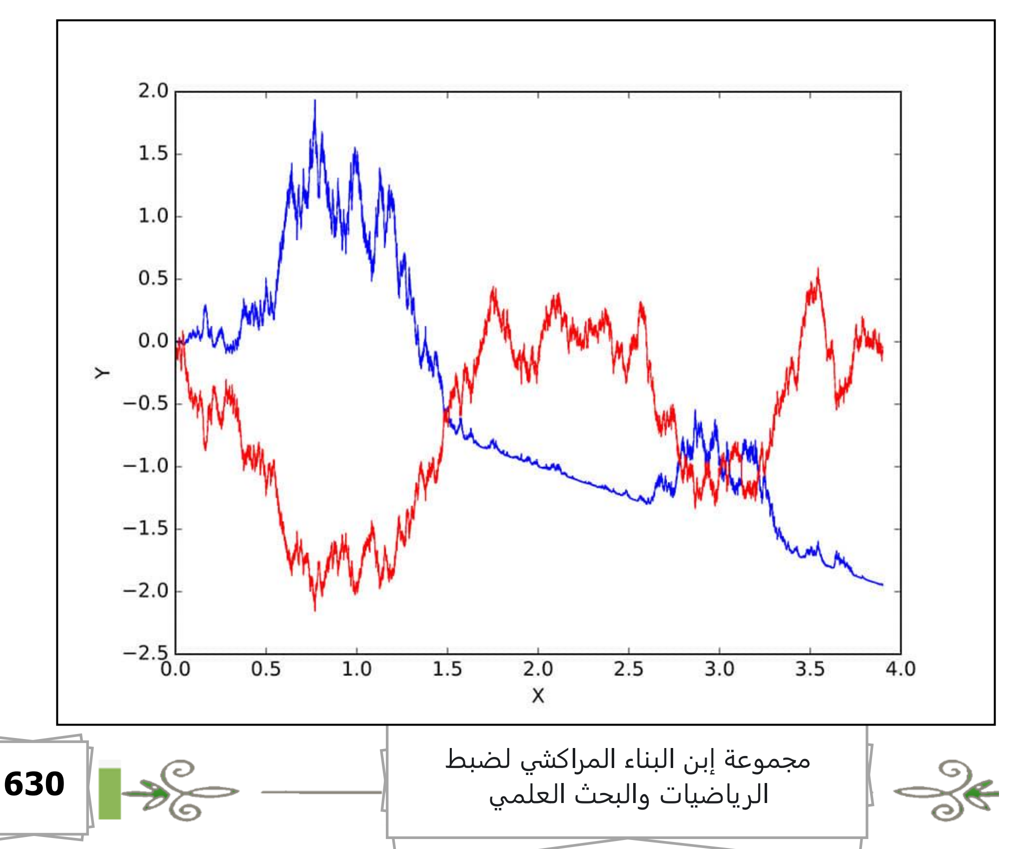
https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Int%C3%A9grale_curviligne

وتكامل ستراتونوفيتش وهو من قبيل تكامل هيتو

https://en.m.wikipedia.org/wiki/Stratonovich_integral

ميدان التكاملات مازال مفتوحا فالحاجة تدعوا إليه إذ يعتبر التكامل بصفة عامة طريقة لتكميم الدالة من منظور معين سواء المساحات والحجوم وفي هذا يستعمل تكامل ريمان أو من حيث قياس الكثافة كما هو الحال مع تكامل لوبيغ أو من حيث قياس العشوائية كما هو الحال مع تكامل هيتو.





1872 – Weierstrass construit une fonction continue qui n'est dérivable en aucun point.

1881 – Jordan introduit les fonctions dites *à variation bornée*, et plus tard en 1887, il montre qu'elles sont naturellement reliées à la rectifiabilité des courbes.

1883 – Cantor introduit l'ensemble ternaire qui porte son nom, source de nombreux contre-exemples pathologiques mais intéressants (*cf.* le chapitre qui suit).

1890 – Peano construit une courbe continue qui parcourt tous les points d'un carré.

1898 – Borel introduit les ensembles mesurables.

1902 – Lebesgue développe la théorie de la mesure et la théorie de l'intégration.

1905 – Vitali construit un ensemble non-mesurable en utilisant l'Axiome du choix.

1906 – Fatou applique la théorie de Lebesgue à l'Analyse Complexe.

التكامل المضاعف، مبرهنة فوبيني، تكامل غوص

مبرهنة فوبيني (Théorème de Fubinil) تتعلق بالتكامل على الجداء الديكارتي لفضائين مزودين بقياسين على شرط أن يكون كل من القياس تاما أي يشمل جميع مجموعاته المهملة وعليه:

إن زود الفضاء الأول بقياس $\mu(x)$ والثاني بقياس $\mu(y)$ وكان قياس الجداء المولد بهما $\mu(x,y)$ وكانت الدالة $f(x,y)$ كمولة على قياس الجداء فإنه يمكن حساب هذا التكامل بالتكامل المضاعف أو بصيغة أخرى بحساب التكامل مرتين ولا يهم عند المكاملة ترتيب الفضاء الذي نبدأ به أو بصياغة أخرى ترتيب المتغير أي

$$\int f(x,y)\, d\mu(x,y) = \int\left(\int f(x,y)\, d\mu(x)\right) d\mu(y)$$
$$= \int\left(\int f(x,y)\, d\mu(y)\right) d\mu(x)$$

فيمكننا أن نبدأ بالمكاملة بالنسبة ل x ثم y أو العكس.

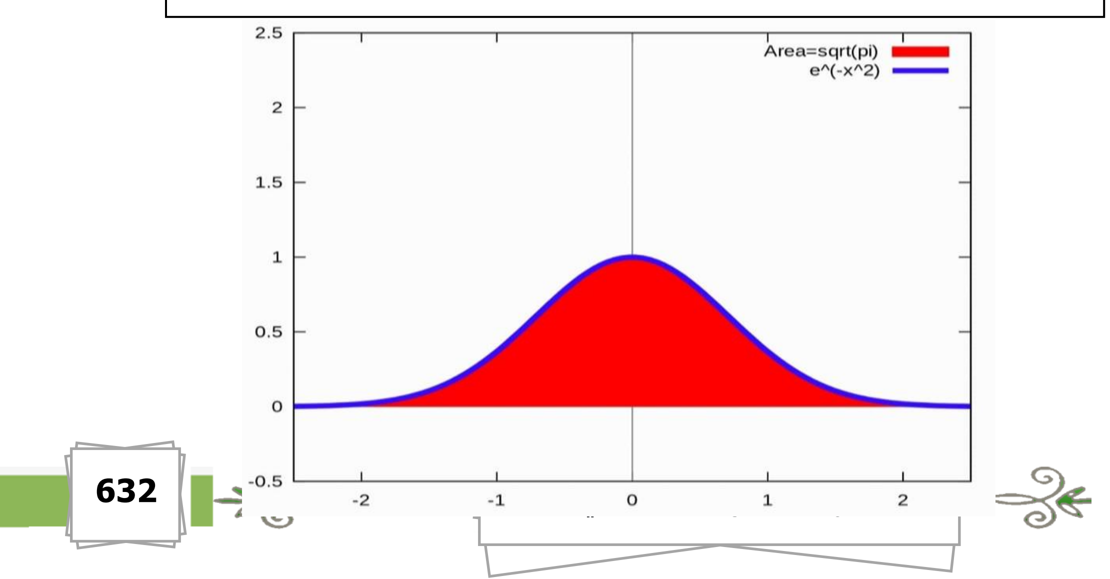
https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Fubini

كتطبيق عملي يمكننا حساب تكامل غوص

عن طريق التكامل المضاعف.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Int%C3%A9grale_de_Gauss

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2}\, dr \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{0} \tfrac{1}{2} e^{s}\, ds \qquad\qquad s = -r^2 \\
&= \pi \int_{-\infty}^{0} e^{s}\, ds \\
&= \pi \left(e^0 - e^{-\infty}\right) \\
&= \pi,
\end{aligned}$$



بين الواقع والرياضيات : تكامل لوبيغ والبنية الجبرية نموذجا

إن قوة الرياضيات تكمن في ضبط نتائجها إذا ضبطت معطياتها، لذلك كان الإنسان ولا يزال يمر من الواقع نحو الرياضيات لإجراء العمليات ثم الرجوع إلى الواقع لاستخدامها.

فهذا الذي نراه من بقايا الحضارات السابقة كالأهرامات وما نراه اليوم من طائرات ما كان ليكون لولا استخدام الرياضيات.

لكن مشكلتين تعوقان الإنسان من المرور من الواقع إلى الرياضيات و الرجوع من الرياضيات إلى الواقع.

المشكلة الأولى التكميم : فالرياضيات تحتاج لمقادير مضبوطة ،لكن تكميم ملاحظات الواقع لصناعتها رياضيا ليس بالأمر الهين لذلك قام الإنسان بتقريب الواقع وذلك بوضع مقادير متفرقة قياسية بوحدات مفترضة كالمتر والكيلوغرام وتجارب لتحديد قيم متفرقة لدوال حتى يمكنه بهذه المقادير تقريب الواقع من كائنات رياضية كالدالة الاسية والمعادلات التفاضلية وغير ذلك.

لكن المشكلة الثانية أن المرور من هذه الكائنات بعد العمليات الرياضية إلى الواقع ليس بالأمر الممكن إذ الرياضيات تتعامل كثير مع المالانهايات ومنها غير القابل للعد والإنسان ليس بإمكانه إدراك ذلك.

لذلك قام الإنسان بصناعة مفاهيم رياضية منتهية لتقريب الرياضيات من الواقع.

فمن هذا المنطلق نجد تكامل لوبيغ ففي الحقيقة لو نظرنا للتكامل لوجدناه مجرد محاولة لتكميم قيم الدالة مقابل مجموعة انطلاقها كالمساحة مثلا.

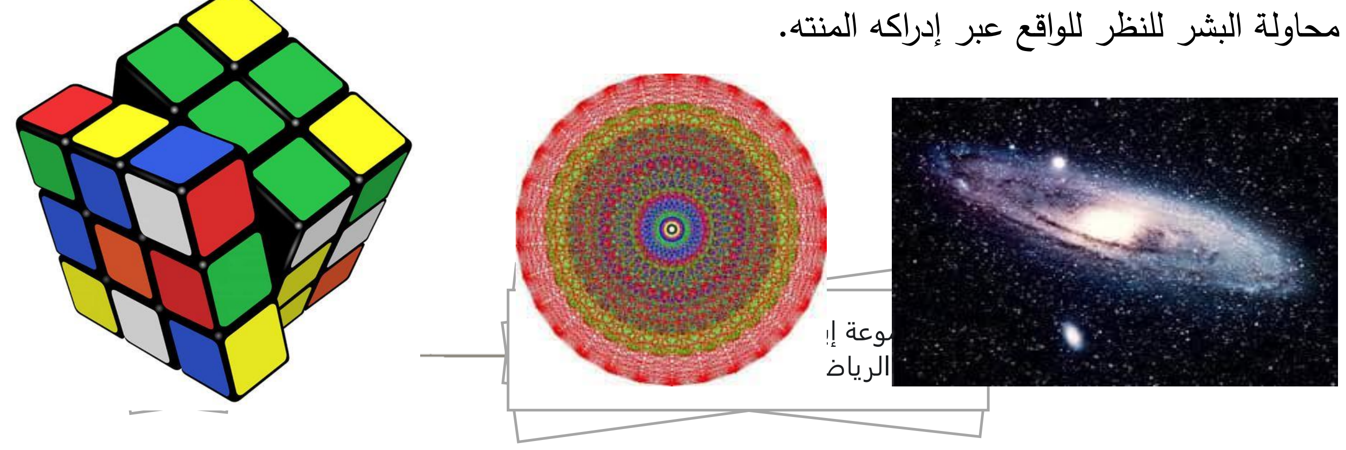
فلو أخذنا مجموعة قيم منتهية فالمسالة سهلة يمكن حساب مجموع قيم الدالة بواسطة عملية جبرية فتعطيك النتيجة رؤية عامة عن الدالة.

فإذا انتقلنا إلى المجموعات القابلة للعد وغير المنتهية يمكننا استعمال نفس طريقة بحساب القيمة المتوسطة للدالة لكن بالنهايات و هنا سنلجأ للقسمة على العدد فالبنية الجبرية وحدها لا تكفي لذلك نلجأ إلى الطبولوجيا عبر مفهوم النهاية.

لكن المشكل يطرح عندما نذهب إلى مجموعات غير قابلة للعد كالأعداد الحقيقية فهنا لا معنى للجمع والقسمة على العدد لكن بمكننا تعويض عدد عناصر المجموعة بقياسها فتكون القيمة الكلية للدالة ما هي إلا تقريب لمجموع قيم الدالة في قياس مجموعات سوابقها وهذا هو تكامل لوبيغ.

فالعدد الناتج منته وله معنى يمكن استعماله في الواقع.

فما نراه من البنى الجبرية والبنى الطبولوجية واستعمالاتهما في النظريات الرياضية كنظرية القياس ما هو إلا محاولة البشر للنظر للواقع عبر إدراكه المنته.



التكامل والحواف : من المبرهنات الأساسية في التحليل إلى مبرهنة ستوكس Théorème de Stokes **ومبرهنة الرواسب** Théorème des résidus

في المقال سنتعرض لمفاهيم متعددة حول التكامل منها البسيط المألوف ومنها المعقد وليس المقصود الخوض في دقائق كل منها لكن المقصود هو النظر إليها من حيث سلوك الدوال.

للتحليل مبرهنتان أساسيتان:

الأولى تنص على أنه إذا كانت الدالة الحقيقية f قابلة للمكاملة محليا بمفهوم ريمان وعرفنا دالة تكاملها على مجال $[a,x]$ بـ $F(x) = \int_{[a,x]} f(t)\, dt$ وكانت الدالة f مستمرة فإن الدالة F قابلة للاشتقاق ومشتقتها هي f .

وأنه كل دالة أصلية G لـ f تحقق $G - F = c$ ثابتة.

أما المبرهنة الثانية في التحليل فتنص على أنه إذا قبلت دالة حقيقية f دالة أصلية F على مجال من a نحو b فهي قابلة للمكاملة حسب ريمان ومنه كذلك حسب لوبيغ وتكاملها يعطي بـ:

$\int_{[a,b]} f(t)\, dt = F(b) - F(a)$

https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8me...

العلاقة بين التكامل والمشتقة والدالة الأصلية قديمة تعود لأعمال

James Gregory

Isaac Barrow

Isaac Newton

Gottfried Wilhelm Leibniz

والمبرهنات الأساسية للتحليل تنسب لنيوتن لأنه.

إلا أنها في الرياضيات تربط بتكامل ريمان وتكامل لوبيغ لأنها نظريات المكاملة الأكثر نضوجا والتي تخلصت بما يعرف قبل ذلك بالقيم المتناهية في الصغر وأعطت إطارا رياضيا مضبوطا لدراستها.

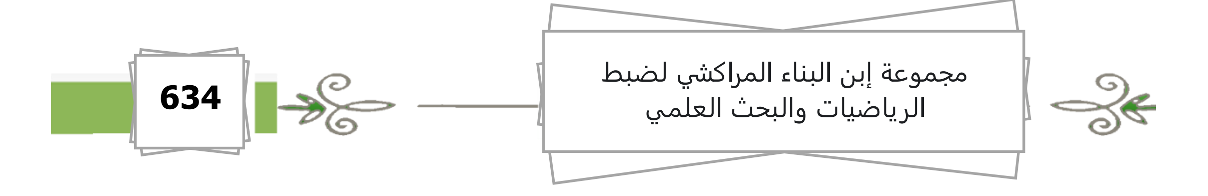
الذي يهمنا في هذا المقال هي علاقة هذه التكاملات بالحواف عندما تلتقي مع الدالة الأصلية.

قبل ذلك لابد أن نلتفت إلى شيء مهم وهو علاقة الاستمرار بالتكامل وبالاشتقاق.

الدوال التي تقبل دالة أصلية تنتمي لعائلة دوال داربو ذلك أنها تنقل مجال لمجال أي تحقق خاصية مبرهنة القيم المتوسطة رغم أنها قد لا تكون مستمرة.

لكن حسب مبرهنة بير فالمشتقة دائما مستمرة حيثما كان ولذلك فتكامل ريمان موجود بالنسبة لها لتحقق شرط لوبيغ لوجود تكامل ريمان.

للتذكير لوبيغ ينص على أنه إذا كانت الدالة مستمرة حيثما كان فهي تقبل المكاملة حسب ريمان والشرط هنا تكافؤ وليس مجرد استلزام.



هذا الشرط يفسر بأن نقاط عدم الاستمرارية مهملة فقياسها لا يؤثر في التكامل.

حسب المبرهنة الأساسية الثانية في التحليل متى قبلت دالة f دالة أصلية F على المجال $[a,b]$

فهي تقبل التكامل بمفهوم ريمان (ومنه كذلك بمفهوم لوبيغ) وتكاملها يساوي $F(b) - F(a)$

لكن تكامل ريمان معرف بنهاية المجموع: $\sum f(x_i)\,(x_i - x_{i-1})$

فما الذي يجعله في حالة وجود الدالة الأصلية متعلقا بقيمتها عند الحواف ؟

في الحقيقة المسألة أعم من تكامل ريمان بل تتعدى ذلك لتكامل لوبيغ وكل التكاملات التي يشملها.

حتى أن هناك هناك تعميمات لتكامل Kurzweil–Henstock

لذلك المسألة متعلقة بخصائص التكامل نفسها وهذا يمكن تفسيره **بأمرين**:

الخطية التي يتمتع بها التكامل

والاستمرار حيثما كان للدالة

فإذا جزأنا المجال لتقسيمات مجالات غير متداخلة

$$[a,b] = \cup\ [x_i\ ,\ x_{i+1}]$$
$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \sum\int_{[x_i,x_{i+1}]} f(x)\,dx$$

فالتكامل في الأصل مجاميع لقيم محلية.

لكن بمبرهنة التزايدات المنتهية نعلم أن $F(x_{i+1}) - F(x_i) = (x_{i+1} - x_i)\,f(c)$

استمرار f حيثما كان يجعلنا في مجال صغير نستطيع اختيار أي ممثل لها من قيمه غير الشاذة وهذا يعني أن $f(x)\ ,\ f(c)$ ممثلان متقاربان في المجال $[x_i,x_{i+1}]$ إذ الفرق بينهما مهمل.

أي أنه من تعريف التكامل سواء حسب ريمان أو حسب لوبيغ القيمة $\int[x_i,x_{i+1}]\,f(x)\,dx$ ستقترب من $(x_{i+1} - x_i)\,f(a_i)$ حيث a_i أي ممثل ل f على هذا المجال فيمكن أخذ x_i أو c .

أي أن تعريف التكامل كيفما كان مفهومه متى كانت الدالة مستمرة حيثما كان سيعود لجمع قيم صغيرة من نوع $(x_{i+1} - x_i)\,f(a_i)$ والتي هي نفسها تعكس الاشتقاق كما تنص عليه مبرهنة التزايدات المنتهية.

$$(F(x_{i+1}) - F(x_i))/(x_{i+1} - x_i)$$

فنحن نقوم محليا بعملية عكسية للإشتقاق عند تعريف التكامل بالمجاميع ولذلك تظهر الدالة الأصلية محليا.

بسبب تعريف التكامل كمجموع تجعل الخطية المسألة تتعلق بالحواف من حواف محلية إلى حواف كلية

$$F(b) - F(a) = \sum\,(F(x_{i+1}) - F(x_i))$$

إذن التكامل من طريقة تعريفه بمجاميع ريمان وما يشابهها يظهر كعملية عكسية للاشتقاق محليا تجعله متعلق بالحواف المحلية فيظهر الفرق في الدالة الأصلية بين الحافتين وعند الجمع تعطي الفرق بين الحافة الكلية.

الذي يتبادر للذهن كسؤال هل هذه نتيجة خاصة بمجموعة الأعداد الحقيقية أو هي أعم.

في الحقيقة هي أعم فيمكن تعميمها للدوال العقدية عن طريق المسارات.



فإذا كانت الدالة العقدية f معرفة على مفتوح U وكانت تقبل دالة أصلية F هولومورفية واخترنا مسار ɣ من a نحو b فإن تكامل f على هذا المسار يعطى بـ:

$$\int[\gamma] f(x)\, dx = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

بل هذه المبرهنة تعمم لأكثر من ذلك وهي مبرهنة ستوكس وأحيانا تسمى مبرهنة ستوكس كارتان

théorème de Stokes–Cartan

وهي نتيجة في التكامل على المنوعات التفاضلية والتي تنص على أنه إذا كانت M منوعة تفاضلية ذو بعد n و ω هي n-1 شكل تفاضلي ذو حامل متراص على M من صنف C^1 فإن

$$\int[M]\, d\omega = \int[\partial M]\, i^* \omega$$

حيث يمثل d المشتق الخارجي

وتمثل ∂M حافة M الموجهة بالتوجيه المطلوب

و i

$$i : \partial M \to M$$

الغمر القانوني.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Stokes

بعيدا عن الدخول في تفاصيل هذه المبرهنة، الذي نريد أن نلفت النظر إليه أنه متى كانت الدالة تقبل دالة أصلية فمسألة التكامل تعود للحواف وهذا مهم جدا في التطبيقات الفيزيائية إذ يحول الدراسة التكاملية من النظر للمادة نقطة نقطة في حجمها إلى دراسة سطوح ولهذا تطبيقات متعددة خاصة في ميكانيك السوائل.

لكن السؤال الذي يطرح ماذا لو كانت الدالة تقبل نقاطا شاذة على هذا المفتوح ؟

الجواب هذا ما تنص عليه مبرهنة الرواسب في الدوال العقدية فمتى كانت دالة f هولومورفية معرفة على مفتوح محدب ببساطة ما عدا على عدد منته من النقاط Z_k وكان ɣ مسار مغلق من U لا يلتقي من النقاط Z_k فتكامل الدالة على المسار ɣ يساوي 2 i π مضروبة في رواسب f مضروب عند النقاط Z_k مضرب عند مل منها في عدد الدورات حولها داخل المنحنىɣ

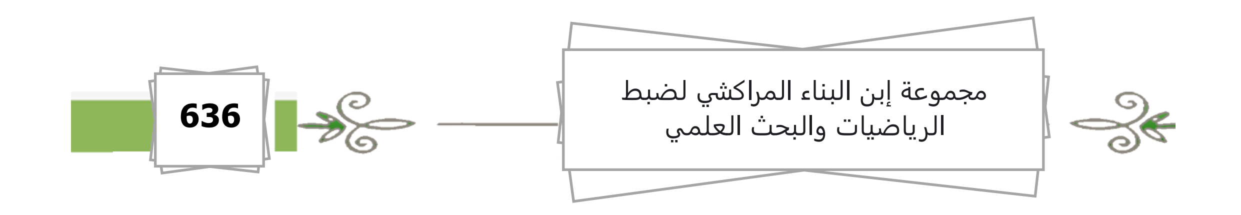
https://fr.m.wikipedia.org/.../Th%C3%A9or%C3%A8me_des_r...

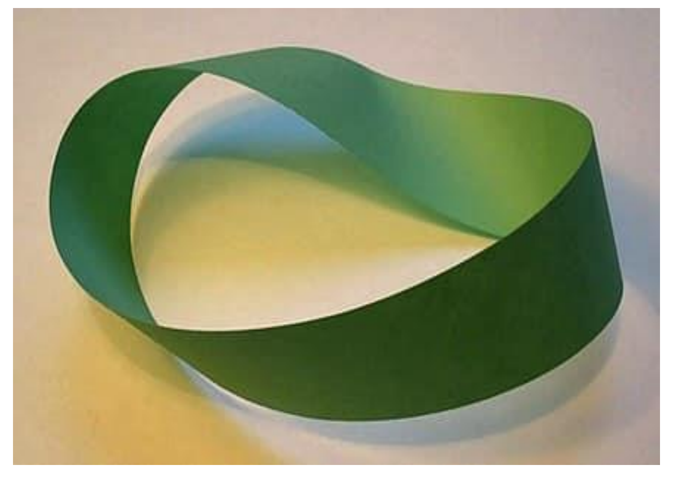
والمبرهنة لها تعميمات على المنوعات التفاضلية فمن لديه الجرأة والصبر يمكنه النظر في هذه الروابط

https://www.researchgate.net/.../281887049_Un_concept...

https://aif.centre-mersenne.org/item/10.5802/aif.1255.pdf

الذي نستخلصه هنا أن دراسة التكاملات ترجعنا لدراسة الحواف والنقاط الشاذة فهذا الذي يجب أن ينتبه إليه المشتغل بالرياضيات العالية إذا اقتحم ميدان البحث والتعميم.







Théorème de Stokes — Soit M une variété différentielle orientée de dimension n, et ω une $(n-1)$-forme différentielle à support compact sur M de classe C^1. Alors, on a :

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} i^*\omega$$

où d désigne la dérivée extérieure, ∂M le bord de M, muni de l'orientation sortante, et $i : \partial M \to M$ est l'injection canonique.

Soient U un sous-ensemble ouvert et simplement connexe du plan complexe $\mathbb{C}$, $\{z_1, \ldots, z_n\}$ un ensemble de n points de U, et f une fonction définie et holomorphe sur $U \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$.

Si γ est une courbe rectifiable dans U qui ne rencontre aucun des points singuliers z_k et dont le point de départ correspond au point d'arrivée (c'est-à-dire un lacet rectifiable), alors :

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)\,\operatorname{Ind}_\gamma(z_k)$$

Ici, $\operatorname{Res}(f,z_k)$ désigne le résidu de f en z_k, et $\operatorname{Ind}_\gamma(z_k)$ l'indice du lacet γ par rapport à z_k.

الاحتمالات:

نظرات في الاحتمالات

لا تأثير لا تغيير ، نفس المعطيات تعطي نفس النتيجة، هذا هو القانون الكوني الملاحظ.

من نتائج هذا القانون أن رمي نرد بستة أوجه ليس له أن يفضل وجها على آخر ذلك أن الأوجه كلها متقايسة من حيث المادة إن قلبت أحدها مع آخر لا يتغير شيء.

لكن النرد عندما يسقط لا يمكنه اختيار الستة أوجه في آن واحد فكون ظهور كل وجه يلغي ظهور باقي الأوجه يجبر التجربة على اختيار وجه بعينه.

لكن ماذا يحدث إذا كررنا تجربة رمي النرد بعدد لا نهائي من المرات ؟

فإذا رأينا هذا التكرار اللانهائي كتجربة واحدة، فالتجربة لها نفس المعطيات إذن لابد أن تعطي نتيجة متجانسة كتجانس أوجه النرد فليس لها تفضيل ظهور وجه على آخر فلابد أن تكون حالات ظهور الأوجه متقايسة من حيث كمية الحدوث.

هذا المبدأ نحاول تكميمه بحساب كمية كل حالة من حيث التركيب مقابل الحالات الأخرى فسميناه بالاحتمال الاحتمال ما هو إلا طريقة بشرية لتكميم وقوع حادثة مقارنة بجميع الحوادث.

فإذا فهمنا هذا فهمنا مبدأ التطابق الكمي في فيزياء الكم لماذا إذا أمكن للإلكترون أن يكون في عدة حالات فهو خليط بينها لكن إذا راقبناه وجدنا حالة واحدة!!

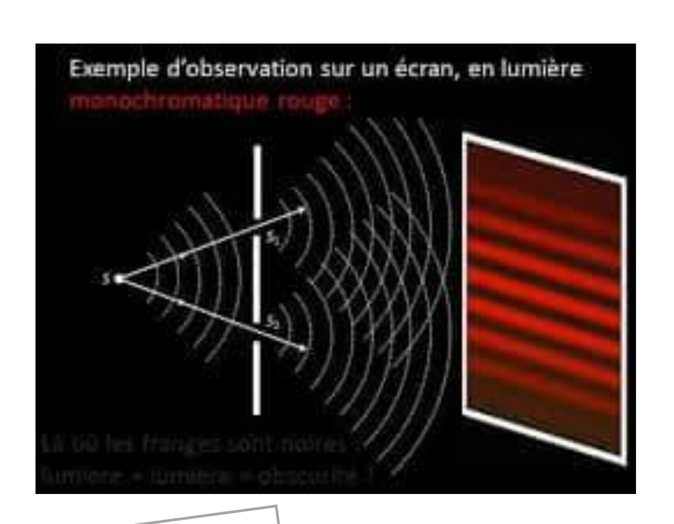
فالإلكترون يخضع لنفس القانون الكوني ذلك أنه متى أرغمناه على الظهور اختار وضعية واحدة لكن لو كررنا ذلك مع عدد غير منته من الإلكترونات فسنجد كمية ظهور كل وضعية متجانسة مع الباقي ذلك أنه ليس لتجربتنا أن تفضل وضعية على أخرى لتماثلها وهذا ما يقع في تجربة شقي يونغ

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Fentes_de_Young

ما نسميه إرغام على الظهور تجاوز لغوي إذ الذي يظهر هو نتيجة تداخل التجربة بين المراقب والإلكترون.

فالاحتمالات ما هي إلا تكميم لقانون لا تأثير لا تغيير ولا تغيير بلا تأثير كل التجارب تخضع لنفس القوانين الكونية.





المشاغب والقط المتشغشبرودنجر والإحتمالات مطبقة في فيزياء الكم

القط : يا مشاغب فهمني في هذا الإلكترون هل هو جسم أو موجة ؟

المشاغب : هذا يقودنا إلى تجربة شقي يونغ فهذه التجربة تقوم على وضع مصدر يصدر إلكترونات متتابعة واحد تلو الآخر، وأمامها نضع حاجزا به شقين ومن أمامه شاشة.

العقل يقول الإلكترون سيمر من أحد الشقين ليظهر على الشاشة وهذا ما نلاحظه، الإلكترون يرسم نقطة على الشاشة.

لكن لو تركنا التجربة لأربع وعشرين ساعة نرى عجبا في الشاشة إذ مجموع نقاط وقوع الإلكترونات تصنع أشرطة عمودية متناوبة مظلمة وغير مظلمة كانها تموجات مثلما في الصورة وكأن الإلكترونات إختارت السقوط في أشرطة دون أخرى.

تذكرنا الصورة بتداخل موجتين فعندها نري موجات مرتفعة وأخرى منخفضة.

القط : لكن كيف يحدث هذا هل الإلكترون موجة !!! هل مر من الشقين في آن واحد ؟ 🙀

المشاغب : تصرف كأنه موجة دخلت من شقين ثم إنقسمت لموجتين فتداخلت إحداهما مع الأخرى.

قام العلماء بوضع جهاز أما الشقين لمراقبة الشق الذي يمر منه الإلكترون وهنا حدث العجب الإلكترنات إكتفت برسم نقطتين في الشاشة ولم ترسم الأشرطة المتموجة 😂 وكأن الإلكترون عرف اننا نراقبه فتصرف كجسم.

القط : عجيب

المشاعب : إنتظر ما هو أعجب !! الآن نقلوا جهاز المراقبة بعد الشق لمراقبة من أين يخرج الإلكترون وهنا حدث الأعجب فقد رسمت الإلكترونات نقطتين بدل التموج وكأنها عرفت قبل دخول الشقين أنها ستراقب

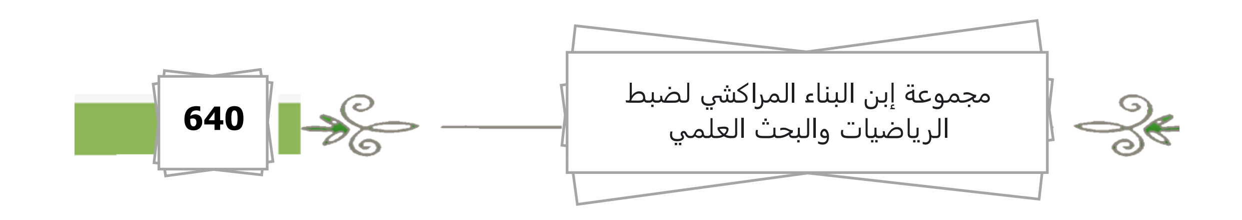
القط : مستحيل....

المشاعب : لفهم ذلك لابد أن نفهم معنى هذه الموجات ومعنى التطابق الكمي.

في الحقيقة إن كنا لا نستطيع فهم ما يحدث لأننا نظن الإلكترون جسم موجود في مكان معين لكن الأمر غير كذلك فلا يوجد مفهوم مكان للإلكترون إنما ما نسميه مكانه هو الموضع الأكثر إحتمالا لظهوره لكنه في الأصل هو حقل نصف قطره لا نهائي فهو يشغل الكون كله فإذا فهمنا هذا لم يعد هناك معنى لمراقبة الإلكترون بعد الشقين أو قبلهما.

ما نراه على الشاشة هو موجة إحتمالية إذ موضع ظهور الإلكترون على الشاشة هو مجرد موضع إحتمالي كغيره لكن الشاشة تعتبر مراقب للإلكترون تجبره على إختيار موضع معين.

فإن كانت نتيجة التجربة عشوائية لإلكترون واحد فهي ليست كذلك عند تكرارها لاربع وعشرين ساعة.



فالإلكترون تصرف هنا كموجة عبرت عبر الشقين ثم تداخلت فيما بينها لتظهر على الشاشة لكن الشاشة كمراقب أرغمتها على الظهور في موضع فلم ننتبه لكونها موجة لأننا رأيناها نقطة لكن بالتكرار الكثير إختفت هذه العشوائية وظهرت هذه الموجة عبر التصادم المتكرر للإلكترونات مع الشاشة فهي موجة إحتمالية.

لما وضعنا آلة مراقبة أمام الشاشة تداخلت إلكتروناتها مع إلكتروننا فأرغمته على إختيار موضع مما جعله يمر من شق واحد وليس من الشقين لذلك لم تظهر التموجات في الشاشة.

ولما وضعنا آلة المراقبة بعد الشقين فلم يتغير شيء لأن الإلكترونات حقول تشغل حيزا غير منته من الفضاء فالتداخل قائم ولا يهمه مكان الشاشة.

هذه هي الطبيعة الموجية الجسيمية للإلكترون وغيره من الجزيئات كالفوتون فهي تتصرف كأمواج لكن إذا حاولنا مراقبتها تداخلت مع المراقب لتختار ظهورا إحتماليا في حالة واحدة وهذا هو الذي تصفه معادلة شرودنجر فهي تقول أن دخول الإلكترون كموجة من الشقين جعله في تطابق حالات كمية لكن لما إصطدم بالشاشة ظهرة إحدى هذه الحالات.

القط : هذا التفسير لم يصدقه شرودنجر رغم أنه صانع معادلته الشهيرة.

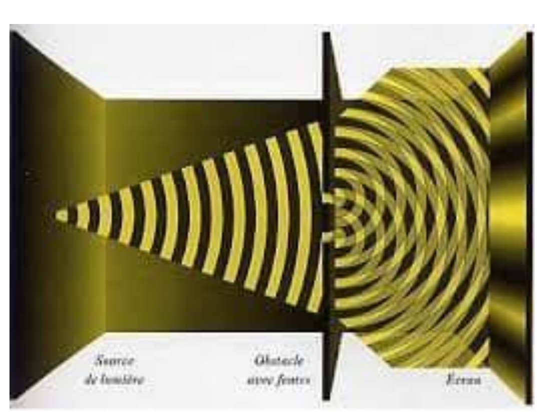
المشاغب نعم لذلك إستوحى تجربة قط شرودنجر إنطلاقا من تجربة برميل اينشتان الذي ينفجر ولا ينفجر في آن واحد حسب تطابق حالات الإلكترون فتصور علبة أنت بداخلها بها جهاز يطلق غازا ساما حسب حالة نواة ذرة مستقرة غير مستقرة في حالة تطابق كمي إذن الجهاز في حالة تطابق كمي يطلق ولا يطلب الغاز إذا كقط متشغشبرودنجر أنت حي وميت في آن واحد.

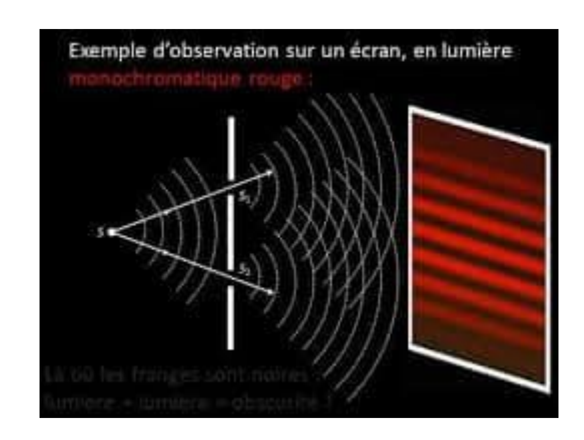
فإذا فتحنا العلبة إنهارت حالة التطابق وأرغت على إختار أحد الحالتين إما حي وإما ميت.

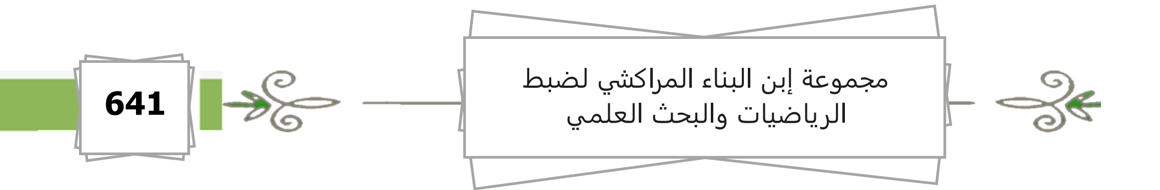
القط : فهمت الآن لماذا أنا حي وميت يا مشاغب

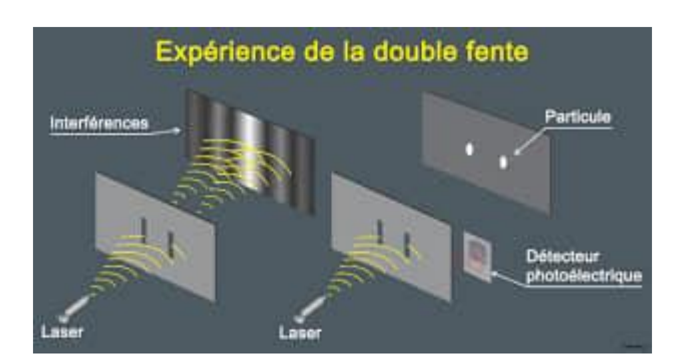
المشاغب : جميل إذن سأعطيك لا اعطيك سمكة🤣

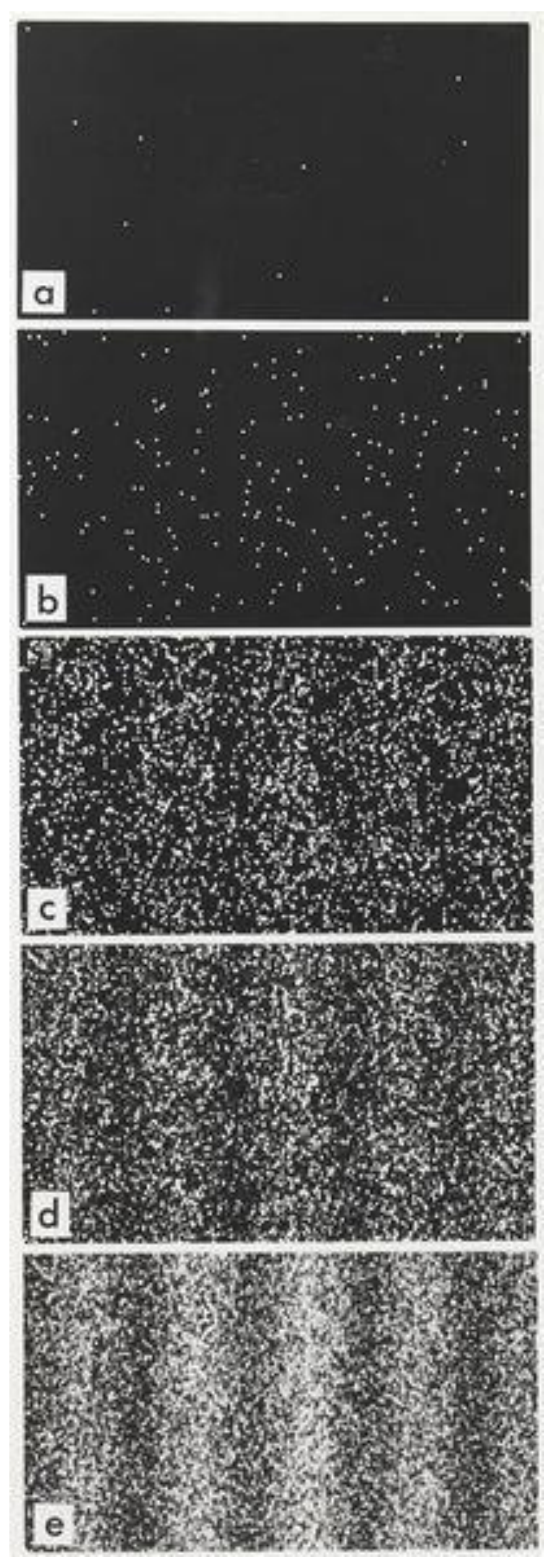
القط : ماذا.... 🙀








Expérience de la double fente
Interférences
Particule
Détecteur
photoélectrique
Laser
Laser


a
b
c
d
e

وماذا لو كانت كل هذه الحسابات مجرد نظرة بشرية للكون ؟

لو وضعنا مجموعة الأعداد الطبيعية في كيس (ولا يقول لي عظيم الرأس أن ذلك غير ممكن لأن رأسه كيس فيه جميع الأعداد الطبيعية وزيادة لكنه متحجر متقوقع (فاخترنا عشوائيا عددا فما هو احتمال أن يكون زوجيا ؟

الطريقة المعتمدة لحساب الاحتمال في هذه المجموعات القابلة للعد هي طريق قياس العد ثم المرور إلى النهاية.

فإذا أخذنا الأعداد من 0 إلى n عدد طبيعي فعدد الأعداد الزوجية يحسب بدالة الجزء الصحيح [n/2] + 1 ومنه الاحتمال هو ([n/2] +1)/(n+1) وبالمرور إلى النهاية نجد 1/2 .

لكن هذا الجواب لا يصح في حالتنا إذ يكفي أن نحسب احتمال ظهور عدد مضاعف ل 3 بهذه الطريقة فسنجد 1/3 .

لكن الكيس مغلق فسواء رقمنا الأعداد أو لم نرقم فيوجد تقابل بين مضاعفات 3 وباقي الأعداد الطبيعية فكيف نتصور أن ترقيما لا نراه خارج الكيس ولا يغير في قدرة المجموعات يؤثر في الاحتمال ؟

وسيظهر المشكل بشكل أكثر وضوحا لو نظرنا إلى حساب الاحتمالات على R بالقياس فالطريقة المعتمدة هنا هي وزن المجموعات.

فإذا اخترنا عددا عشوائيا من المجال [0,10] فاحتمال أن يكون من المجال[0,2] يحسب بقياس هذه المجموعة على قياس المجموعة الأولي فنجد 2/10=1/5 لكن من ناحية قدرة المجموعات لا يوجد فرق بين المجال [0,1] و [0,2] فلماذا لا يكون الاحتمال 1/10 ؟

الجواب على هذا أنه في المجموعات غير المنتهية الاحتمال يتعلق بنظرتنا للمجموعة وكيفية وزننا لها فالمسألة ليست مسألة عدد عناصر إنما مسألة قياس عناصر أي كم نعطي من احتمال أولي لكل مجموعة من العناصر.

فلا ننسى أن القانون الذي يقوم عليه الاحتمال أنه لا تأثير لا تغيير فإذا رمينا نردا من ستة أوجه مرقمة من 1 ل 6 وفرضنا أنه لا يوجد مؤثر يرجح وجه على آخر فليس لوجه أن يظهر على حساب الآخر إلا أن إمكانية ظهور وجهين في آن واحد مستحيلة فلابد من التجربة أن تختار وجها دون الآخر.

لطن لو كررنا التجربة لمالانهاية من مرة فليس لهذا التكرار أن يرجح وجها دون آخر وهنا لا ترغم التجربة على اختيار وجه دون آخر لذلك سنجد أن مجموع ظهور كل وجه متساوي مع ظهور الوجه الآخر.

ولذلك نقول أن الاحتمال هنا لكل وجه هو 1/6 فالاحتمال هو تكميم لظهور حادثة مقابل حوادث أخرى.

فإن لم يكن ما في فضاء الحوادث ما يرجح ظهور حادثة دون أخرى تساوى هذا التكميم.

قانون لا تأثير لا تغيير موجود في الكون ونستعمله يوميا فنراه يظهر في قانون الحفاظ على الكتلة والطاقة وقانون الحفاظ على كمية الحركة وقانون نيوتن فإذا كان مجموع القوى معدوم فالجسم لا يغير سرعته.



فإذا رجعنا لمجموعة الأعداد الطبيعية التي وضعناها في الكيس واستبدلناها بمجموعة الأعداد الناطقة فطلبنا حساب احتمال ظهور عدد ناطق في كتابته القانونية المقام عدد زوجي لاستحال علينا حساب قيمة هذا الاحتمال لأننا لا ندري كيف ننظر لهذه المجموعة من حيث الكم.

رغم أنه لا فرق من حيث العد بين Q و N وبين الأعداد الزوجية ومجموعة الأعداد الناطقة ذات المقام الزوجي في كتابتها القانونية.

فمعرفة توزيع الاحتمال أو كمية إمكانية الظهور لازم كي نتمكن من حساب احتمال مجموعة حوادث مركبة.

لذلك عندما ننظر للنرد نفترض توزيعا عادلا لإمكانية ظهور كل وجه فنحصل لكل وجه على 1/6

الشيء الذي نستفيده من تجربة الكيس المغلق هو استحالة حساب الاحتمال لعدم معرفتنا بكيفية توزيع إمكانية الظهور داخل الكيس المغلق.

لكن لو أخرجنا N من الكيس فحسبنا احتمال ظهور عدد زوجي لوجدناه 2 لأننا عند الاختيار نتتبع الأعداد بالترتيب 0, 1, 2 ... , لكن هذا مجرد ترقيم أي أننا رقمنا العناصر فما نسميه احتمال 1/2 ما هو إلا نتيجة لطريقتنا في عد العناصر وتتبعها.

قد يبدو كل هذا شيئا نظريا بلا فائدة للعقول اليانعة التي لم تنضج بعد ولم تطلع على العلوم الأخرى لكن كل هذا واقع ملموس نجده في تفسير كوبنهاجن لفيزياء الكم.

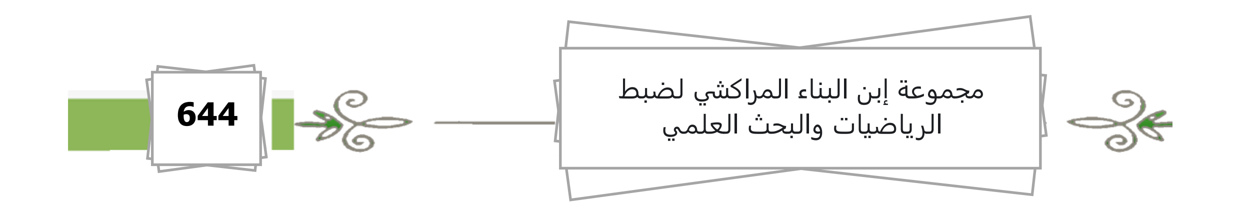
فلا يمكن معرفة ما يحدث داخل تجربة دون النظر إليها من الداخل فيصبح المراقب جزء من التجربة والطبيعة الاحتمالية لفيزياء الكم ناتجة عن هذا التداخل أي طريقة المراقب في المراقبة تؤثر على نتيجة التجربة أي في التكميم أو بشكل آخر الأجهزة التي نستعملها للقياس تتداخل مع عناصر التجربة فلا يمكن اهمالها.

هل تساءلت يوما هل ما تراه أحمرا هو فعل لونه أحمر أو ان عيناك من لا ترى الأشعة الأخرى فحكمت على الشيء من حيث نوع الأشعة التي تستطيع قياسها ؟ فكر جيدا...

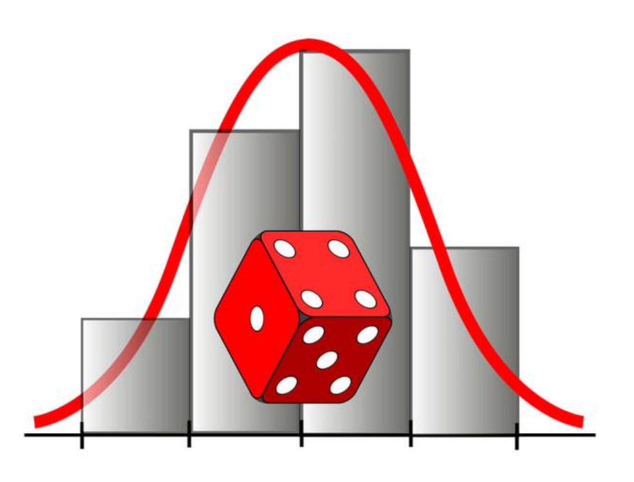
بشكل آخر تكميمنا للكون متعلق بكيفيتنا في النظر للكون.

ولو ذهبنا لأبعد من هذا إلى مسألة الزمن فهل هو موجود فعلا أو أن الزمن نتيجة لنظرتنا للكون ... هناك نظريات فيزيائية ترجح عدم وجود الزمن.

الأكيد أن ما نراه في الرياضيات ما هو إلا صورة لكيفية نظر العقل البشري للكون لذلك العقول السليمة لا ترى فرقا بين ما يحدث في الرياضيات وما يحدث في الكون فإن النتائج الرياضياتية متعلقة بالمسلمات التي بنيت عليها وأن أي نظام رياضياتي خوارزمي لا يمكنه أن يبرهن على صحة نفسه من الداخل بل هو غير مكتمل => مبرهنة غودل.

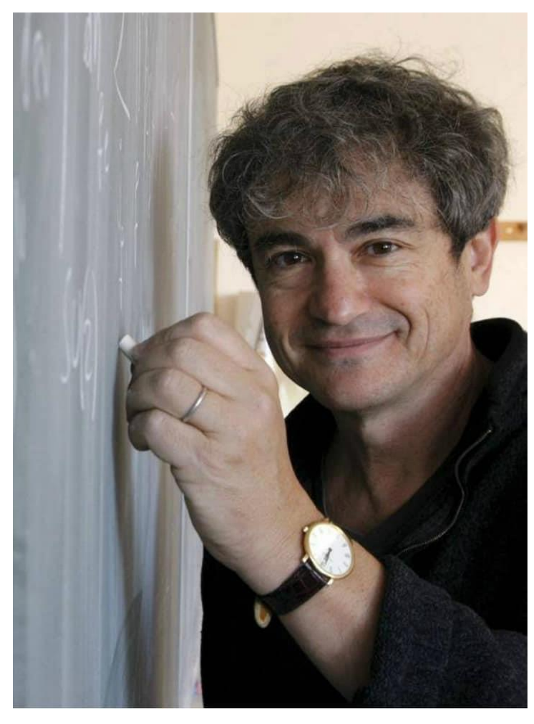


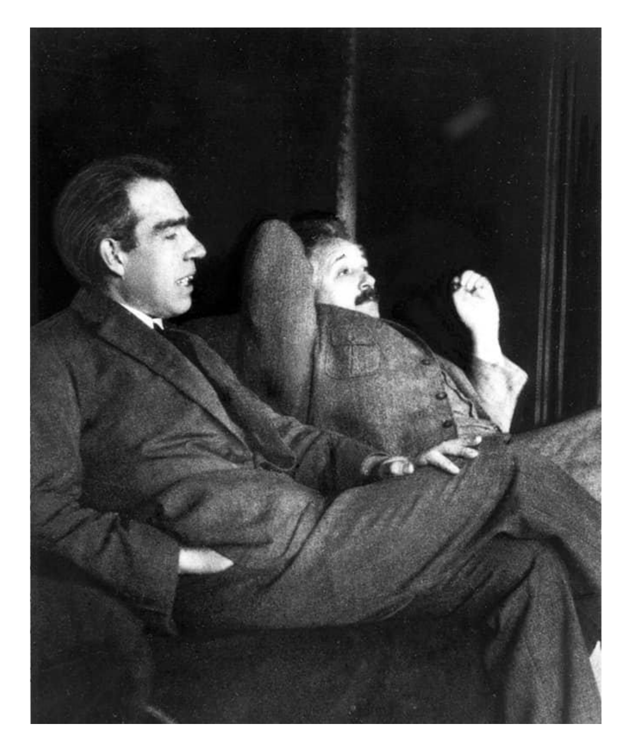












عندما يتغير إطار الحوادث....

كان هناك صيادان يتنافسان في الرمي بالبندقية، فقام أحدهما برسم دائرة على حائط ثم ابتعد وأخذ يصوب نحوها فأصاب داخلها تسع طلقت من عشر ثم نظر لصاحبه فقال تسعة من عشرة

فقام صديقه بتصويب البندقية نحو الحائط فأطلق عشر طلقات ثم تقدم فرسم دائرة تشمل العشر طلقات داخلها ثم قال لصاحبه عشرة على عشرة...

لعل القصة تعتبر خيالية لكنها تبين شيئا بديهيا : الإحصائيات تتأثر بالعينة المختارة فلا ننسى أن الرياضيات تنطلق من قضايا مجردة وأن الذي يقوم بالتجريد العقل البشري لذلك النتائج الرياضية صحيحة واقعيا في حدود صحة تجريد البشر للواقع.

فمثلا عندما نحسب إحتمال ظهور وجه نرد برقم معين فنحن نفرض تساوي القيمة الإحتمالية بين الأوجه والتي تعتبر حوادث بسيطة ثم ننطلق منها لحساب حوادث مركبة.

لكن إن كانت هذه الحوادث البسيطة مختلفة القيمة الإحتمالية واقعيا فالنتيجة الرياضية ستخالف الواقع.

وهذا ما يفسر تغير قيمة الإحتمال الشرطي بدخول الشرط فدخول الشرط يعني عدم تساوي القيمة الإحتمالية للحوادث البسيطة لتأثرها بالشرط من حيث التكرار وإن كانت في ظاهرها أحاديا لا علاقة لها بالشرط لكن كيف أمكن ذلك ؟

الذي أدى لذلك هو تغير فضاء الحوادث نفسه لا الحادثة فمتى تغير الفضاء تغير إحتمال الحادثة ذلك أن القسمة الإحتمالية للحادثة قسمة نسبية فهي تكمم ظهورها بالنسبة لظهور جميع الحوادث الممكنة.

فإن كنت تستغرب من رؤية جمل في غابة فإنك لا تستغرب رؤيته في صحراء رغم أن الجمل هو الجمل إلا أنه يتجول عادة في الصحاري لا في الغابات .

تغير الفضاء الإحتمالي يفسر متناقضات إحتمالية كمتناقضة الولدين وكيف أن ترتيب الولدين يؤثر في القيمة الإحتمالية لتحديد جنس أحدهما رغم أنه عقلا نظن أن الترتيب غير مؤثر في جنس الولدين.

المسألة تتعدى الإحتمالات فالعقل البشري ذاته لم يتعود على تغير فضاء العمل عند دراسة الحوادث فمازلنا نفكر بطريقة نيوتنية أن الفضاء إطار نظري جامد للعمل لا يتأثر بالتجربة ولا يؤثر عليها.

لكن النسبية قد فتحت بابا في هذا الميدان فبينت أن الفضاء نفسه يتأثر بالحوادث ويؤثر فيها.

أما ميكانيك الكم فجعلت المراقب ذاته يؤثر في الحادثة بمراقبته لها.

لكن ذلك هل يعني أنه بمراقبتنا للنرد ستتغير نتيجته الإحتمالية ..... ؟ أو بمراقبة أحدهم يمشي نجعله يسقط ؟ لا يقل أحدكم ضربوه بعين ولنترك هذا السؤال للقط المتشغشبرودنجر

مثال لتوضيح الفكرة:

مصطفى لديه طفلان أحدهما أنثى فما إحتمال أن يكون الآخر ذكر؟

التلميذ: 1/2 كون أحد الطفلين أنثى لن يأثر على جنس الطفل الاخر؟!



القط المتشغشبرودنجر: لنفرض ان لديهم طفلين كبير وصغير

الحالات التي عندنا هي

كبير انثى وصغير انثى

كبير انثى وصغير ذكر

كبير ذكر وصغير انثى

ولا يوجد ذكر ذكر لاننا قلنا عنده واحدة انثى فهنا عندنا حالتين فيهما ذكر على ثلاثة

خطأك أنك تظن حالة انثى ذكر واحدة ، انما هما حالتين ذكر انثى و انثى ذكر.

التلميذ : وحالة انهما توأم؟

القط المتشغشبرودنجر: توأم لا يوجد احدهما اكبر من الآخر؟ فكيف خرجا من بطن امهما معا ؟

التلميذ: نعم صحيح لا يمكن لكن استاذ ماذا لو قلنا شخصين في غرفة واحد منهم أنثى....

فسوف نضمن ان الجواب 1/2؟

القط المتشغشبرودنجر: ليس نفس الشيء فهنا انت تعطي نفس قيمة الاحتمال لوجود الشخص وهذا عكس الابن. فهناك مسألة مهمة تنسوها دائما لكنها تذكر في التمرينات فيقولون نعتبر الحوادث متساوية الإحتمال وهذا الذي فرضته في مسألتك الأخيرة.

وحتى تفهمها جدا ، اعتبر شخصين داخل غرفة وعندك صديق امام الباب فرأى شخصا خرج فكتب اسمه ثم رأى ثانيا خرج فكتب إسمه ثم قال لك من الشخصين الذين خرجا توجد أنثى، فكم احتمال ان يكون الآخر ذكرا ؟

التلميذ: الأول انثى الثاني ذكر

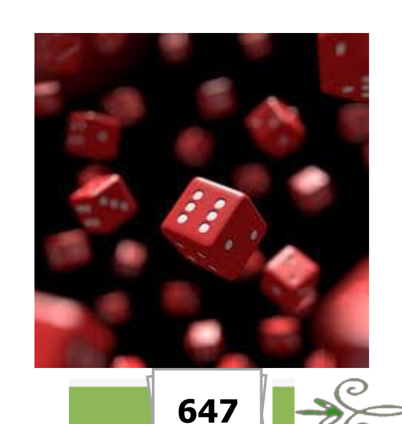
الاول ذكر الثاني أنثى

الأول أنثى الثاني انثى...

الاحتمالات فيها نكهة حلوة هههههه

القط المتشغشبرودنجر: اذن قيمة الاحتمال تلعب دورا ففي حالتك جعلت كيفما كان ترتيب الجنسين هو حالة واحدة لها احتمال مكافئ لتساوي الجنسين لكن متى كان قررت ان الترتيب موجود تغيرت قيمة الاحتمال وهذا الذي يقع مع الولدين فالترتيب موجود لا يمكنك نزعه.

التلميذ: فهمت والاحتمال مشروط في السؤال الاصلي اذن الجواب هكذا 2/3



له بنت واحدة على الأقل:A

له ولد واحد على الأقل:B

$$P(B/A)=P(A\&B)/P(A)=(1/2)/(3/4)=2/3$$

القط المتشغشبرودنجر: أحسنت، مجتهد

تاريخ الرياضيات:



نظرة تاريخية سريعة لتطور الرياضيات

الرياضيات بدأت بالأعداد الطبيعية والتي نجدها عند البابليين والحضارة المصرية.

ثم عند الإغريق مع ظهور الهندسة الإقليدية وحساب المساحات والحجوم.

ثم عند الهنود مع ظهور الكتابة العشرية والدوال المثلثية

ثم عند العرب مع ظهور معادلات كثيرات الحدود والأعداد الناطقة والجبرية وبداية الدوال في شكل حسابات مثلثية

ثم ظهور الترميز مع نهاية الحضارة الإسلامية العربية

ثم ظهور الأعداد الحقيقية والنهايات والإشتقاق مع بداية الحضارة الغربية

ثم القرن السابع والثامن عشر ظهور السلاسل

ثم القرن التاسع عشر ظهور البنى الجبرية والتكامل والهندسة العامة والتفاضلية وضبط التعاريف

ثم مع نهاية القرن التاسع عشر دراسة قدرات المجموعات وبداية القياس

ثم مع بداية القرن العشرين ظهور نظرية المجموعات ونظرية القياس والإحتمالات وبدأ برنامج هلبرت لإعادة بناء الرياضيات

ثم ظهور الفضاءات الطبولوجية والهلبرتية والباناخية ونظرية الفئات

ثم في الثلاثينيات مبرهنة عدم الإكتمال لغودل

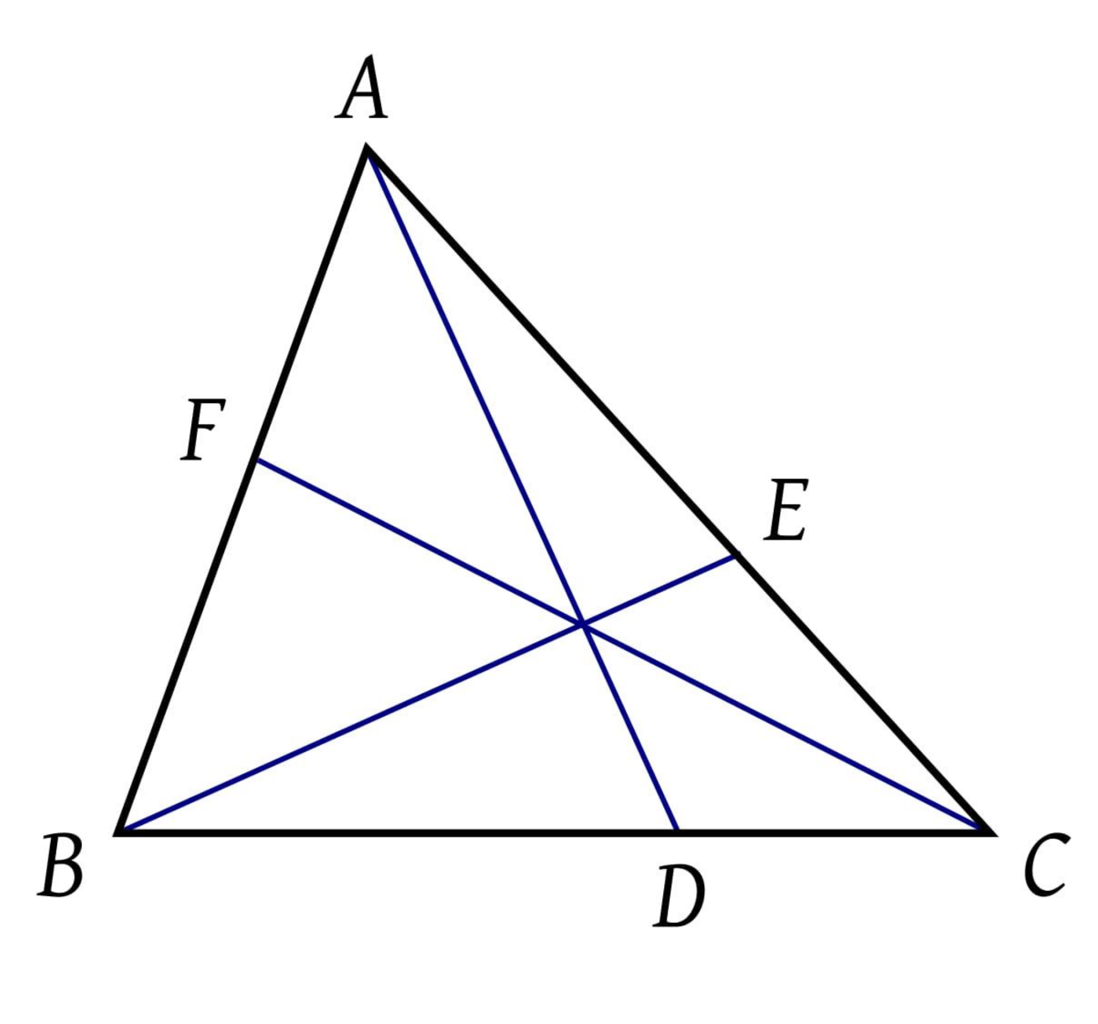
ثم قابلية الحساب وعصر الخوارزميات والحسابات

ثم في السيتينيات برهنة فرضية المستمر.



المؤتمن بن هود ملك سرقسطة في عهد ملوك الطوائف بالأندلس توفي سنة 478 هـ.

رياضي وفلكي له رسالات في العلوم الرياضياتية مثل «الاستهلال» و«المناظر» والتي احتوت على البرهان الرياضي لما يعرف بمبرهنة سيفا التي أثبتها بعد ذلك الرياضياتي الإيطالي جيوفاني سيفا في القرن الثامن عشر الميلادي.



$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

أبو الحسن علي القلصادي واضع الترميز الرياضياتي

ولد في بسطة بالأندلس سنة 835 هـ/1422م وتوفي في باجة بتونس سنة 891 هـ/ 1487م) رياضياتي مسلم أندلسي اشتهر بعلم الحساب، كما كان عالمًا بالفروض والنحو وفقيهًا على المذهب المالكي. اشتهر في القرن التاسع الهجري/الخامس عشر الميلادي .

برز القلصادي في علم الرياضيات وأبدع في نظرية العدد، وله فيها ابتكارات. كما شرح عمل ابن البناء في الحساب وأضاف إليه عدة إضافات هامة خاصة في نظرية الكسور، وقد يكون القلصادي هو أول من رسم الكسور. كما شرح بدقة كبيرة طريقة إيجاد الجذور لأي عدد. وهي الطريقة المعروفة لدى علماء المسلمين المتقدمين. ولقد أعطى القلصادي قيمة تقريبية للجذر التربيعي للكمية (أ2 + د)، وقربها لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

كان للقلصادي الريادة في استخدام الرموز في الجبر، وذلك في كتابه "كشف الأسرار عن علم الغبار"، فاستعمل لعلامة الجذر الحرف الأول من كلمة جذر (ج). واستعمل للمجهول الحرف الأول من كلمة شيء (ش). يعني س، ولمربع المجهول الحرف الأول من كلمة مال (م)، يعني س^2، ولمكعب المجهول الحرف الأول من كلمة مكعب (ك)، يعني س3، ولعلامة المساواة الحرف (ل)، وللنسبة ثلاث نقاط. وقد نقل "وبكه" في منتصف القرن التاسع عشر الرموز الجبرية التي استعملها القلصادي من نسخة خطية موجودة عند أحد المستشرقين الفرنسيين، وأعطى القلصادي القيم التقريبية لبعض الكميات الجبرية، وهي عملية أبانت طرقًا لبيان الجذور الصم بكسور متسلسلة.

https://ar.m.wikipedia.org/…/%D8%A3%D8%A8%D9%88_%D8%A7…



من تاريخ الرياضيات : بين كروينكر وويرستراس

كان كرونيكر يرى أن الرياضيات لابد أن تكون واقعية وما ما هو تخيلي ليس منها فالأعداد الطبيعية عنده موجودة في الطبيعية أما الأعداد غير الناطقة فمن صنع البشر وهي من الهندسة لا الأعداد لذلك قال مقولته الشهيرة : صنع الله الأعداد الطبيعية ، أما الباقي فمن عمل البشر .

فكرونيكر يرفض التحليل انطلاقا من كونه ليس موافقا للواقع بالنسبة له كما يراه في زمانه.

أما ويرستراس فيرى العكس أن الأعداد جزء من التحليل وحالة خاصة منه.

كنتور اتجه وجهة ويرستراس بدراسة أنواع المالانهاية لذلك حوصر من طرف كرونيكر الذي كان يتزعم الرياضيات في ألمانيا زمانه فأقصي كنتور من المناصب.

لكن هلبرت أعاد له اعتباره عندما قال جملته الشهيرة : لا أحد يخرجنا من الجنة التي صنعنا لنا كنتور .

هلبرت يتجه وجهة ويرستراس بكون الرياضيات عامة مجردة تبنى على نظام مسلماتي.

يمكن ان نقول أن هذا خلاف بين الرياضيات الشكلية والرياضيات الحدسية.

لمزيد من الفائدة

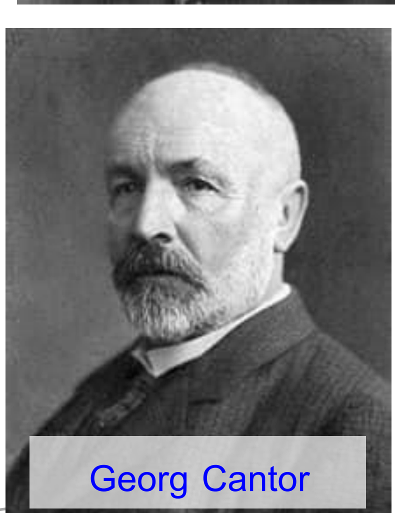
https://images.math.cnrs.fr/Position-philosophique-et...



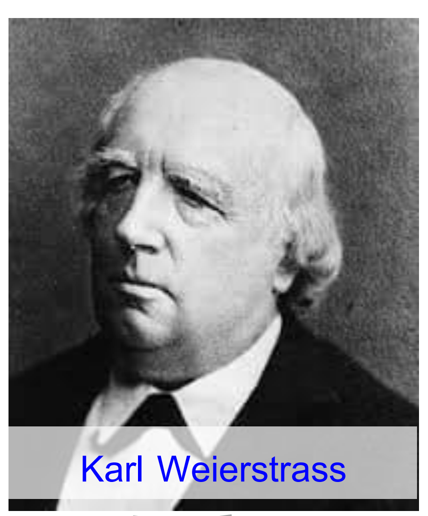
David hilbert



Leopold Kronecker



Georg Cantor



Karl Weierstrass

ضبط الرياضيات

الرياضيات تفكير سليم بتجريد أفكار بسيطة.

إن المشتغل بالرياضيات يراها كأفكار سهلة وبسيطة تتوافق مع بعضها.

فالرياضياتي بتجريده يعلم أن إسم المتغير x في صيغة دالة $f(x)$

لا يهم في شيء فيمكنه أن يسميه y أو z او بطاطس إنما المهم أنه متغير على R .

وبتجريده يعلم أن رمز إبسيلون لا يهمه إنما ما يهمه أنه متغير موجب تماما.

وكذلك بتجريده يعلم أن نقطة التلميذ في الإمتحان مجرد وسيلة لا غاية إنما الغاية أن يستوعب التلميذ ما يدرسه أما النقطة فهي تقييم لقدرة الاستيعاب فمتى لم تعبر عن ذلك أصبحت بلا معنى.

وهذا التجريد السليم ذاته ما يفهم منه الرياضياتي أنه عندما نعرف العدد المشتق لدالة f معرفة على مجموعة تعريف $D(f)$ عند نقطة منها x_0 بنهاية من الشكل $\lim (f(x0 + h) - f(x0))/h$ عندما h ينتهي للصفر، فإن h هنا مجرد وسيلة لا غاية فلا نشترط على f أن تتأقلم مع h و إنما نشترط على h أن يتأقلم مع f فنقول لتكون لهذه النسبة معنى يجب أن يكون $x0 + h \in D(f)$ وليس ان نشترط أن f معرفة على مفتوح يشمل x_0 ، إنما نشترط المفتوح إذا احتجنا زيادة على مفهوم الإشتقاق وهو التقريب التآلفي.

الرياضيات مجموعة أفكار بسيطة نوظفها حسب الحاجة فإذا أحتجنا تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة أو التزايدات المنتهية أو دراسة إشارة دالة فنضيف شرط محلي على $D(f)$ وهو الترابط أي نحتاج مجال فهنا نشترط مجال لأنه عندنا آلية جديدة وهي الترابط لتحقق المبرهنة فهذا الترابط الذي يضمن لنا المرور بالصفر عند تغير إشارة دالة مستمرة ويضمن لنا إمكانية مقارنة الرتابة بواسطة إشارة المشتقة.

وعندما نتكلم هن دالة أصلية لدالة مستمرة نشترط مجال من الشكل $[a,b]$ لأننا نحتاج لتكامل ريمان والذي يتم على مجال بتقسيمه قطعا صغيرة وحساب مجموع المساحات.

ولكل مبرهنة أو تعريف أفكاره البسيطة التي تنتجه لذلك عند قراءة التعاريف والمبرهنات لابد من ملاحظة هذه الأفكار وفهم دورها وما ينبني عليها من النتائج وماذا يحدث إذا فقدت.

هذه هي الرياضيات فالرياضيات ليست مجرد تعاريف تحفظ وتطبق حسابيا من غير فهم.



البناء المسلماتي في الرياضيات

الغاية الأولى من الرياضيات تفسير الواقع.

وتفسير الواقع يكون بما يراقبه البشر فقد فهم البشر أن أي حادثة تكون لسبب وإذا تكررت نفس الأسباب تكررت نفس الحوادث.

هذه الأسباب التي يراقبها البشر ما هي إلا خصائص وقد تمكن البشر من تجريدها وتبسيطها إذ حتى الخصائص مكونة من خصائص اولية.

الخصائص البسيطة هي عند البشر كالمسلمات كالوجود و امكانية تكرار الوجود.

الرياضيات قامت بتجريد هذه المسلمات ثم بناء ما ينتج عنها وهذا ما نسميه البناء المسلماتي.

فالبناء المسلماتي مكون من قضايا بسيطة يسلم البشر بصحتها وعمليات منطقية فإذا خلطنا الإثنين صنعنا المبرهنات إذ المبرهنات هي نتائج تطبيق المؤثرات المنطقية على المسلمات.

هذه الطريقة المبتكرة في صناعة الرياضيات مكنت لنا من توقع وجود كائنات كونية عن طريق النتائج الرياضية كالثقوب السوداء مثلا فقد تم حسابها رياضيا قبل مراقبتها.

ومكنتنا كذلك من تصور أنواع أخرى من الكائنات التي هي موجودة واقعيا لكن لم ننتبه لها كالهندسة الريمانية مثلا.

ومكنتنا عن طريق تغيير المسلمات من تصور أنواع أخرى من الأكوان قد نراقبها يوما.

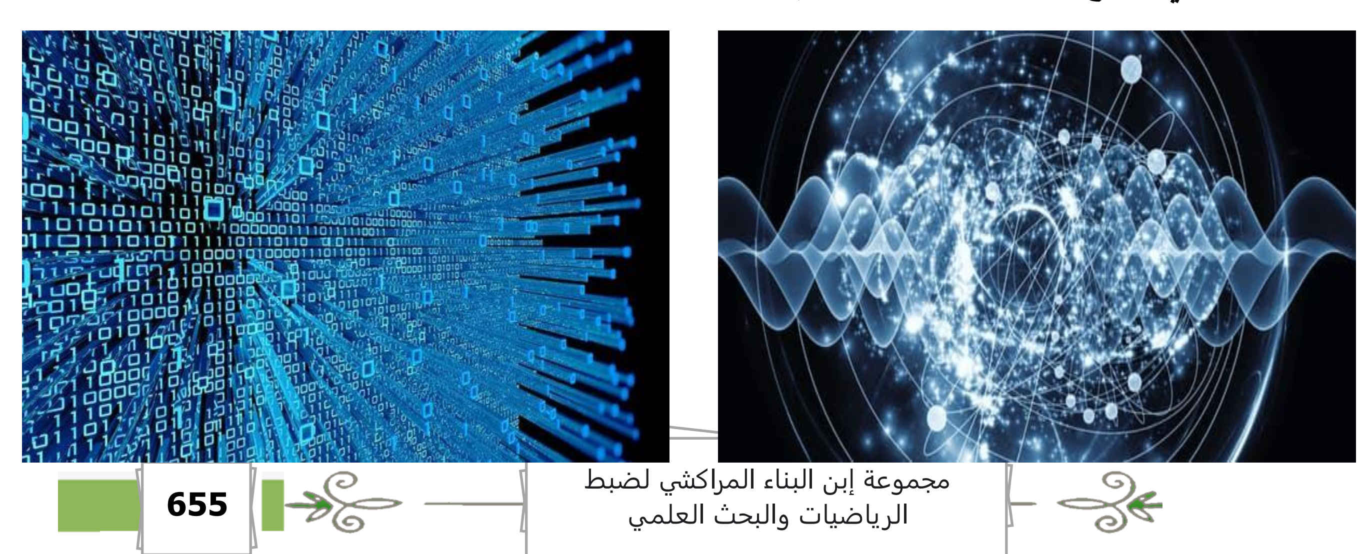
وزيادة على ذلك ضبط النظام المسلماتي الرياضيات فمتى اتفقنا على المسلمات أمكننا الحكم بالصحة أو الخطأ على المبرهنات دون تدخل الذوق البشري.

فالبناء المسلماتي هو إعادة بناء نموذج للواقع انطلاقا من خواصه البسيطة.

البشر لا يدرك مدى تعقيد الواقع لكن الرياضيات جاءت لتحليل تركيبته ومراقبة ما وراء الواقع المشاهد فهناك واقع غير مشاهد فلولا الرياضيات لما استطعنا صناعة طرق لمشاهدة موجات الجاذبية و تموج الكون بتداخل ثقبين أسودين من ثلاثة عشر مليار سنة.

ولولا الرياضيات لما تنبأ البشر بوجود بوزون هيج.

وهذا حاصل في جميع حياتنا اليومية فلولا الرياضيات لما كنت تقرأ هذا المقال....



ميراث نيكولا بورباكي في الرياضيات: Nicolas Bourbaki

نيكولا بورباكي : عالم رياضيات خيالي تنشر بإسمه مجموعة من علماء الرياضيات الفرانكوفونيين ،و التي تشكلت في عام 1935 في بيس (فرنسا) تحت قيادة أندريه ويل، كان الهدف الأول هو كتابة مقالات عن التحليل.

عرفت المجموعة عصرها الذهبي في الستينيات و السبعينيات حيث تعدى تأثيرها إلى الدول الأخرى من العالم.

يعد من بين أعضائه خمس رياضياتيين متحصلين على ميدالية فيلتس.

Laurent Schwartz (1950), Jean-Pierre Serre (1954), Alexandre Grothendieck (1966), Alain Connes (1982) et Jean-Christophe Yoccoz (1994).

يرجع الفضل لنيكولا بورباكي في في تعميم وضبط الكثير من المفاهيم الرياضياتية و منها :

نشر استعمال رمزي المكممين الرياضيين : مهما يكن و الوجودي $\forall$ ، $\exists$ ، أما الأول فمخترعه هو الألماني جيرهارد جينتزين سنة 1933 ، أما الثاني فمخترعه جيوسيبي بيانو

نشر استعمال زمر المجموعة الخالية $\varnothing$

نشر استعمال رمزي الإستلزام و التكافؤ: $\Leftarrow$ ، $\Rightarrow$، $\Leftrightarrow$

تعميم استعمال توطئة زورن

https://fr.wikipedia.org/wiki/Nicolas_Bourbaki



بورباكي : الفرق بين البرهنة والتفسير

جاء في منشورات بورباكي :

فكل رياضي يعلم أن البرهنة ليست في الحقيقة مفهومة ما دمنا نتقيد بمجرد التأكد من صحة مراحل الإستنتاجات التي نراها خطوة خطوة، بدون التصور الواضح للأفكار التي قادتنا لبناء هذه السلسلة من الإستنتاجات دون غيرها. اه

tout mathématicien sait d'ailleurs qu'une démonstration n'est pas véritablement "comprise" tant qu'on s'est borné à vérifier pas à pas la correction des déductions qui y

figurent, sans essayer de concevoir clairement les idées qui ont conduit à bâtir cette chaîne de déductions de préférence à tout autre.

(Bourbaki 1948, p.37 note1)

أنا اراه لكن لا أصدقه .

je le vois mais je ne le crois pas.

جملة جورج كنتور لصديقه ديديكاند عندما برهن وجود تقابل بين قطعة المستقيم و المربع.



التفسير في الرياضيات

نظرات في الفرق بين البرهان والتفسير

البرهان الرياضي جزء من بناء نظري يحتاج ليكتمل فهمه إلى تفسير سبب ظهوره بهذا الشكل دون غيره وذلك غير ممكن إلا إذا نظر للخواص المشاركة في بناء الكائنات الرياضية.

فالتفسير :هو توضيح وجود خاصية في بنية الكائن تفسر الوصف الملاحظ فيمكن تعميمها على كل كائن تظهر في بنيته تلك الخاصية.

أما البرهان فلا يعطي تعميما للخاصيات إنما يرى الوصف الملاحظ كنتيجة منطقية.

التفسير يوضح وجود الخاصية في البنية والتي أنتجت الوصف

اما البرهان فيبين وجود الوصف دون توضيح مصدره.

الرياضيات تمر عادة ببراهين إلى أن يفهم سبب وجود الخواص فتحول البراهين إلى تعميمات كالطبولوجيا للنهايات و نظرية التكامل بالمسلمات للوبيغ.

فصناعة الفضاءات الشعاعية مثلا ماهي إلا وليدة لتفسير بنية الأعداد الحقيقية و الهندسة فمتى عرفت التركيبة أمكن تعميمها لصناعة رياضيات أعم.

ولذلك يستغرق أحيانا فهم ظواهر المبرهنات الرياضياتية قرونا، لكن ذلك هو المحرك الأساسي للرياضيات.

جاء في منشورات بورباكي :

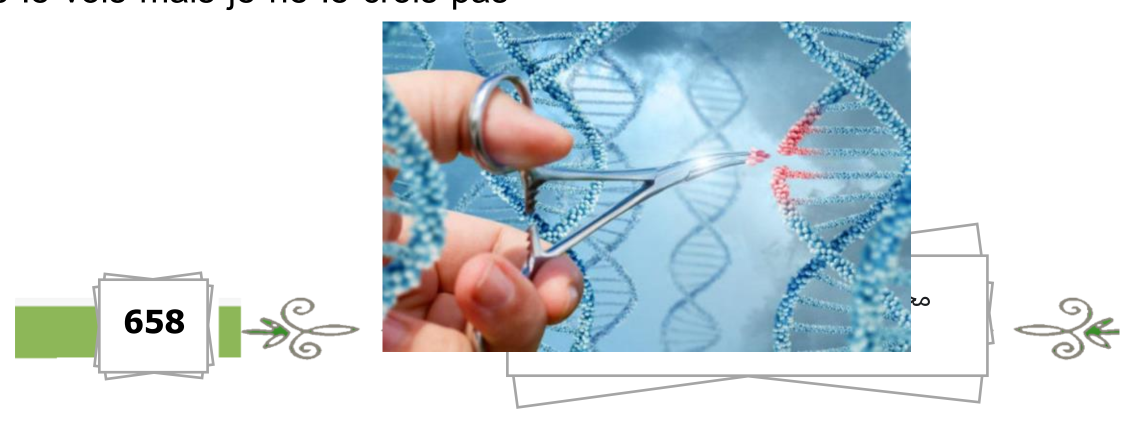
فكل رياضي يعلم أن البرهنة ليست في الحقيقة مفهومة ما دمنا نتقيد بمجرد التأكد من صحة مراحل الإستنتاجات التي نراها خطوة خطوة، بدون التصور الواضح للأفكار التي قادتنا لبناء هذه السلسلة من الإستنتاجات دون غيرها. اه

tout mathématicien sait d'ailleurs qu'une démonstration n'est pas véritablement "comprise" tant qu'on s'est borné à vérifier pas à pas la correction des déductions qui y

figurent, sans essayer de concevoir clairement les idées qui ont conduit à bâtir cette chaîne de déductions de préférence à tout autre.

ولعل لنا فائدة في جملة جورج كنتور الشهيرة في رسالته لصديقه ديديكاند عندما برهن وجود تقابل بين قطعة المستقيم و المربع. : أنا اراه لكن لا أصدقه .

je le vois mais je ne le crois pas



النظريات الرياضية تمر بثلاث مراحل:

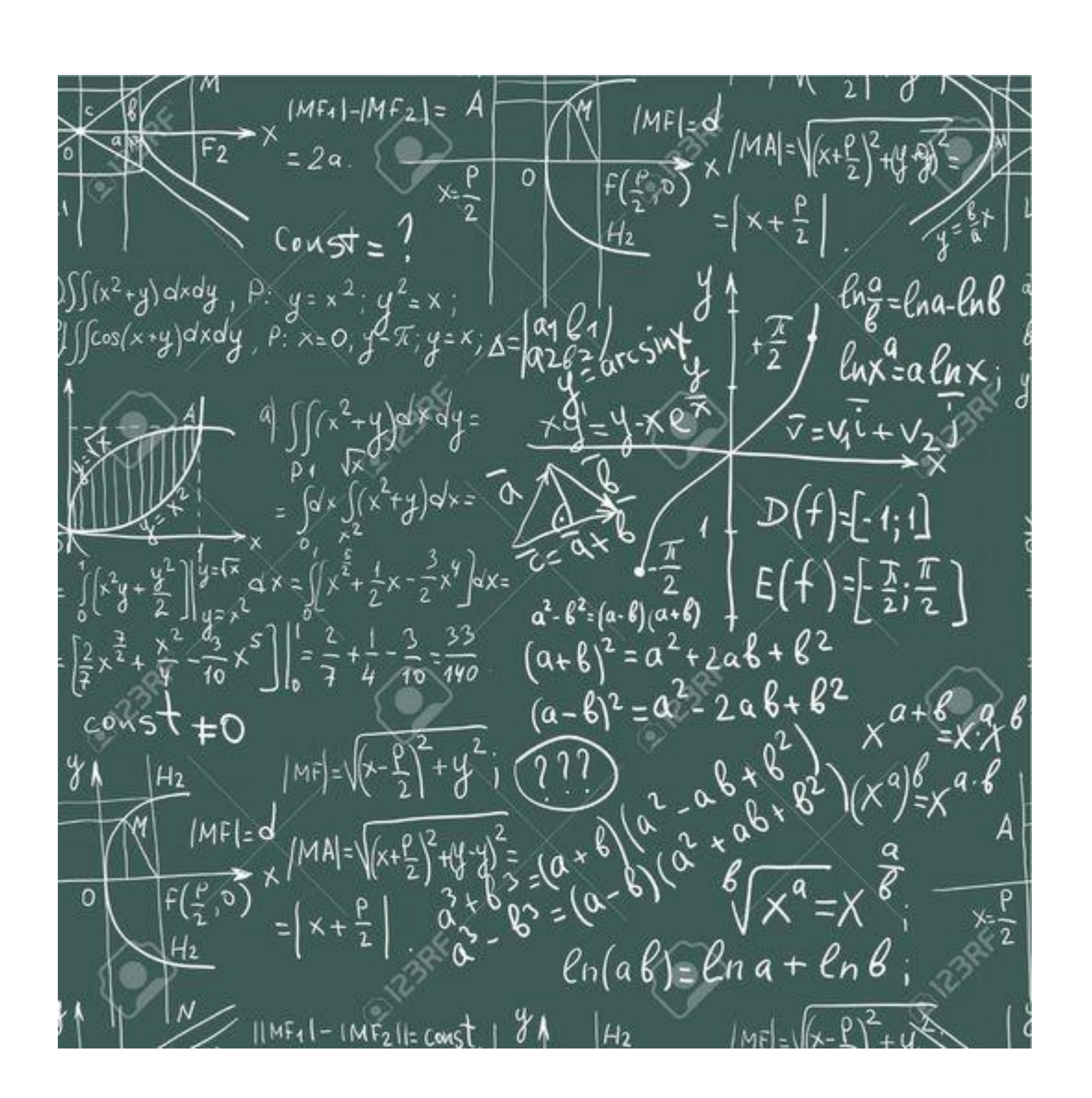
مرحلة اكتشاف : تبدأ باكتشاف الخواص وبرهنتها كحل كثير حدود من الدرجة الثانية وخواص الأعداد الطبيعية و حساب المساحة بتكامل ريمان.

مرحلة الضبط و التعميم : وهنا تعمم الخواص إلى أقصى حد ممكن كجذور كثير الحدود من درجة كيفية ومجموعة الأعداد الحقيقية ومجموعة الأعداد المركبة و تكامل لوبيغ، كما تضبط البراهين والمصطلحات.

مرحلة التجريد أو ما يسمى البناء على نظام مسلماتي : و هنا تجرد أسباب ظهور الخواص لتبنى على نظام مسلماتي تبقى فيه البراهين صحيحة كالزمر و الحلقات و الحقول و الفضاء الطبولوجي و فضاء هلبرت و فضاء بناخ والنظام المسلماتي لتكامل لوبيغ.

هذه المرحلة هي مرحلة نضج للنظرية.

هذه المراحل قد تتداخل تاريخيا فيما بينها.



الرياضيات بين الضبط والتحريف

إن أهم مشكل يواجهنا اليوم مع ضبط العلوم في أمتنا هو كثرة المتكلمين عن غير علم.

المتكلم بغير علم يستعمل طريقة إيهام السامع بصواب كلامه باستعمال مصطلحات غائبة عن كلامنا المعتاد، مصطلحات إذا أخذتها أحادية كانت ذات معني أما إذا جمعتها كما جمعها فستجدها بلا معنى.

المشكل أن عقل المستمع لم يتعود على هذه الألفاظ فعقله يتوقف عند سماعها ولا يحاول تمحيصها لتصفية الخطأ من الصواب ومن هنا يدخل الوهم.

كمثال على هذا سنختار عشوائيا مصطلحات علمية غير شائعة الاستعمال في كلامنا اليومي وسنركب منها جملة:

تكنولوجيا

عالمية

أيدلوجيا

برمجة عصبية

ذكاء اصطناعي.

مستقبلية

فكر

قومي

سنضعها عشوائيا في جملة:

إن التكنولوجيا العالمية أثبتت أن الذكاء الصناعي يمكنه محاكاة البرمجة العصبية لصناعة أيديولوجيا مستقبلية تمكننا من رفع مستوى الفكر القومي..

رغم أن هذه الجملة ذات كلمات رنانة لكنها لا معنى لها فلو محصناها لوجدنا المعاني لا تستقيم مع بعضها وألفاظها غير مضبوطة.

فما معنى تكنولوجيا عالمية ؟ كم سمعنا من متحدث يتحدث عن معايير عالمية وكلما أراد أن يعطي صحة للفظ أضاف له كلمة عالمية ؟

لكن ما هو معيار العالمية ؟

لا يوجد معيار مضبوط لهذا اللفظ فليس كون شيء صنع في أمريكا أنه عالمي.

ما معنى البرمجة العصبية ؟ لفظ لا معنى له وهل الأعصاب أو العقل يبرمج ؟

ويمكنكم تمحيص باقي الألفاظ فهذه الجملة لا فائدة منها.

مثل هذه الجمل نراها كل يوم بل الأدهى من هذا أننا نراها في الرياضيات.

فيأتيك أحدهم ليجادل في كون الإبسيلون عدد صغير لكنه لا يأتيك بالمصطلحات والترميزات الرياضية إنما يلجأ للغة لأنها حمالة لكثير من المعاني فيخلطها ببعضها ليوهمك أو يوهم نفسه أنه استدل ولو محصت جملته لوجدتها مليئة بالمغالطات المبنية على ألفاظ غير دقيقة

فيقول لك : الإبسيلون عدد صغير لأنه إذا اقتربنا من....

لا نحتاج لسماع المزيد لأنه بذكره لفظ الإقتراب سيوهمك بأنه لفظ رياضي ثم يمر بمعناه اللغوي ليحوله للفظ حدسي يعني التحرك في الزمن وبمثل هذا يخلط كلامه.

الاقتراب الرياضي غير الاقتراب البشري فإن كان الاقتراب البشري هو تحرك لتصغير مسافة بينك وبين نقطة فالاقتراب الرياضي هو مجرد اختيار معيار فتجعل المسافة بين الدالة وقيمة معينة أقل منه فلفظ التصغير عبر الزمن يختفي في الرياضيات لأنه لا يوجد زمن في الرياضيات ولا صغر مطلق.

فكونه حرف كلمة الاقتراب من معناها الاصطلاحي إلى اللغوي فقد أدخل فيها التصغير الحدسي والذي به يوهم عقله أنه بين قيم صغيرة.

هذا المتكلم لا يدرك أنه وقع في الخطأ لأنه لم يتعود على التدقيق في الألفاظ وكثير من السامعين مثله لا يدققون في معاني الألفاظ.

هذه المغالطات اللغوية لا تقتصر على خلط الحدس بالاستدلال عن طريق اللغة بل تتعدى ذلك إلى محاولة تعويض التعاريف الرياضية التي تتسم بالتجريد وغياب الذوق الشخصي بكلمات لغوية مطاطة تقال في غير موضعها بما لا يضبط إلا في ذهن صاحبها كالمعرفة المعدة للتدريس وأنواع المعارف مما تعودنا سماعه عند بعضهم ممن لم يدرس الرياضيات على أصولها عند العجز أمام مفاهيم عالية لم يدرسها ولم يضبطها.

إن الرياضيات علم مجرد لا لأنه خال من الفهم بل الفهم موجود إلا أنه نظام قائم على المسلمات والمنطق يكتب بلغة شكلية غير قابلة للتأويل.

فمتى استعملنا اللغة بدل المصطلحات دخل الخطأ من هذه الناحية خاصة إذا أدخلنا في الأفعال البعد الزمني والمقارنة المطلقة كأصغر شيء وأكبر شيء ... من الأوصاف التي لل ذكر بأي معيار تقارن ومع من تقارن.

استعمال اللغة لا يمنع في شرح المفاهيم لكن متى وصلنا للبرهنة فللرياضيات لغتها التي لا تقبل التأويل والتحريف.

لكن كيف نميز بين الصواب والتحريف ؟

لذلك لابد من ارجاع كل لفظ إلى معناه الاصطلاحي وهي عملية يحتاج العقل التدرب عليها أي أن يقوم بترجمة مستمرة للألفاظ اللغوية نحو الاصطلاحات الرياضية.

فعندما تحول الجملة إلى الاصطلاحي الرياضي سيتبين صوابها من خطئها.



مثال ذلك ما ذكرته في مقال عن الأشعة أن الشعاع تكميم منوع وكمثال الأشعة في الفضاء الاقليدي المعتاد مسافات موجهة.

فسأل أحد الإخوة الأفاضل هل يمكن أن نعرف الشعاع على أنه الانتقال بمسافة نحو جهة....

فسألته ما معنى انتقال رياضيا ؟

فقال انسحاب بشعاع

فقلت له هل تعرف الشعاع بنفسه ؟ هذا لا يستقيم.

فأنظر كيف دخل الخطأ عبر الحدس من مجرد استعمال لفظ دون تمحيصه.

فالسائل لم يخطئ في الشرح كشرح لكنه أخطأ في جعله تعريفا رياضيا أما شرح المفهوم للتلاميذ بالانتقال فهو شرح جيد لكن بين التمثيل والتعريف يوجد فرق فالانتقال بمفهومه الملموس لا يصلح كتعريف في الرياضيات ما لم يجرد وتجريده يقودنا لتعريف الشعاع أولا.

عندما نقول الشعاع تكميم منوع فيمكننا ترجمة هذه الألفاظ رياضيا:

فالتكميم أو كمية مقابله الرياضي العدد أي R خصوصا أو C و حقل K عموما.

أما التنوع فهو التركيب من أنواع أي الجمع بين مقادير أنواع وأما الأنواع نفسها فهي قاعدة الفضاء الشعاعي.

فنستطيع مقابلة لفظ تكميم منوع بالكتابة الخطية للشعاع في أساس الفضاء الشعاعي.

فالمرور من اللغة إلى الاصطلاح ممكن ونلاحظ أنه لا يوجد أي ذوق بشري في هذه الألفاظ ولا فعل محله الزمن ولا الحدس.

قد يقول السائل : الأمر صعب فكيف أترجم الألفاظ رياضيا ؟

الجواب : هو التدرب والاعتياد ومعرفة المصطلحات لكن هناك بعض الطرق التي تساعدك كمعرفة أن الأفعال الرياضية خبرية ولا يكون محلها الزمن.

فمثلا الاقتراب البشري زمني أما الرياضي فخبري.

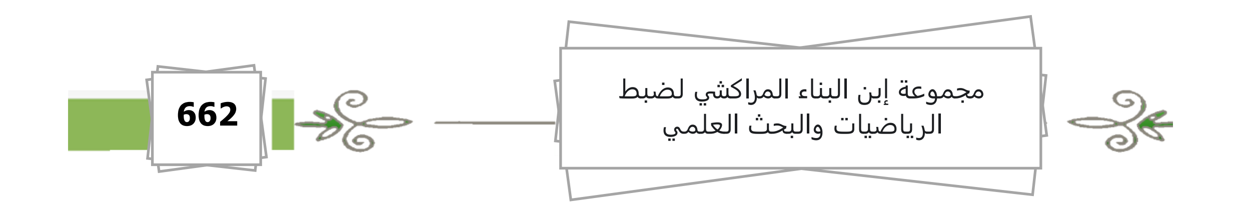
عملية الضبط ليست بالأمر السهل وتمييز الصواب من الخطأ لا نجده عند الجميع فمن أجل هذا وضع المنطق الرياضي لأن المنطق الرياضي صنع بكيفية تجعله لا يقبل الخلط اللغوي ولا الذوق البشري.

ولذلك نؤكد على الجميع محاولة الصياغة بالمنطق الرياضي عند البرهنة لأنه يهذب الأفكار ويبين صوابها من خطئها.

أما اللجوء إلى اللغة فيكون في موضع الشرح والتوضيح لأن الكتابة الشكلية للرياضيات لا تسمح بتدوين مصدر الأفكار التي أدتنا لصياغتها بتلك الطريقة .

جاء في منشورات بورباكي :

فكل رياضي يعلم أن البرهنة ليست في الحقيقة مفهومة ما دمنا نتقيد بمجرد التأكد من صحة مراحل



الاستنتاجات التي نراها خطوة خطوة، بدون التصور الواضح للأفكار التي قادتنا لبناء هذه السلسلة من الاستنتاجات دون غيرها. اه

tout mathématicien sait d'ailleurs qu'une démonstration n'est pas véritablement "comprise" tant qu'on s'est borné à vérifier pas à pas la correction des déductions qui y
figurent, sans essayer de concevoir clairement les idées qui ont conduit à bâtir cette chaîne de déductions de préférence à tout autre.
(Bourbaki 1948, p.37 note1)





بين التعريف والتخريف، الرياضيات ليست مجرد تطبيقات .

مشكل الكثيرين عدم ضبط التعاريف وهذا ملاحظ في كثير من المفاهيم كمفهوم علاقة الترتيب.

فكثير من الناس بل من الأساتذة يعتقد أن مجموعة الأعداد المركبة غير قابلة للترتيب وتجده بنفسه يقول عن ثنائيات المستوي أنها مرتبة !!!

فهو لم يضبط فقط تعريف علاقة الترتيب بل لا يستحضر أن مجموعة الأعداد المركبة هي حقل معرف على R^2 بل تجده يدرس التمثيل البياني للأعداد المركبة دون أن ينتبه إلى ترتيبها في معلم متعامد ومتجانس.

مشكل الناس أنها لا تدرس التعاريف ولا تبحث عنها إنما تتجه نحو التمارين والتطبيقات فيكتشفون المفاهيم من خلال تطبيقاتها فيقومون بتأليف تعريف لها متصور مما عاهدوه.

والتعريف من خلال التطبيق تعريف ناقص غير مضبوط إذ يقتصر على المشاهد، ينفي غير المألوف ويخلطه بغيره من الشوائب.

لذلك هم لم يروا إلا علاقة الترتيب الحقيقية والتي تتجانس مع عملياتها الجبرية فيظنون أن ذلك شرط لازم لتكون علاقة ترتيب ومن هنا ينشأ الخطا.

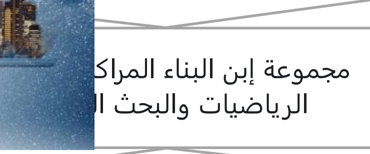
ورغم أن أغلب الأساتذة قد درسوا مبرهنة زارميلو التي تنص على أنه يمكن ترتيب أي مجموعة غير خالية ترتيبا جيدا، إلا أنها في نظرهم مجرد شيء مجرد لا يربطونه بما درسوه سابقا.

فإعتماد هؤلاء على تعريف الأشياء بمخيلاتهم يجعلهم يختلقون مفاهيم لا وجود لها رياضيا وما يزيد الطين بلة عدم ضبطهم للمنطق حتى وصل بعضهم لحد الخلط بين الرتابة ووجود المشتقة بإشارتها فنفوا وجود الرتابة إذا لم يوجد إشتقاق. سبب هذا الخلط هو عدم دراسة المنطق وعدم ضبط التعاريف منطقيا وعدم إستيعاب قيودها كما ينبغي وما يزيد الأمر سوء عدم الربط بين المعارف.

فالرياضي لابد أن يعطي أهمية كبرى لتصور المفاهيم وأن يمثل لها في ذهنه ثم يجردها من الشوائب حسب التعريف المخصص لها وذلك بالتأمل في كيفية تحريره.

فلا يكتفي بالنظر لرتابة دالة عددية على أنها مسألة حسابية بل يفك خيوطها لينظر لمكوناتها لينتبه إلى أنها خاصية معرفة على جداء ديكارتي لا مجرد مجموعة تعريف دالة.

ولا يكتفي بالنظر للأعداد المركبة على أنها مجرد صرح حسابي بل هي تمثل نظرة مزدوجة للتكرار المألوف في الاعداد الحقيقية فهي تكرار متعدد الابعاد وهذا ما يبينه التمثيل الهندسي للعدد المركب بظهور الجمع بين الزوايا. إن ضبط التعاريف وفهمها لبنة أساسية لتدريس الرياضيات فلا يمكن لمن لم يفهم علما أن ينقله بأمانة لتلاميذه .إن تدريس الرياضيات ليس مجرد مهنة بل هو فن ومتى فهمت الرياضيات على أصولها فإن دارسها يتذوقها كما يتذوق الحلوى.





بين الرأي والاجتهاد

ما هو الرأي ؟ الرأي لغة من رأى وهو ما يراه الشخص راجحا أو صوابا.

من تعريف الرأي يتضح أنه لابد أن يربط بالتفكير لتمييز الخطأ من الصواب.

لكن هل كل رأي يقبل ؟

إن الرأي إذا نسب لعلم معين فلابد أن يبنى على قواعده فلا يمكن أن ننسب للطب رأيا بني على التنجيم ولا للرياضيات رأيا بني على الفيزياء فمتى كان الرأي غير مبني على قواعد العلم فلا يمكن أن نقول أنه منه ومتى نسب إليه أصبح كذبا.

ومن هنا يظهر الفرق بين الرأي المحض والاجتهاد فالاجتهاد نوع من الرأي إلا أنه مبني على قواعد العلم.

مشكلة العصر أن الجميع أصبح يدلي برأيه معتقدا أن ذلك حرية شخصية بل يطلقون على ذلك حرية الرأي لكن أغلب هذه الآراء تصنف في باب الكذب والدجل ذلك أنهم ينسبون للعلوم ما ليس فيها.

والفرق بين رأي العلماء ورأي العوام أن العلماء يبنون آراءهم على قواعد العلوم فلا يناقضونها أما العوام فيدخلون في العلوم ما ليس منها أو ما يناقضها.

كمثال على ذلك فرضية كاردان بوجود عدد تخيلي i يحقق $i^2=-1$ فالعامي والمبتدأ عندما يرى هذا يظن أن كاردان وضع فرضية تناقض الرياضيات لأن $x^2+1=0$ لا تقبل حلولا وهذا من جهله إذ لا توجد معادلة بلا مجموعة فهذه المعادلة لا تقبل حلولا في R ولذلك كاردان سمى عدده i ولم يجعله من R ولم يقل أنه يفرض للمعادلة حلا في R .

وهذه هي الطريقة المتبعة في الرياضيات عند بناء المجموعات فنحن نضيف لها عناصر مثال ذلك N فللبحث عن النظير صنعنا Z فالمعادلة $n+1=0$ لا تقبل حلا في N فأصبحت تقبل حلا في Z .

الاجتهاد القائم على أدلة لا يشترط فيه عدم الخطأ فقد يخطى العالم عند تقييمه للأدلة.

لكن ما مدى تعدد الرأي في المسائل ؟

بالنسبة للرياضيات لابد من التفريق بين الرياضيات كقضايا وبين الاصطلاحات الرياضية وبين صناعة الرياضيات كعلم.

بالنسبة للقضايا فالرياضيات جعلت القضية إما صحيحة أو خاطئة ولا يوجد شيء بينهما ولهذا لا يمكن أن تتعدد الآراء في القضايا الرياضية لأن طريقة صناعتها تجعلها حتمية النتيجة.

لكن من ناحية الاصطلاحات والترميزات فهذه ليست الرياضيات ذاتها لكن آليات لكتابة الرياضيات والآليات قد تختلف بين شخص وآخر مثال ذلك الصفر هل هو عدد طبيعي أو لا فهذا يرجع للاصطلاح.

لكن الاصطلاح متى عرف فلا يمكن تحريفه فلا يقول أحد عندي 1 ليس عنصر من N فهذه مجموعة أخرى وليست N لذاك لا يمكن لأحد أن يقول مثلا أستعمل الترتيب في تطبيق هذه المبرهنة لكنه ليس هو الترتيب المعروف في الرياضيات فهذا لا يقبل من ناحيتين أن الصياغات الرياضية وضعت لمعنى فلا يجوز



تحريفه ومن ناحية أخرى أن المصطلحات مشهورة فلا يمكنك مخاطبة غيرك بمصطلح بغير مراده فهو لن يفهمك.

بالنسبة لطرق بناء الرياضيات فهذه كذلك اصطلاحية فهناك المنطق الشكلي وهناك المنطق الحدسي لكن هل يجوز أن يأتي أحد بمنطق آخر ؟ الجواب نعم بشرط أن يصرح بذلك لا أن يقتحم المنطق الشكلي فيحرفه فهذا لا يقبل.

ولذلك الضبط عند الاستدلال يقتضي استعمال قواعد العلوم والسير عليها فلا يجوز تحريفها ولا يجوز نسبة ما ليس منها لها.

أما التجديد في العلوم فموجود لكنه يبنى كذلك على قواعد ويصرح به فريمان عندما وضع الدالة زيتا فهو لم يخترع منطقا جديدا إنما بنى كائنا جديدا بآليات الرياضيات.

وعندما صرح بفرضيته في أصفار الدالة زيتا لم يجزم بصحتها بل تركها كتخمينة.

وكذلك عندنا صنع الهندسة الريمانية فهو لم يقل أن هذه هي الهندسة الإقليدية إنما صرح أنه يصنع هندسة من نوع آخر فبناها على المسلمات كما تبني جميع النظريات الرياضية.

العلوم الأخرى لا تختلف عن الرياضيات في مثل هذا فأينشتاين عندما وضع النظرية النسبية الخاصة لم يزعم أنه اخترع شيئا من محض رأيه بل انطلق مما أثبت فيزيائيا من أن سرعة الضوء ثابتة فبنى نزرسته بشكل لا يعارض المتفق عليه والمثبت لذلك هي تشمل ميكانيك نيوتن في السرعات الضعيفة.

المشكل الذي نواجهه اليوم أن الكثير يأتي يتكلم بمحض رأيه فينسب للرياضيات ما ليس فيها.

فعلى أي أساس تقرر أن دالة الجذر التربيعي مستمرة أو لا عند الصفر ؟

فلا يجوز أن تقول هي غير مستمرة عند الصفر لأنها غير معرفة عن يساره لأنك هنا خالفت تعريف الاستمرار عند علماء الطبولوجيا فهم يصرحون أن العمل على الطبولوجيا يكون على طبولوجيا الأثر أي في حالتنا على R_+^* وليس R

والجوار هنا هو من الشكل الذي يشمل [0, epsilon[وليس]-epsilon , +epsilon[

وعلماء الطبولوجيا لم يخترعوا القاعدة من عندهم بل هذه الرياضيات المصطلحة عليها في نظرية المجموعات الكائنات تدرس على مجموعة تعريفها لا خارجها.

فلماذا تبتدع شيئا من عندك ؟

والأمثلة على هذا كثيرة منها زعمهم أن: 0.999

أصغر من الواحد ولو رجعوا لتعريف الكتابة فهذا مما لا خلاف فيه هو يساوي 1 لكن عندما يكون المنطلق من الهوى وليس من قواعد العلم نصل لهذه التناقضات.

رغم أن المسألة لا تحتاج كثير تفكير فما دمت تتكلم في علم فلابد أن تحترم قواعده لكن رغم ذلك ما زلنا نرى من يناقش ويعارض في هذه المسألة!!!



ولو تأملنا وجدنا أن هؤلاء قوم لم يتمكنوا من هذه العلوم فبدل الاجتهاد في تعلمها اخترعوا لها قواعدا من عندهم ليقتحموها فهم يحرفون العلوم لتوافق هواهم ولا يريدون تعلمها ليوافق هواهم قواعد هذه العلوم

وقد نبه القرآن على هذا فقال الله عز وجل:

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِ عِلْمٌ ۚ إِنَّ السَّمْعَ وَالْبَصَرَ وَالْفُؤَادَ كُلُّ أُولَٰئِكَ كَانَ عَنْهُ مَسْئُولًا (36) .

وفي الحديث : إِنَّ اللَّهَ لاَ يَقْبِضُ العِلْمَ انْتِزَاعًا يَنْتَزِعُهُ مِنَ العِبَادِ، وَلَكِنْ يَقْبِضُ العِلْمَ بِقَبْضِ العُلَمَاءِ، حَتَّى إِذَا لَمْ يُبْقِ عَالِمًا اتَّخَذَ النَّاسُ رُءُوسًا جُهَّالًا، فَسُئِلُوا فَأَفْتَوْا بِغَيْرِ عِلْمٍ، فَضَلُّوا وَأَضَلُّوا) (متفق عليه) .

فمازال العلماء يعدون الكلام عن غير علم من الجهل ويذمونه بل هو أشر من الكذب والزور إذ ينسب للعلم ما ليس فيه ويوهمون الناس أنه منه فهو شبيه بتحريف التوراة والإنجيل، قال تعالى : فَوَيْلٌ لِّلَّذِينَ يَكْتُبُونَ الْكِتَابَ بِأَيْدِيهِمْ ثُمَّ يَقُولُونَ هَٰذَا مِنْ عِندِ اللَّهِ لِيَشْتَرُوا بِهِ ثَمَنًا قَلِيلًا ۖ فَوَيْلٌ لَّهُم مِّمَّا كَتَبَتْ أَيْدِيهِمْ وَوَيْلٌ لَّهُم مِّمَّا يَكْسِبُونَ (79)

وقال : وَقَالُوا مَا هِيَ إِلَّا حَيَاتُنَا الدُّنْيَا نَمُوتُ وَنَحْيَا وَمَا يُهْلِكُنَا إِلَّا الدَّهْرُ ۚ وَمَا لَهُم بِذَٰلِكَ مِنْ عِلْمٍ ۖ إِنْ هُمْ إِلَّا يَظُنُّونَ (24) .



لنضبط الرياضيات معا.

هل هذه المعادلة تقبل حلا في مجموعة ما ؟

$$\sqrt{x}+1=0$$

السؤال كما هو مطروح خاطئ لأن الصيغة لا تكون معادلة إلا في مجموعة كما أن هذه الصيغة جبرية فهي تحتاج لبنية حلقة مزودة بالجمع والضرب.

فيلزم هنا تعريف المجموعة مع بنيتها الجبرية ثم تعريف دالة الجذر التربيعي عليها.

إذا عملنا على R و C هذه الصيغة لا تقبل حلا لأنها تعود ل $x = 1$ والجذر التربيعي ل 1 هو 1 فهو لا يحقق المطلوب.

وحتى مع تمديد دالة الجذر التربيعي العقدية فلن يتغير الأمر بسبب العمليات الجبرية.

https://fr.m.wikipedia.org/.../Racine_d%27un_nombre_complexe

لكن هناك بنى جبرية أين يمكن تعريف دالة الجذر التربيعي لتوافق المألوف في البنية الحقيقية مع قبول هذه المعادلة حلا فيها.

مثال ذلك دائرة طولها 2 مزودة بنقطة بداية كصفر و بجمع وضرب أقيسة الأقواس مع الدور 2 .

ففي هذه الحلقة $1+1=0$ و $1.5 + 1.5 = 1$

ويمكن تعريف دالة الجذر التربيعي كالجذر التربيعي الحقيقي لطول القوس فهو يوافق دالة الجذر التربيعي على المجال $[0,2[$ فمتى كان ذلك كان جذر 1 هو 1 و $1+1 =0$ فهذا حل للمعادلة.

كخلاصة كيفما كانت البنية الجبرية فهنا نلاحظ أن $\sqrt{x}+1=0$ تعود لكون $\sqrt{x} = -1$ و $x = 1$

أي أن نظير 1 هو أحد جذوره وهذا محقق في أي بنية جبرية فيها $-1 = 1$ ك $Z/2Z$ مثلا.

لكن ضربنا المثال بالدائرة لتوافق دالة الجذر التربيعي المقترحة الدالة المألوفة على $[0,2[$.



رحلة ألف قرن وقرن في البحث عن المثالية البشرية في الصفر المتناهي في الصغر.

التفكير البشري بسيط جدا فالعقل البشري لا يمكنه التفكير في شيئين في آن واحد لذلك متى رأى جسما حاول تفكيكه لفهمه.

هذه الطريقة في التفكير نقلها للرياضيات فالعقل البشري يحاول فهم العالم عبر كتابته بلغة ترجع لمسلمات بسيطة أولها التسليم بوجود المجموعة الخالية والتي تذكرنا بالصفر ... لكنه صفر مهمل وموجود في آن واحد، مهمل بحيث لا يبحث العقل البشري عن تركيبه لكنه موجد لصناعة أشياء منه.

فالعقل البشري لم يكتفي بتقسيم الأشياء إلى أقسام صغيرة أولية بل زاد في تقسيمها حتى أصبحت أشياء متناهية في الصغر تقترب من مفهوم الصفر.

بل أعاد العقل البشري تركيب الأشياء الصغيرة لصناعة أشياء جديدة و لصناعة جميع الأشياء فكل الأشياء عند البشر مكونة من أجزاء مهملة.

بدأت رحلة العقل البشري في محاولة إعادة تركيب الأشياء من الذي يشبه اللاشيء في عقل البشر منذ عهد الإغريق حينما حاول إقليدس بناء الهندسة إنطلاقا من النقطة.

ما هي النقطة ؟ عند إقليدس هي تمثل الصفر الهندسي فهي شيء مهمل الأبعاد وكأنها غير موجودة وموجدة في آن واحد إذ هي مهملة الأبعاد فلا يمكن تقسيمها لكنها موجودة وتصنع من مثيلاتها المستقيمات التي طولها غير منتهي.

فمزج العقل البشري بين الصفر المتناهي في الصغر والمالانهاية لإعادة التعبير عن العالم.

لكن هذا الصفر المتناهي في الصغر يمثل عجز العقل البشري عن تجزئة الأشياء بغير إنتهاء كما تمثل المالانهاية عجزه عن تصور حدود غير المحدود وهو ما لا يدركه عقله.

ثم أليس من مثل هذا الصفر صنع البشر مساحة للقرص وطولا للدائرة ؟

بل منه صنع الأعداد الحقيقية فما هذه الأعداد في النهاية إلا تركيب أصفار مهملة ضمها لبعض عبر الكتابة العشرية فصنع أعدادا حقيقية.

لما زادت إكتشافات البشر وظهر المفهوم الأولي للدوال حاول العقل البشري بدوره فهمها وتبسيطها إذ كيف لهذه الدوال أن تكون موجودة وكيف يمكن ربطها بمتغيرها وهي التي لا تكتب كحسابات بسيطة ككثيرات الحدود.

فكعادته حاول تقسيم هذه الدوال لأصفار متناهية في الصغر ثم ركبها مقارنة بأصفار للمتغير فصنع ما سماه بالإشتقاق.

الإشتقاق هو محاولة بشرية لتفكيك الدالة وتقريبها من أبسط ما يكون وهو كثير الحدود x .

لكن كيف يمكنه فهم قيم الدالة في مجموعها وهو الذي لا يستطيع التفكير في أكثر من شيئين في آن واحد ؟



طريقة البشر هي النظر إلى قيمة الدالة كمتغير يزداد بزيادات متناهية في الصغر كلما زاد x فكأنه يرى x يزداد بقيم مهملة ومعه تزداد صورة الدالة بشكل متناسب مع القسم المهملة لتغير x .

لم يتوقف العقل البشري عند هذا بل صنع نفس الشيء مع التكامل فهو تركيب من قيم مهملة ثم عمم ذلك للقياس.

وكلما رأى العقل البشري كائنا معقدا هرع إلى تفكيكه عبر تقسيمه إلى أجسام متناهية في الصغر وكأنه لا يرى الدنيا إلا من خلال ما يجهله ويسلم بوجوده وهو الصفر المهمل الموجود.



كيف تتخلص الرياضيات من الذوق البشري : الإبسيلون نموذجا

مفهوم النهايات الحدسي متعلق بالاقتراب فحدسيا نرى أنه كلما اقترب متغير من قيمة اقتربت الدالة من نهاية.

لكن المشكل مع المفاهيم الحدسية أنها غير مضبوطة بل تتعلق بالذوق البشري فما أراه قريبا غيري يراه بعيدا.

الرياضيات تستعمل المساواة والمقارنة لضبط هذه المفاهيم فبدل الكلام على اقتراب غير متفق عليه يمكننا أن نتكلم عن اقتراب بمقياس خارج عن ذوق البشر.

المقياس في النهايات العددية وفي الفضاءات المترية عموما هو المسافة إذ يكفي أن نقول أننا اقتربنا إذا وصلنا لمسافة معينة بيننا وبين النهاية.

هذه المسافة نرمز لها بابسيلون.

الرياضيات كعلم تكميم تكمم الاقتراب فنقول اقتربنا أكثر إذا كان $\epsilon' < \epsilon$

فالذي تصنعه الرياضيات هو التخلص من التقريب البشري إلى نظام يصف نفسه بنفسه ومن أجل هذا تنجح المعادلات الرياضية في وصف الكون بدقة إذ تصف الظواهر الكونية بأجزاء من الكون نفسه.



ما الفرق بين الوصف الحدسي والتعريف الرياضي ؟

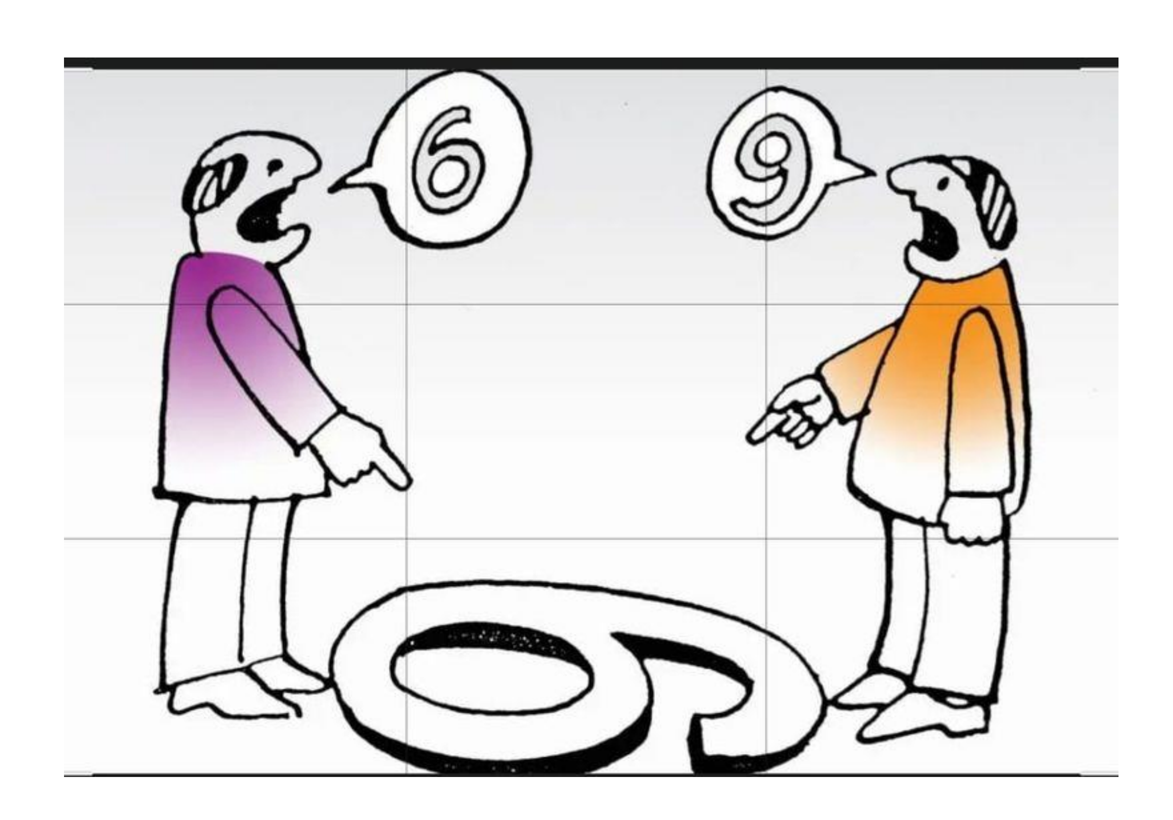
التعريف الرياضي يعتمد على الكتابة الشكلية فهو لا يتعلق بالزمن ولا بأحاسيس شخص معين ولا مقارنة به ولا بما يظنه صوابا بحدسه أي بتصوره.

فعندما تقول هذا الماء بارد ؟

فبارد هي صفة متعلقة بك كشخص لكن شخص آخر يمكن أن يجده حارا لأن معيار كل واحد منكما هي أحاسيسه وتصوراته.

لكن عندما نقول درجة حرارة الماء 5 درجة مئوية فهذه القيمة لا تتعلق بذوق أحد إنما هي خاصية للماء فقط.

فالكتابة الشكلية دورها تصفية الحدس البشري لتجريده من الذوق وإبقاء الوصف المتعلق بالكائن فقط دون تدخل ذوق أحد.



لنضبط الرياضيات معا: هل $0.999 ... = 1$?

قبل الجواب عن هذا السؤال لابد من إعطاء معنى للترميزات.

فالمساواة هنا بين عددين حقيقيين لكن لابد أن نعرف معنى النقاط التي أمام التسعات.

$0.999 ...$

وضع النقاط الثلاث أو أكثر أمام صيغة مكررة يعني أن النقاط تعوض كتابة مكررة على نفس الصياغة.

فإن وضع بعد النقاط حد نهائي على اليمين فيعني ذلك أن النقاط تعوض تكرار صياغة إلى غاية ذلك الحد

مثال ذلك كتابة صيغة كثير حدود مثل: $P(x) = x^6 + x^5 + ... + x + 1$

فهذا يعني أننا نقصد: $P(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

أما إذا لم نضع حدا على اليمين فمعنى ذلك تكرار الصيغة إلى المالانهاية مثال ذلك

$$e = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + ...$$

فهذا يعني أننا نريد أن نكتب

$$e = \lim \sum_{[k=0\ :\ k=n]} 1/k!$$

أي نهاية المجموع من الصفر إلى n لما n يؤول لزائد مالانهاية.

الآن وقد عرفنا رياضيا معنى النقاط بعد التسعات سنكتب ذلك حسب الترميزات فيكون لدينا:

$$0.999 ... = 9 \times 10^{(-1)} + 9 \times 10^{(-2)} + 9 \times 10^{(-3)} + ...$$
$$= \lim \sum[k=1 : k=n]\ 9 \times 10^{(-k)}$$
$$= 9 \lim \sum[k=1 : k=n]\ 1/10^k$$

وهذه نهاية مجموع متتالية هندسية،

نواصل الحساب

$$= 9 \times \lim [1/10 \times (1 - 1/10^n)/(1 - 1/10)]$$
$$= 9 \times \lim (1 - 1/10^n)/ 9)$$
$$= 9 \times 1/9 = 1$$

إذن الجواب نعم هما متساويان.

$$0.999 ... = 1$$

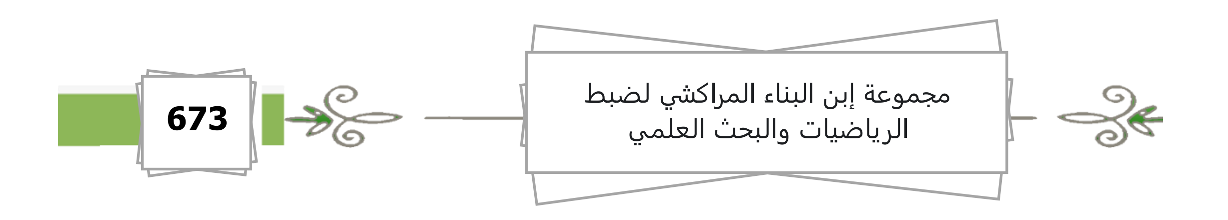
في الحقيقة هذه خاصية عامة فلدينا

$$2.123999... = 2.124$$
$$59.4523999... = 59.4524$$

يصطلح على هذه الكتابة بالكتابة العشرية غير النظيفة للأعداد الناطقة.

تعتبر هذه المساواة مثال جيد للتفريق بين ما يراه الحدس وما تراه المفاهيم الرياضية ذلك أن الحدس لا يتصور عدم الانتهاء فيتوقف عند

0.99999



لكنها لا يمكنه تصور المواصلة إلى المالانهاية فيظن أن هذا العدد لا يمكنه أن يساوي الواحد لأنه دائما هناك باق وهذا ما نراه في القصاصة المتمثلة في الصورة الثانية في المنشور فظن صاحبها أن هناك باق.

يعود هذا لعدم ضبط الكتابة الرياضية وفهم الترميزات فمتى ضبطنا ذلك بالكتابة الصحيحة كان حساب هذا العدد سهلا فنجد المساواة كما تقدم.

https://fr.m.wikipedia.org/.../D%C3%A9veloppement_d%C3...

0.99999999999999999999999999999999999999999999...

L'égalité 0,999... = 1 est depuis longtemps acceptée par les mathématiciens et enseignée dans les manuels. Ce n'est que dans les dernières décennies que les chercheurs en enseignement des mathématiques ont étudié comment les élèves perçoivent cette égalité. Certains la rejettent, à cause de leur « intuition » que chaque nombre a un développement décimal unique, qu'il doit y avoir des nombres infinitésimaux non nuls, ou bien que le développement 0,999... finit par se terminer. Ces intuitions sont erronées dans le système des nombres réels, mais il existe d'autres systèmes de nombres qui peuvent en admettre certaines.

مثال عن عدم ضبط الترميزات الرياضية

السلام عليكم وبعد: رفعا لكل لبس عن الزعم بأن العددين 1و 0.999999..... متساويان، إليكم التبرير الآتي:

1=3×0.3333333333........... +r (r=/=0)
alors:
1/3=0.3333333333.........+r/3
par contre:1/3=0.333333333333......
est fausse (parlant de valeur exacte).
de plus:
3(1/3)=0.9999999999999.........+r
d'où:
1=0.99999999999..........+r (r=/=0)
enfin:
1-0.999999999999............=r
cqf: 1=/=0.999999999999.........

ومنه العددان غير متساويين بالضبط (اما تقريبا، فنعم)

لنضبط الرياضيات معا: لماذا ندرس أصفار المقام في الدوال الحقيقية من الشكل $f(x)/g(x)$

بعيدا عن الخوارزمية التي نعلمها للتلاميذ عند البحث عن مجموعة التعريف في الكسور، سنحاول هنا ضبط مسألة البحث عن أصفار المقام في الدالة المذكورة أعلاه، ذلك أن البعض يظن أن المسألة متعلقة بالنهايات. لكن المسألة هنا جبرية وليست طبولوجية فهي متعلقة بتعريف الترميزات الرياضية.

هنا عندنا تركيب دالتين :

الدالة الأولى من R نحو R^2 ولنرمز لها بـ h وهي ترفق كل x من R بـ $(f(x) , g(x))$

من R^2 أي $h(x) = (f(x) , g(x))$ وهي معرفة على تقاطع مجموعتي تعريف f وg

$$Dh = Df \cap Dg$$

أما صورة h فهي محتواة في $f(Df \cap Dg) \times g(Df \cap Dg)$

أما الدالة الثانية فهي تركيب دالتين مشهورتين في حقل : الضرب و النظير ولنرمز لها بـk

$$k(x,y) = x . 1/y$$

عملية الضرب معرفة على R^2 أما عملية النظير فهي معرفة على R^* ذلك أن الصفر ليس له نظير.

فمجموعة تعريف k هي $R \times R^*$

الآن عند تركيب الدالتين لابد أن نقتصر على هذه المجموعة بالنسبة لصور h أي

$$R \times R^* \cap f(Df \cap Dg) \times g(Df \cap Dg)$$

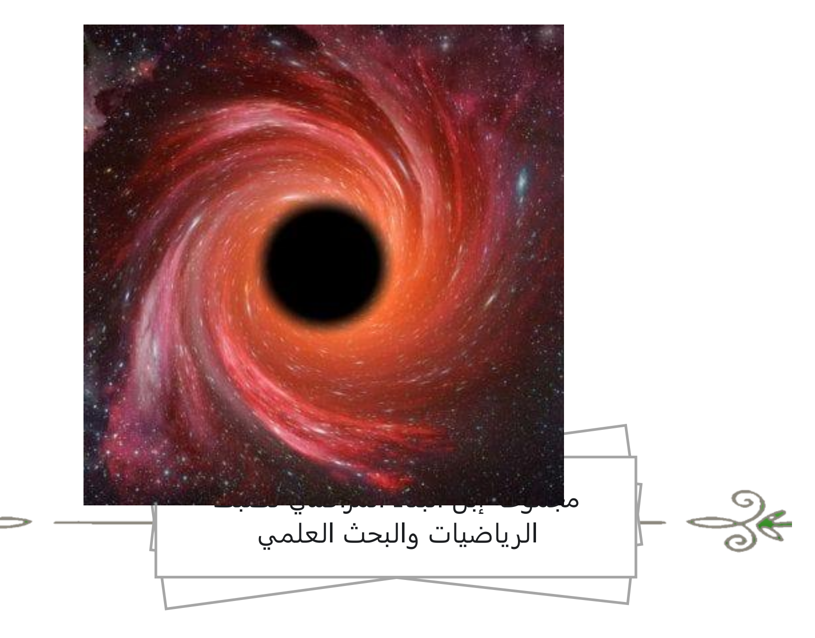
وهذا يعطينا $f(Df \cap Dg) \times [g(Df \cap Dg) \cap R^*]$ فمن كتابة القسم الثاني

$$g(Df \cap Dg) \cap R^*$$

نستنتج أنه لا بد أن نستثني أصفار g بل هنا لا نحتاج دراسة أصفار g على Dg لكن يكفي نزع أصفار g على $Df \cap Dg$

ومن هنا نفهم المطلوب أننا ننزع أصفار g بسبب تعريفات جبرية للترميزات فالكتابة $f(x)/g(x)$ هي ترميز مختصر لبناءات جبرية طويلة نوع ما.

وهذا من خصائص الترميزات الرياضية فهي تحول المفاهيم الطويلة إلى خوارزميات كتابية سهلة الاستعمال لكن ذلك لا يعني أن لا نهتم بأصلها فمن بنائها نفهم كيف يمكن لنا كرياضياتيين صناعة ترميزات أخرى.



مفاهيم الرياضيات لماذا ؟ هل هو تفلسف زائد أو بناء رائد ؟

كثير ما أتلقى تعليقات من طلبة بل ومن أساتذة على بعض ما أنشره بأنه فلسفة زائدة وأنها ليست من الرياضيات...

هذه التعليقات للأسف تنم عن جهل بالرياضيات وكيفية صناعتها وتاريخها.

فما أنشره ليست بدعة جئت بها بل هو ما جاء به أهل الرياضيات في القرون الماضية.

سألقي في هذا المنشور نظرة تاريخية سريعة على أهم محطات صناعة الرياضيات الحديثة كيف كانت وإلى ما آلت إليه.

بعد أن قام ريمان بدراسة تكامله تساءل العلماء عن الدوال القابلة للمكاملة حسب مفهومه فاكتشفوا دوالا غريبة مستمرة لكن غير قابلة للاشتقاق وهذا ما دفع جورج كنتور للنظر في هذه الدوال ونقاط شذوذها .

لقد قاد ذلك جورج كنتور Georg Cantor لدراسة المجموعات نفسها ففي بداية السبعينات من القرن التاسع عشر بعد لقائه سنة 1872 بـ ريشارد ديديكاند Richard Dedekind

تبادل كلاهما رسائل من 1872 إلى 1889 وكان مدارها حول فلسفة الرياضيات فكانت الدافع الرئيسي لكنتور للقيام بثورة في الرياضيات الحديثة.

تواصل كنتور في سنوات عمله بأكثر من أربعة عشر رياضياتي منهم :

Charles Hermite,

Camille Jordan,

Henri Poincaré,

Jules Tannery,

Élie Blanc,

Maurice d'Hulst,

Claude Alphonse Valson ;

les polytechniciens

Charles-Ange

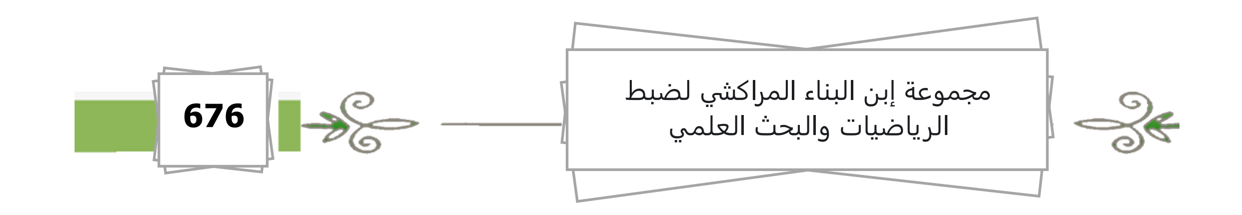
Laisant et Émile

Lemoine

Le philosophe et historien des sciences Paul Tannery

L'occultiste Papus (Gérard Encausse) ;

Le scientifi que Charles Henry,



Le sénateur Barthélémy Saint-Hilaire, Le fondateur de la Revue de métaphysique et de morale, Xavier Léon.

رسائل كنتور تطبع وتدرس ليومنا هذا لأنها تحمل الطريقة التي سار عليها للوصول لمفاهيم المجموعات وبراهينها.

https://www.erudit.org/.../1900-v1-n1.../039730ar.pdf

بعد مرض كنتور واصل العمل في آخر سنوات حياته كمدرس لفلسفة الرياضيات ثم تحول لعمل روتيني وذلك بعد أن قامت ضده حملة هوجاء بسبب اكتشافاته وما أشبه اليوم بالبارحة فلليوم هناك من لم يفهم أن الرياضيات ليست مجرد حسابات.

"Les découvertes de Cantor soulèvent la contestation des mathématiciens constructivistes de l'époque, au premier rang desquels on trouve Poincaré et surtout Kronecker, lequel n'hésitera pas à attaquer personnellement Cantor, bloquant ses publications dans le Journal de Crelle, et allant même jusqu'à tenter de bloquer sa carrière. Malgré cela, Cantor obtient un poste de professeur à temps plein à l'université de Halle en 1879.

Vient l'année 1884, et la première crise de dépression de Cantor. Celui-ci perd alors la force d'affronter ses opposants, et n'a plus la confiance d'entreprendre de nouvelles recherches. Il s'intéresse alors à l'histoire, à la littérature anglaise, intervenant notamment dans une crise contemporaine autour des pièces de Shakespeare. En 1899, il obtient un poste administratif consacré à des tâches routinières qui lui permet de renoncer à son enseignement. Peu à peu, ses crises se font de plus en plus fréquentes et longues, et il passe une large partie de son temps à soigner sa schizophrénie dans des maisons de repos. Il décède le 6 juin 1918 à Halle."

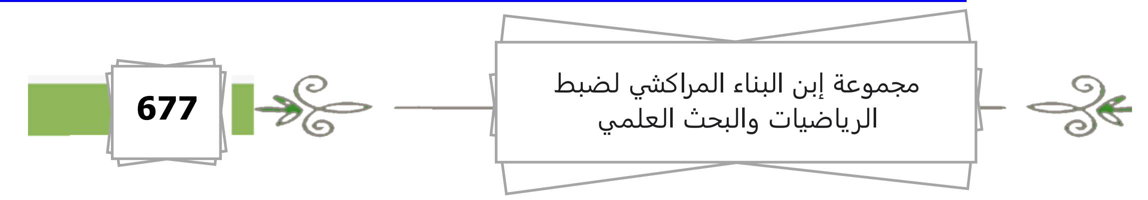
https://www.bibmath.net/bios/index.php?action=affiche...

من كنتور سننتقل لإيميل بوريل Émile Borel وتلميذه هنري لوبيغ Henri-Léon Lebesgue

فالقليل من يعلم أن مؤسس علم القياس بوريل نشر أبحاثه في كتاب ...

وقد كان الأستاذ إيميل بوريل يتواصل مع تلميذ لوبيغ في مجموعة رسائل حول فلسفة القياس وكيفية بناء العشائر ورسائلهم مطبوعة تمثل قسما آخر من تاريخ صناعة نظرية القياس والتكامل والاحتمالات .

http://www.numdam.org/article/CSHM_1991__12__1_0.pdf



ننتقل الآن إلى المنطق وأزمة الأساسية في بداية القرن العشرين 1901 أين كان هناك نقاش فلسفي في كيفية صناعة المنطق وبناء الرياضيات شارك فيه الكثير من علماء الرياضيات مثل:

Bertrand Russell

Gottlob Frege

Ernst Zermelo

Abraham Fraenkel

Thoralf Skolem

والذي توج بصناعة نظرية المجموعاتZFC .

وصاحب ذلك بداية مشروع دافيد هلبرت David Hilbert في بناء الرياضيات على أسس سليمة

Programme de Hilbert

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Programme_de_Hilbert

والذي أنتج الفضاءات التي نعرفها اليوم.

في العشرينات ظهر الخلاف بين علماء الرياضيات حول طريقة صناعتها بين المدرسة الحدسية والشكلية فالحدسية كانت بزعامة Luitzen Egbertus Jan Brouwer

والشكلية بزعامة هلبرت إلى أن جاء غودل بمبرهنته عدم الاكتمال.

فكان لكل مدرسة نظرتها وثمارها.

أما المدرسة الشكلية فأنتجت الفضاءات الهلبرتية والباناخية وغيرها مما نستعمله اليوم في الرياضيات والفيزياء.

أما المدرسة الحدسية فساعدت في ظهور الخوارزميات التي مهدت للإعلام الآلي من طرف.

يمكن أن نقول أن الرياضيات المعاصرة بدأت بأعمال ريمان التي على أثرها قامت ثورة رياضياتية بداية من أعمال كنتور إلى أعمال غودل.

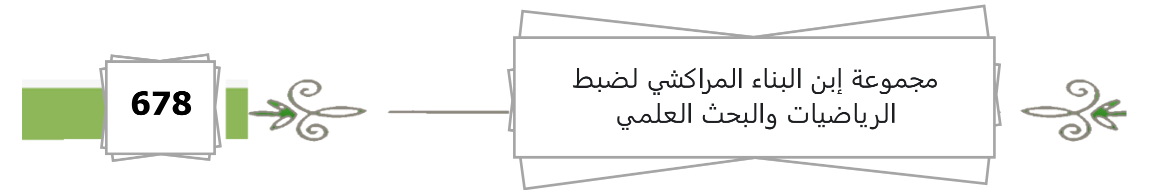
كانت ثورة فلسفية في كيفية بناء الرياضيات وهي التي أنتجت ما نراه اليوم.

لكن ماذا حصل بعدها ؟

في بداية الثلاثينيات رغم انتشار الرياضيات إلا أنها لم تكن تدرس على أسس مضبوطة فكانت الرياضيات التدريسية ضعيفة بعيدة عن الضبط الرياضياتي الذي أدخله هلبرت ومن سار على نهجه.

كما أن اكتشافات نهاية القرن التاسع عشر لم تكن تدرس.

حينها قام مجموعة من العلماء الفرانكفونيين تحت مسمى نيكولا بورباكي بإعادة كتابة الرياضيات من البداية عبر الترميز والكتابة الشكلية وانطلاقا من نظرية المجموعات ZF مع مسلمة إبسيلون هلبرت الأقوى قليلا من مسلمة الاختيار.



لاقت مؤلفاتهم رواجا كبيرا فتأثرت بها المدارس المعاصرة ونهجت نهجها بل طريقتها هي المدروسة اليوم.
https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Nicolas_Bourbaki

لكن طريقة الكتابة الشكلية لمجموعة بورباكي كانت على حساب تغييب الحدس الرياضياتي.

تأثير بورباكي وصل لأوجه في الستينيات بحيث دفع إلى موجة إصلاح للرياضيات في التعليم ما قبل الجامعي تحت مسمى الرياضيات الحديثة .

فأدخل التجريد بشكل مجحف كادت معه تختفي هندسة إقليدس وكانت عبارة ديودني الشهيرة وهو أحد أعمدة مجموعة بورباكي : ليسقط إقليدس.

تلقت مجموعة بورباكي انتقادات عديدة خاصة من رواد المدرسة الحدسية وممن انتقد طريقتهم كارل سيجل بعبارته الشهيرة : ليس بتكرار هوم هوم يمكننا صناعة نظريات جديدة ذات أهمية .مشيرا بذلك لصلاة البوذيين للوصول للمعرفة.

Carl Ludwig Siegel, déclare : « Ce n'est pas en répétant "Hom, Hom", qu'on démontre des théorèmes sérieux » : « Hom » étant une opération mathématique formelle, et une allusion au « Om Om » d'une célèbre mantra (incantation) bouddhiste.

ذلك أنه إن كانت الكتابة الشكلية الحديثة للرياضيات قوية من حيث ضبط الرياضيات وبرهنة المبرهنات فإنها في ذاتها لا تصنع مفاهيم جديدة.

وفي هذا يقول قبله آرنولد دونجوي سنة 1949 :

En 1949 Arnaud Denjoy dénonce les « professions de doctrine de M. Dieudonné » et écrit :

« Une école mathématique française jouissant d'une notoriété universelle, se rassemble sous les enseignes […] d'un chef mythique, N. Bourbaki. Ce personnage [..] ressuscite en lui certaines des antinomies paradoxales qu'il se flatte d'avoir balayées des cerveaux mathématiques […]. L'axiomatisation des théories mathématiques parvenue à une maturité suffisante, tel est le principe de Bourbaki. Axiomatiser, c'est faire le tableau complet des hypothèses nécessaires à l'édification logique déductive de la dite théorie. C'est ensuite, ce niveau une fois atteint, effacer toutes les notions imagées qui soutenaient la pensée du chercheur dans son travail de découverte. Cette rupture avec la source des intuitions originelles, est une nécessité fondamentale pour le bourbakiste […]. Le

symbolisme mathématique peut, dans une brève période, rendre aisée une vaste synthèse des théories connues, plus ou moins développées. Mais pour acquérir de nouvelles notions fécondes, il faudra faire éclater ces moules par le recours direct aux réalités, qui ne se laisseront jamais embrasser toutes dans un système clos de formes perpétuellement adéquates.»

فصناعة مفاهيم جديدة تحتاج للحدس وتجريد الواقع وتصور أن ما صنع سابقا كاف لصناعة أي رياضيات تنقضه مبرهنة غودل.

أين نحن اليوم ؟

هذه الصفحة من تاريخ الرياضيات المعاصر للأسف غيبت من تكوين الأساتذة حتى ظن بعضهم أن الرياضيات مجرد تعاريف ومبرهنات وهذا الذي عليه التدريس اليوم فالتلميذ النجيب هو الذي يحسن تطبيق المبرهنات لكن لا مكان للابداع.

لذلك نجد اليوم العالم الرياضياتي في أزمة أفكار أما التلاميذ فأصبحوا يحفظون الرياضيات وكيف نطلب منهم فهمها إذا كان الأساتذة أنفسهم لا يفهمون طريقة صناعتها ؟

بل حتى الضبط غيب فلم نعد نرى المنطق ولا نظرية المجموعات ولا البنى الجبرية بل تحولت الرياضيات لتطبيق مبرهنات وحسابات.

أما البحوث اليوم فهي اجترار لما سبق إلا بعض ما ينشر من فترة لأخرى حول مسائل هلبرت.

فمن ناحية المفاهيم توقفنا في الأربعينيات من القرن الماضي ولا تكاد تظهر مفاهيم جديدة يعول عليها لتطوير الرياضيات.

إن الرياضيات تجمع بين الفهم والضبط فلابد من الحدس الرياضياتي لتصور بنائها والضبط الشكلي للقيام ببناء هذا التصور فمتى تعطل أحد الطرفين تعطلت الرياضيات.

لكن ما الذي يجب علينا تدريسه اليوم ؟

أدعوكم لقراءة هذه المناقشة في هذا الرابط بالفرنسية من موقع CNRS الفرنسي بعنوان

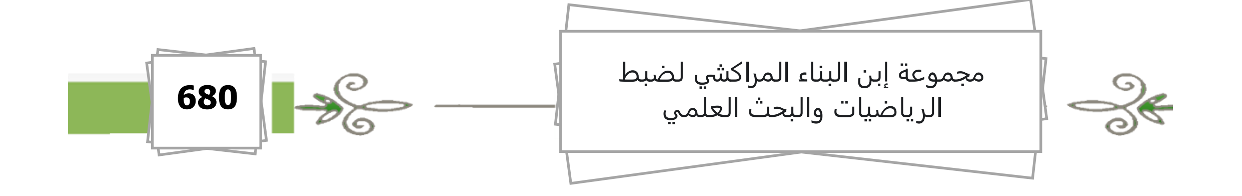
Faut-il mettre l’école à la poubelle ?

http://images.math.cnrs.fr/Faut-il-mettre-l-ecole-a-la...

وهذا مقتطف منها مترجم:

كثرة التشبث بالعقل يضر بالعقل .ما أعنيه هو أنه في الرياضيات ، ربما أكثر من التخصصات الأخرى ، يمكن للمرء أن يرتبط بشدة بالتفاصيل .

مثال .أخبرني أحد الزملاء أن مدرس الرياضيات لابنه أعطى التمرين التالي:



حلل لعوامل العبارة:

6a + 3ab.

وجواب التلميذ كان:

6a + 3ab = a(6 + 3b). La

فكانت العلامة هذا التمرين: صفر .بدون تعليق: لا على الدرجة ولا على صياغة التمرين ولا على عواقب هذا النوع من) العدد قليل) من المعلمين ".

إذن ، هل معلمين الرياضيات و / أو علماء الرياضيات مدافعون عن الصرامة المطلقة التي لا جدال فيها؟ هذا بالضبط هو المكان الذي يكون فيه الجميع مخطئين ، وربما أيضًا معلمي الرياضيات ، عندما نسمع أنه مع علماء الرياضيات ، لا يمكننا التأهل لأنه ، بالنسبة إلى الأخير ، "2 و 2 يساويان أربعة ، وهذا كل شيء !

"لكن دعنا نرى !كم عدد النقاشات التي دارت في تاريخ الرياضيات حول هذه الفكرة أو تلك؟

فقط خذ ، على سبيل المثال ، مفاهيم الزوايا أو الخطوط العمودية أو الافتراض الخامس الشهير لإقليدس وانظر كيف تطورت هذه الأفكار على مر القرون مع وصول مفاهيم جديدة.

.....

ومع ذلك ، فأنا أتفق معك في أن تعليمنا في المدرسة يتعلق في الغالب بالمفاهيم القديمة ، التي تعود إلى بضعة قرون ، بدلاً من الاكتشافات الأخيرة .بعد قولي هذا ، أتساءل: من الذي يعطي نظرة جامدة للرياضيات إن لم يكن معلمين الرياضيات؟.

النص الفرنسي:

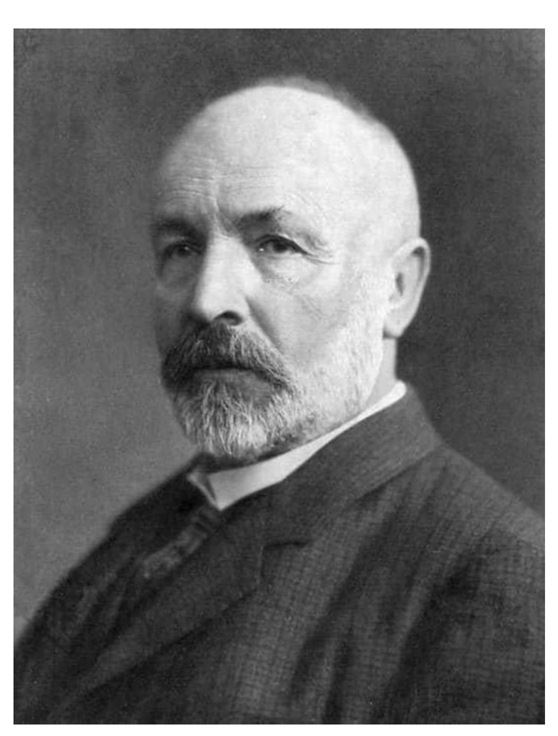
Trop d’accrochage à la raison nuit à la raison. Ce que je veux dire c’est qu’en mathématiques, peut-être plus que dans d’autres disciplines, on peut s’accrocher farouchement à des détails. Un exemple. Un collègue me racontait que le professeur de mathématiques de son fils avait donné l’exercice suivant : factoriser 6a + 3ab. Réponse de l’élève : 6a + 3ab = a(6 + 3b). La note pour cet exercice : zéro. Sans commentaire : ni sur la note, ni sur l’énoncé de l’exercice, ni sur les conséquences de ce genre de « prouesses de (quelques) professeurs ». Alors, les professeurs de mathématiques et/ou les mathématiciens seraient-ils les défenseurs d’une rigueur absolue, indiscutable ? C’est justement là que tout le monde se trompe, peut-être aussi les professeurs de mathématiques, lorsqu’on entend dire qu’avec les mathématiciens, on ne peut

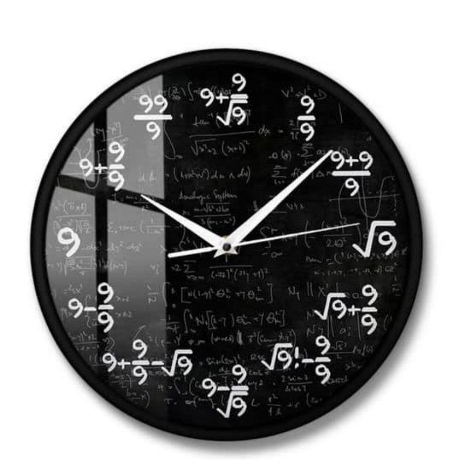


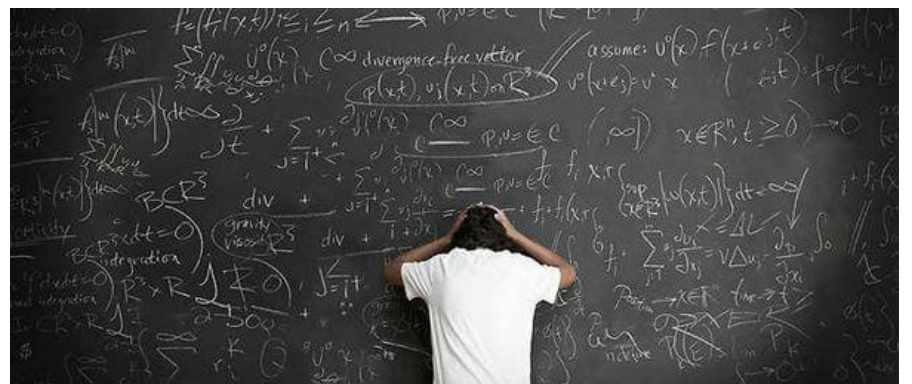
pas nuancer car, pour ces derniers, « deux et deux font quatre, un point c'est tout ! » Mais voyons ! Combien de débats y-a-t-il eu dans l'histoire des mathématiques autour de telle ou telle notion ? Il suffit de prendre, par exemple, les notions d'angle ou de droites perpendiculaires ou le célèbre cinquième postulat d'Euclide et de voir comment ces idées ont évolué au fil des siècles avec l'arrivée de nouveaux concepts.

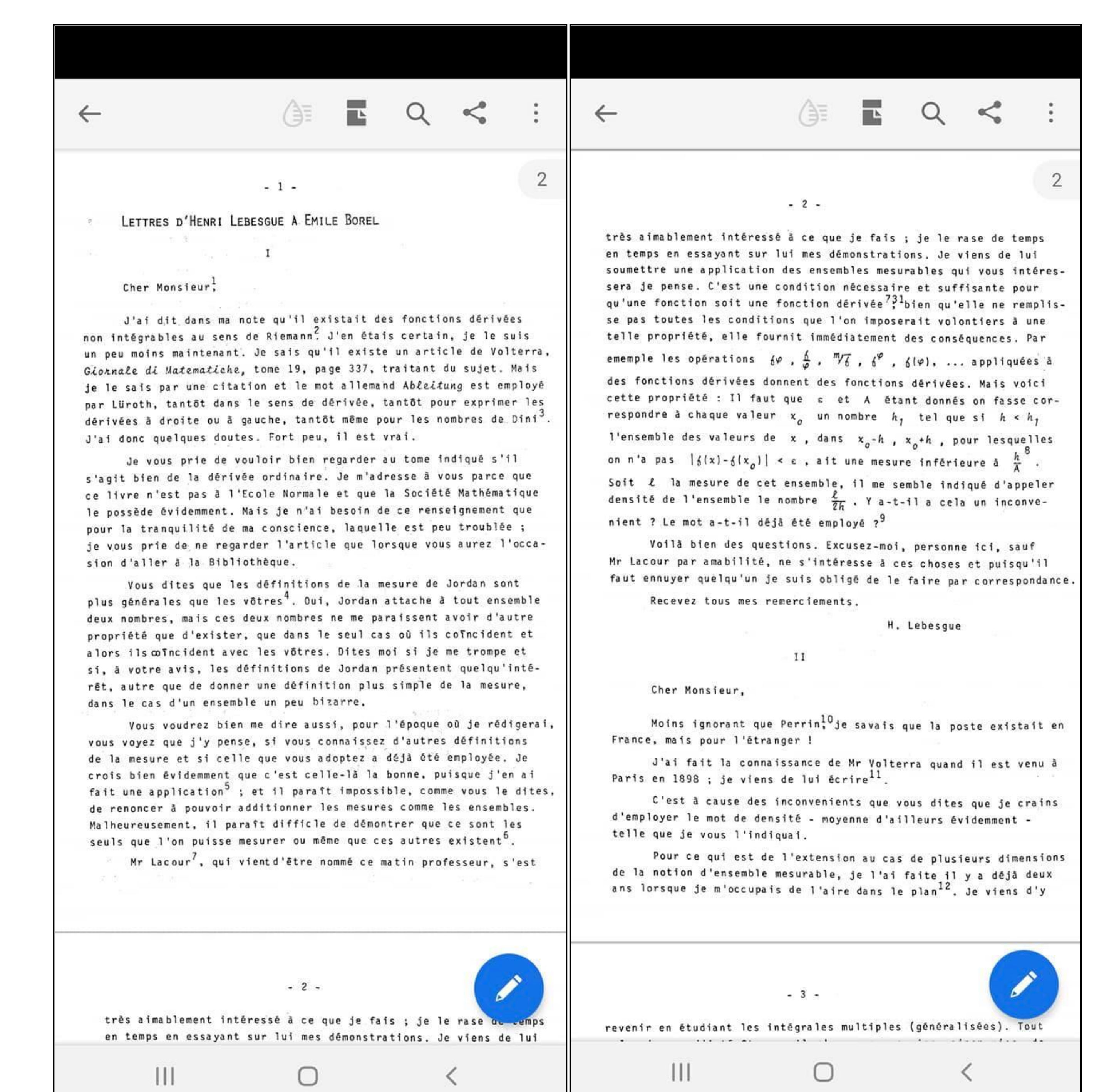
.....

Et pourtant, je suis d'accord avec toi sur le fait que notre enseignement à l'école porte en majorité sur de vieilles notions, qui datent de quelques siècles, plutôt que sur les dernières découvertes. Ceci dit, je me demande : qui renvoie une image statique des mathématiques si ce n'est nous, enseignants de mathématiques ?









LETTRES D'HENRI LEBESGUE À EMILE BOREL

I

Cher Monsieur[1],

J'ai dit dans ma note qu'il existait des fonctions dérivées non intégrables au sens de Riemann[2]. J'en étais certain, je le suis un peu moins maintenant. Je sais qu'il existe un article de Volterra, *Giornale di Matematiche*, tome 19, page 337, traitant du sujet. Mais je le sais par une citation et le mot allemand *Ableitung* est employé par Lüroth, tantôt dans le sens de dérivée, tantôt pour exprimer les dérivées à droite ou à gauche, tantôt même pour les nombres de Dini[3]. J'ai donc quelques doutes. Fort peu, il est vrai.

Je vous prie de vouloir bien regarder au tome indiqué s'il s'agit bien de la dérivée ordinaire. Je m'adresse à vous parce que ce livre n'est pas à l'Ecole Normale et que la Société Mathématique le possède évidemment. Mais je n'ai besoin de ce renseignement que pour la tranquilité de ma conscience, laquelle est peu troublée ; je vous prie de ne regarder l'article que lorsque vous aurez l'occasion d'aller à la Bibliothèque.

Vous dites que les définitions de la mesure de Jordan sont plus générales que les vôtres[4]. Oui, Jordan attache à tout ensemble deux nombres, mais ces deux nombres ne me paraissent avoir d'autre propriété que d'exister, que dans le seul cas où ils coïncident et alors ils coïncident avec les vôtres. Dites moi si je me trompe et si, à votre avis, les définitions de Jordan présentent quelqu'intérêt, autre que de donner une définition plus simple de la mesure, dans le cas d'un ensemble un peu bizarre.

Vous voudrez bien me dire aussi, pour l'époque où je rédigerai, vous voyez que j'y pense, si vous connaissez d'autres définitions de la mesure et si celle que vous adoptez a déjà été employée. Je crois bien évidemment que c'est celle-là la bonne, puisque j'en ai fait une application[5] ; et il paraît impossible, comme vous le dites, de renoncer à pouvoir additionner les mesures comme les ensembles. Malheureusement, il paraît difficile de démontrer que ce sont les seuls que l'on puisse mesurer ou même que ces autres existent[6].

Mr Lacour[7], qui vient d'être nommé ce matin professeur, s'est

- 2 -

très aimablement intéressé à ce que je fais ; je le rase de temps en temps en essayant sur lui mes démonstrations. Je viens de lui

très aimablement intéressé à ce que je fais ; je le rase de temps en temps en essayant sur lui mes démonstrations. Je viens de lui soumettre une application des ensembles mesurables qui vous intéressera je pense. C'est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit une fonction dérivée[7] ;[31] bien qu'elle ne remplisse pas toutes les conditions que l'on imposerait volontiers à une telle propriété, elle fournit immédiatement des conséquences. Par ememple les opérations $f\varphi$, $\frac{f}{\varphi}$, $\sqrt[m]{f}$, f^{φ} , $f(\varphi)$, ... appliquées à des fonctions dérivées donnent des fonctions dérivées. Mais voici cette propriété : Il faut que ε et A étant donnés on fasse correspondre à chaque valeur x_o un nombre h_1 tel que si $h < h_1$ l'ensemble des valeurs de x , dans x_o-h , x_o+h , pour lesquelles on n'a pas $|f(x)-f(x_o)| < \varepsilon$, ait une mesure inférieure à $\frac{h}{A}$[8] . Soit ℓ la mesure de cet ensemble, il me semble indiqué d'appeler densité de l'ensemble le nombre $\frac{\ell}{2h}$. Y a-t-il a cela un inconvenient ? Le mot a-t-il déjà été employé ?[9]

Voilà bien des questions. Excusez-moi, personne ici, sauf Mr Lacour par amabilité, ne s'intéresse à ces choses et puisqu'il faut ennuyer quelqu'un je suis obligé de le faire par correspondance.

Recevez tous mes remerciements.

H. Lebesgue

II

Cher Monsieur,

Moins ignorant que Perrin[10], je savais que la poste existait en France, mais pour l'étranger !

J'ai fait la connaissance de Mr Volterra quand il est venu à Paris en 1898 ; je viens de lui écrire[11].

C'est à cause des inconvenients que vous dites que je crains d'employer le mot de densité - moyenne d'ailleurs évidemment - telle que je vous l'indiquai.

Pour ce qui est de l'extension au cas de plusieurs dimensions de la notion d'ensemble mesurable, je l'ai faite il y a déjà deux ans lorsque je m'occupais de l'aire dans le plan[12]. Je viens d'y

- 3 -

revenir en étudiant les intégrales multiples (généralisées). Tout

لنضبط الرياضيات معا : هل يصح استعمال المشتقة لبرهنة $\lim \sin(x)/x = 1 , x \to 0$?

قبل شرح هذه المسألة لابد لنا من مقدمتين:

الأولى منطقية وهي أن القضية $P \Rightarrow P$ صحيحة سواء كان P صحيحة أو خاطئة لذلك هي لا تبرهن صحة P .

قد يستغرب البعض ما فائدة كتابة هذا فالجواب هو $P \Rightarrow Q \Rightarrow P$

فهناك من ينطلق من القضية Q يظن أنها صحيحة فيبرهن P لكن أصلا القضية Q برهنت بـ P فبرهانه هنا خاطئ.

المقدمة الثانية هي تحليلية في تعريف الدالة الجيبية sin وحساب نهاياتها

التعريف المشهور في الثانوي ينطلق من الدائرة المثلثية فيمكن مراجعته في موضعه.

وعبر هذه الدائرة نبرهن بالحصر بالمساحة كما هو في الشكل من أجل كل x موجب تماما بجوار الصفر أن $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ ثم نستنتج أن $1 \leq x/\sin(x) \leq 1/\cos(x)$

وعندها نحسب النهاية بالحصر نجد $\lim \sin(x)/x = 1$ مع مراعاة فردية sin وزوجية cos للقيم السالبة.

لحساب المشتقة نستخدم القانون: $\sin(x) - \sin(a) = 2 \sin((x - a)/2) \cos((x+a)/2)$

فنجد

$$\lim (\sin(x) - \sin(a))/(x - a) =$$
$$\lim 2 \sin((x - a)/2)/(x - a) \cos((x+a)/2)$$

باستعمال النهاية السابقة نستنتج قيمة المشتقة عند a فنجد $(\sin(x))' = \cos(x)$

فهذا تذكير سريع لطريقة حساب مشتقة الدالة.sin

للدالة sin تعريف آخر اعتمدته مجموعة بورباكي فهي تستعمل تعريفا للدوال الجيبية عن طريق النشر فتضع مباشرة $\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - ....$ وكذلك نشر cos فالدالة sin قابلة للاشتقاق بالتعريف ومشتقتها cos .

من هاتين المقدمتين يتضح أنه على تعريف الدالة الجيبية في الثانوي من الدائرة المثلثية حساب $\lim \sin(x)/x = 1 , x \to 0$ من المشتقة يعود لكتابة $P \Rightarrow P$

ذلك أن المشتقة تحسب بالنهاية ذاتها فاستعمال المشتقة هنا في البرهان يجعل البرهان خاطئا.

أما على تعريف الأسية بالسلاسل على طريقة بورباكي فالبرهان صحيح إلا أن ذلك ليس من مستوى الثانوي ولا في بال من يبرهن هذه النهاية عادة.

مثل هذه الأخطاء نجدها في مواضع كثيرة كتعريف بعضهم قابلية قسمة عدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b إذا كان a/b عدد صحيح.



لكن هذا التعريف يحتاج للأعداد الناطقة والتي تبنى أصلا بالأعداد الصحيحة فهو تعريف يستعمل نفسه وهو خطأ.

ومن ذلك قول بعضهم تتساوى مجموعتان إذا وفقط إذا كانت كل منهما محتواة في الأخرى

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

وهذا خطأ لأنه قبل أن نكتب $A = B$ لابد أن نعطيها تعريفا وهذه لا تعرف إلا بكتابة

$$A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$$

فلا يمكننا أن نضع

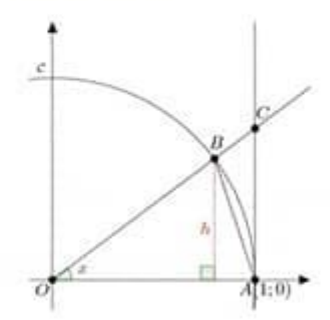
$$A = B \Rightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

لأنه أصل تعريف المساواة بين A و B .

إنه من المهم معرفة ترتيب بناء تعاريف وبراهين الرياضيات حتى لا يقع المشتغل فيها في مثل هذه الأخطاء.



Démonstration : **Calcul de la limite à droite**



Le cercle $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique. Donc $h = \sin(x)$ et $AC = \tan(x)$.

L'angle x est dans le 1er quadrant : $0 < x < \pi/2$. Pour tout x dans ce quadrant on a $\sin(x) > 0$ et $\cos(x) > 0$. En particulier $\sin(x) \neq 0$.

Désignons l'aire du triangle OAB par $\mathcal{A}_{\Delta OAB}$, l'aire du secteur OAB par $\mathcal{A}_{sOAB}$ et l'aire du triangle OAC par $\mathcal{A}_{\Delta OAC}$. On voit sur la figure que

$$\mathcal{A}_{\Delta OAB} < \mathcal{A}_{sOAB} < \mathcal{A}_{\Delta OAC}$$

Or $\mathcal{A}_{\Delta OAB} = \dfrac{OA \cdot h}{2} = \dfrac{1 \cdot \sin(x)}{2} = \dfrac{\sin(x)}{2}$, donc $\mathcal{A}_{\Delta OAB} = \dfrac{\sin(x)}{2}$.

Comme $\dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{\mathcal{A}_{sOAB}}{\pi \cdot 1^2}$ on déduit que $\mathcal{A}_{sOAB} = \dfrac{x}{2}$.

Enfin $\mathcal{A}_{\Delta OAC} = \dfrac{OA \cdot AC}{2} = \dfrac{1 \cdot \tan(x)}{2} = \dfrac{\tan(x)}{2}$ donne $\mathcal{A}_{\Delta OAC} = \dfrac{\tan(x)}{2}$.

On peut donc écrire

$$\mathcal{A}_{\Delta OAB} < \mathcal{A}_{sOAB} < \mathcal{A}_{\Delta OAC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan(x)}{2}$$

Puisque $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et que $\dfrac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{2} = \dfrac{\sin(x)}{2\cos(x)}$ on peut écrire

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$$

Comme $\sin(x) \neq 0$ et que $\dfrac{2}{\sin(x)} > 0$ on peut multiplier chaque membre de l'encadrement par $\dfrac{2}{\sin(x)}$ sans changer l'ordre. Donc

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{2} < \frac{2}{\sin(x)} \cdot \frac{x}{2} < \frac{2}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$$

Après simplification on a

$$\Leftrightarrow \quad 1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

Comme 1, $\dfrac{x}{\sin(x)}$ et $\dfrac{1}{\cos(x)}$ sont tous positifs, leurs inverses sont ordonnés de manière décroissante

$$\Leftrightarrow \quad 1 > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x)$$

On constate que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est encadrée par la fonction constante $x \mapsto 1$ et la fonction cosinus. De plus, on a

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \cos(x) = \cos(0) = 1$ par continuité de la fonction cosinus.
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 = \lim\limits_{x \to 0^+} \cos(x)$

Un théorème (le théorème des gendarmes) nous garantit que dans une telle situation (une fonction est encadrée par deux fonctions dont les limites existent et sont les mêmes) la limite de la fonction encadrée existe et est égale à celle des deux autres. On peut donc écrire que

$$\lim_{x \to 0^+} 1 = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \cos(x) = 1$$

et conclure que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

لماذا لا يستطيع التلاميذ تحرير البراهين ؟

إن الكتابة الرياضياتية رغم تجريدها هي لغة حية بل أكثر منها من اللغات الأخرى ذلك أنها ليست فقط لغة تعبير عن المراد بل نستطيع إجراء خوارزميات كتابية عليها لتوليد جمل جديدة منها تشكل قضايا صحيحة.

أول ما يصطدم به التلميذ عند احتكاكه باللغة الرياضياتية هو إعطاء كائناتها معنى ويمر ذلك عادة بالحدس ومحاولة التصور إلا أن التصور من غير الفهم الصحيح وخلطه بالألفاظ اللغوية المألوفة يشوه المعنى لذلك نجد بعض التلاميذ يعبر عن المستقيم بالخط رغم أن لفظ الخط هو لفظ لغوي يحتاج بذاته لتعريف بل هو أصعب تعريفا من المستقيم لكنه مألوف لغويا لذي التلميذ إذ هو الخط الذي يرسمه بيده.

التفريق بين الكتابة الرياضياتية واللغة:

إن أول ما يحتاجه التلميذ هو التفريق بين اللغة الرياضياتية وبين الألفاظ اللغوية فلو تأملنا أخطاء التحرير الرياضياتي عند التلاميذ فنجد على رأسها محاولة التلميذ البرهنة بألفاظ لغوية لا اصطلاحات رياضية لأن هذه الألفاظ لها صور ذهنية في عقله لكنها ألفاظ موهمة المعنى إذ تخضع لذوق المفكر لا للضبط الرياضياتي كما أنها لم توضع لتخضع للخوارزميات الكتابية التي تحول كتابة لكتابة مع المحافظة على الروابط المنطقية.

غياب تكوين الأساسيات لذى التلميذ من حيث البناء الرياضياتي:

لا عجب أن يخلط التلاميذ بين الكتابة الرياضياتية والكتابة اللغوية ذلك أنهم لم يعودوا طيلة مدة دراستهم على هذه الكتابة كما أن حذف المنطق من المقررات زاد الأمر سوء فلا يمكن للتلميذ إجراء التحويلات الكتابية إن لم يضبط الروابط المنطقية.

كما أن غياب دراسة نظرية المجموعات جعل المنهج الدراسي يبني المفاهيم الرياضية لذى التلميذ على معاني حدسية لا مسلمات رياضياتية مضبوطة والمشكل الأكبر في المعاني الحدسية أنها متعلقة بذوق المفكر لا بالحقيقة الرياضياتية المجردة.

غياب تكوين الأساسيات لذى التلميذ من حيث البرهنة الرياضياتية:

وما زاد الطين بلة أن النظام الدراسي لم يوضع ليكتسب التلميذ المفاهيم إنما وضع ليحسن التلميذ تطبيق الحسابيات وحفظها.

فإذا كانت التمارين في الماضي تنطلق من مسائل من الواقع فيضطر التلميذ للقيام بالتجريد قبل تطبيق القواعد فاليوم جل التمارين هي تطبيق مباشر للقوانين والمبرهنات.

هذه الطريقة لا تدفع التلميذ لطرح أهم سؤال في الرياضيات وهو لماذا ، لماذا اخترنا هذه الطريق دون أخرى.

سؤال "لماذا" يدفع التلميذ للتفكير في خصائص الكائنات الرياضياتية والتعامل معها ككائنات حية فمتى رآها ربطها حدسيا بخصائص سببية تعطي نتائج حتمية يمكنه تحويلها لبراهين رياضياتية.



إصلاح تفكير وتحرير التلميذ:

إن أول ما يجب إصلاحه في تفكير التلميذ هو التفريق بين المصطلحات الرياضياتية والألفاظ اللغوية وهذا لا يتم إلا عن طريق ضبط التعاريف واستحضارها والتفريق بين الحدسيات و النتائج المنطقية فالأولى تبنى على التخمين والتكهن أما الثانية فعلى تحويلات كتابية خوارزمية منطقية مضبوطة.

من الناحية العملية على التلميذ قبل الخوض في كتابة برهان استحضار التعاريف أو البحث عنها وأن لا يدخل فيها أي لفظ لغوي فمتى كتبها كتابة رياضياتية فعليه أن يحول كل تكهن حدسي في رأسه إلى خوارزمية كتابية مصطلح عليها يطبقها على التعاريف فتنتج له المطلوب.

هذا الضبط في التحرير يتطلب دراسة للأساسيات فالتلميذ الذي يجهل الروابط المنطقية لا يمكنه الكتابة بها.

إصلاح حدس التلميذ:

أما حدس التلميذ أو ما نترجم له واقعيا : "بأي فكرة أستعمل لأصل للحل "فيحتاج لتنمية تمر بفهم طبيعة الكائنات الرياضياتية وتجريدها لخصائصها الأولية .

فكيف نبرهن أن العدد الأولي 2 ليس مربعا تاما لعدد ناطق إن لم نفهم معنى التربيع ومشكلة العدد 2، فالعدد 2 عدد أولي وأول خاصية في العدد الأولي أنه لا يقبل التفكيك أما التربيع فهو جذاء عددين فهو قابل للتفكيك فلا ريب أن البرهان هنا لابد أن يستعمل عدم قابلية التفكيك أي غياب هذه الخاصية.

وغياب الخاصية نبرهنه بالخلف إذ كيف تبين أن الشيء غير موجود ؟ فلو اعتمدت فقط على كونه لو كان موجودا لرأيته أو رأيت ما يدل على وجوده للزمك إدراك كل موجود وهذا محال لكن يمكنك بيان أن وجوده يتناقض مع وجود غيره وهذا بحذ ذاته فهم لخاصية عدم الوجود.

مكونات التفكير والتحرير:

فإذا تبين ذلك يكفي كتابة خاصية الوجود هنا أي أن 2 مربع تام لعدد ناطق بكتابته القانونية:

$$2 = p^2/q^2$$

فمتى كتبنا هذا طبقنا الخوارزميات الكتابية مع الروابط المنطقية

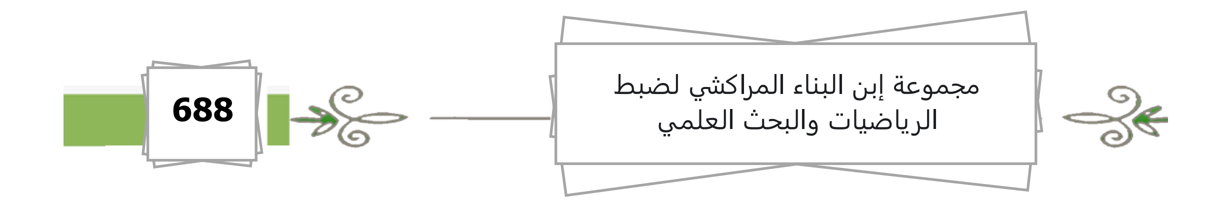
$$2 = p^2/q^2 \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

ثم لابد من قراءة الكتابات و استحضار خصائص الكائنات الرياضية فالكتابة هنا وبكون 2 عدد أولي تعني قابلية قسمة p على 2 ذلك أن 2 غير قابل للتفكيك فإذا كان الأمر كذلك كان p^2 قابل للقسمة على 4 وبمواصلة الخوارزميات الكتابية أي

$$2q^2 = 4p'^2 \Rightarrow q^2 = 2p'^2$$

سنصل لكون 2 يقسم q وهذا تناقض مع كون q و p أوليان فيما بينهما.

فإذا تأملنا طريقة التفكير والتحرير هنا فهي خليط بين ضبط التعاريف وكتابتها وفهم الخصائص الكائنات وتطبيق للخوارزميات الكتابية.



فإذا أردنا تقسيم هذه المكونات على التفكير والتحرير ربطنا الحدس بخصائص الكائنات والكتابة بضبط التعاريف واستحضارها والخوارزميات التحويلية الكتابية بالروابط المنطقية.

خلاصة:

إن على التلميذ لضبط براهينه :

تكوين فكري:

دراسة الأساسيات وضبط التعاريف بكتابتها الرياضياتية

فهم خصائص الكائنات

تكوين عملي:

عند تحرير البرهان الانطلاق من تعاريف رياضية مضبوطة.

عدم إدخال الألفاظ اللغوية في البرهنة خاصة الحدسية منها.

استعمال الروابط المنطقية والخوارزميات الكتابية وعدم قفز هذه المراحل بإخفاء مرحلة داخل التفكير الحدسي وتحت غطاء "هذه مرحلة واضحة فلا أحتاج كتابتها."

ربط المطلوب بخصائص الكائنات.

تمرين عقل التلميذ على الضبط الرياضياتي يحتاج ممارسة وتجربة بالتكرار حتى يستطيع التلميذ تجريد براهينه من مفاهيمه الحدسية لتصبح كتابة مضبوطة يفهمها كل رياضياتي.





اللغة الرياضياتية : بين العرف والوضع و القياس.

تعتبر اللغة الرياضياتية لغة كغيرها من اللغات لها قواعدها وطريقة كتابتها وإن شئنا قلنا نحوها.

يرجع أصل اللغة الرياضياتية من الناحية الصناعية لعدة مصادر:

أولها و أهمها العرف أو ما نسميه بالعرف الرياضي وهو ما تعارف على معناه علماء الرياضيات في طريقة صياغة الرياضيات لغة و ترميزا.

كأن يستعمل رياضياتي لفظ من اللغة العادية لوصف شيء ثم يشتهر بين الرياضياتيين فينفصل عن معناه اللغوي ليصبح اصطلاحي، مثال ذلك مسمى الدالة، فمفهوم الدالة بمعناه المعاصر ظهر في القرن السابع عشر على يد ليبينز سنة 1694، حيث كانت ترمز إلى علاقة مرتبطة بمنحنى هندسي، ثم تطورت لتعني كل تطبيق عددي على مجموعات عددية ثم عممت في بداية القرن العشرين إلى أي تطبيق على مجموعات كيفية، ليصبح مصطلح الدالة و التطبيق يعنيان نفس الشيء طوال القرن العشرين و إلى يومنا هذا لكن شاع استعمال لفظ الدالة في الدوال التي مجموعة وصولها عددية، فمفهوم الدالة مفهوم عرفي.

ثانيها : اصطلاحي، كأن يأتي رياضياتي فيضع إصطلاحا جديدا ثم ينتشر بأخذ غيره من العلماء عنه، فمثلا مجموعة بورباكي ساهمت بمنشوراتها بنشر الكثير من الرموز الرياضياتية، كرمزي المكممين

الرياضيين : مهما يكن و الوجودي $\forall$ ، $\exists$ ، أما الأول فمخترعه هو الألماني جيرهارد جينتزين سنة 1933 ، أما الثاني فمخترعه جيوسيبي بيانو.

و زمز المجموعة الخالية $\varnothing$.

و رمزي الإستلزام و التكافؤ : $\Leftarrow$، $\Rightarrow$، $\Leftrightarrow$

وكذلك الترميز للعدد π فقد ظهر سنة 1647 على يد ويليام وغترد

وهو بداية كلمة محيط بالإغريقية (périmètre) "περιμετροξ" ، ثم انتشر عبر الرياضياتي أولر سنة 1748 في كتابه الشهير Introduction à l'Analyse infinitésimale

وكذلك رمز التكامل فهو من اختراع ليبنز و أصله أول الكلمة somme

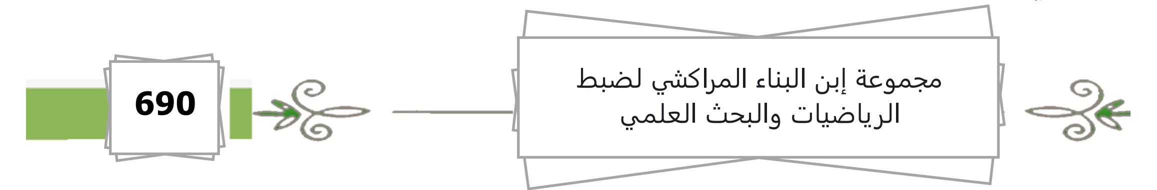
وكذلك رمز المالانهاية فواضعه هو الرياضياتي جون واليس سنة 1655

ثالثها : القياس و ذلك بقياس الرياضياتيين على الموجود لصناعة ترميزات جديدة إلا أن هذا قليل جدا.

من الناحية التاريخية:

اللغة الرياضياتية مرت بمرحلتين ، مرحلة مبكرة بظهور الترقيم أو الترميز العددي على يد الهنود ثم طوره المسلمون، و المرحلة الثانية هي مرحلة الصياغة بالترميز و التي جاء بها المسلمون، فقد قام الخوارزمي بإدخال مفهوم الشيء في المعادلات و الذي نستعمله لحد الساعة فرمز المجهول المعروف x ما هو إلا ترجمة من العربية للحرف ش و الذي يعني شيء.

وواصل السموأل المغربي المتوفى سنة 575 هجري الموافق ل 1180 ميلادي فدرس كثيرات الحدود ذات

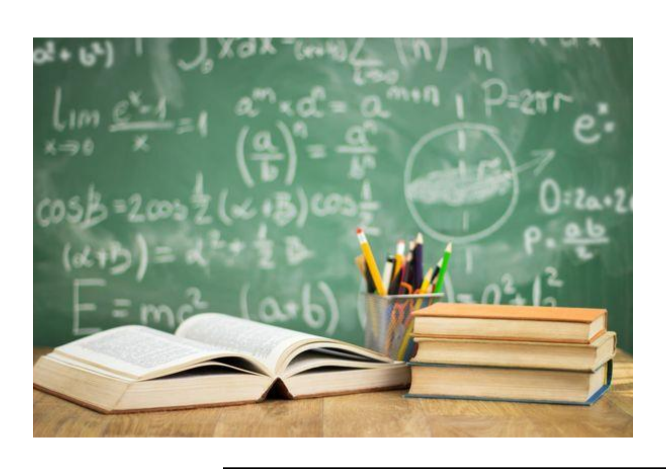


درجة كيفية بل أضاف كذلك مقاليب وحيدات الحد و اخترع جداول للتعبير عن كثيرات الحدود و مقاليبها و هو ما يشبه ما نفعله اليوم من كتابة كثيرات الحدود على شكل مجاميع وحيدات الحد.

وقد قام أبو الحسن علي بن محمد بن علي القرشي الشهير بالقلصادي المتوفي سنة 891 هجري الموافق ل 1487 بتعميم الترميزات في الرياضيات فهو أول من رسم الكسور واستخدم رموزا في الجبر في كتابه كشف الأسرار عن علم الغبار، فاستعمل لعلامة الجذر الحرف الأول من كلمة جذر (ج) و هي أصل رمز الجذر التربيعي الذي نستعمله لحد اليوم واستعمل للمجهول الحرف الأول من كلمة شيء (ش) و هو أصل رمز المجهول الذي نستعمله اليوم كذلك، ولمربع المجهول الحرف الأول من كلمة مال (م)، ولمكعب المجهول الحرف الأول من كلمة مكعب (ك)، ولعلامة المساواة الحرف (ل)، وللنسبة ثلاث نقاط.

عندما ورث الغرب علم الملسمين واصلوا حملة الترميزات بإدخال تعاريف و تراميز جديدة حتى أصبحت الرياضيات على الشكل الذي نراه اليوم.

فالرياضيات لغة حية كغيرها من اللغات لها قواعدها وضوابطها و ما زالت تتطور كل يوم بادخال أنواع جديدة من الترميزات.



العرف العلمي في الرياضيات

الاصطلاحات الرياضياتية داخلة في ما يسمى بالعرف العلمي وهو ما تعارف على دلالته أهل علم معين.

العرف العلمي له مصدران:

المصدر الأول هو التعريف المباشر للالفاظ والترميزات فيضعه أحد الرياضياتيين ثم ينتشر استعماله بين أوساطهم مثل الترميز للعدد e و π و $\forall$ و $\exists$ ....

المصدر الثاني بالتوافق في الاستعمال ويدخل في هذا الألفاظ التي استعملها الرياضياتيون بشكل موسع حتى تعارفوا عليها ثم إما يضعوا لها تعريفا وفق ما تعارفوا عليه استعمالا مثل الحلقة والحقل أو تُستقرؤ استعمالاتهم المنتشرة لها لمعرفة المعنى المقصود منها مثل المجموعات العددية مثلا و تسمية بنية بفضاء .... وهذا يقوم به المطلع على فروع الرياضيات.

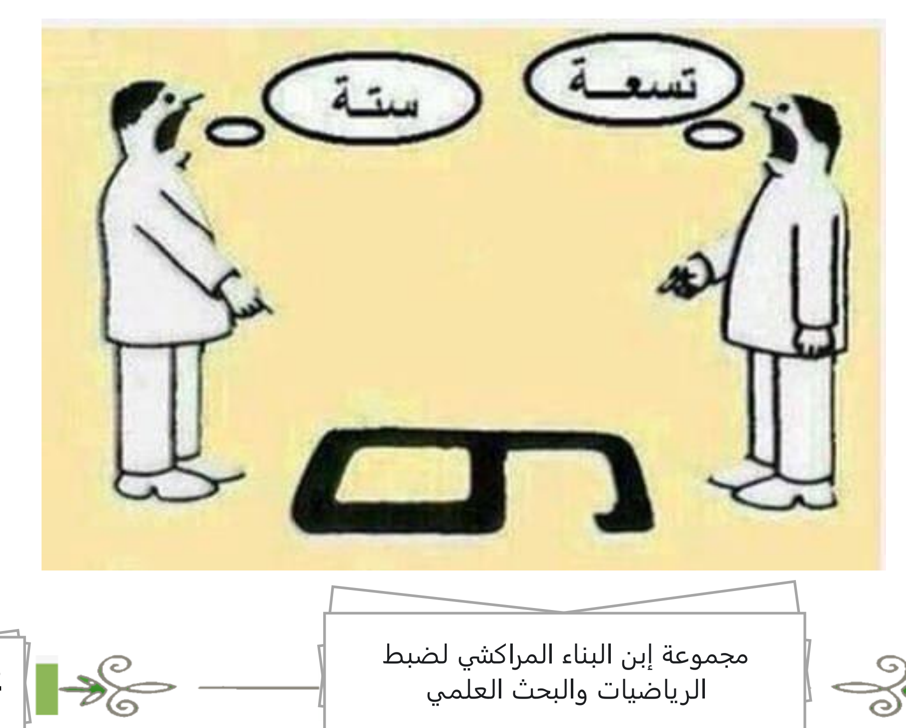
الجامع للنوعين هو شرط الانتشار والتوافق في الاستعمال.

لا يشترط أن تجد تعريفا مكتوبا للفظ رياضي فهناك الكثير من المصطلحات الرياضية اتفق الرياضياتيون على كيفية إستعمالها لكنك لا تجد مصادر تثبت لها تعريفا بعينه مثال ذلك استعمال لفظ "ومنه" بمعنى الاستلزام فهذا متعارف عليه رياضياتيا رغم أنه لا يوجد تعريف مسبق لهذا اللفظ.

في الرياضيات لا يوجد مرجع موحد للمصطلحات لكن العمدة في الاصطلاح هو ما توافق الرياضياتيون على استعماله لذلك سنجد تعريف الطبولوجيا والنهاية والاستمرار موجود في الكثير من المراجع لكن لو طلبنا أصل التعريف فسنجد هذه التعاريف تطورت على فترات زمنية حتى ظهر التعريف المتوافق عليه اليوم لكن لا يمكن تحديد كتاب بعينه كمصدر للتعريف إنما اتفاق المصادر واستعمال الرياضياتيين له هو الذي يعطي التعريف صحته.

لكن هناك مصادر اتفق الرياضياتيون على استعمالها كمنشورات مجموعة بورباكي مثلا.

كل هذا ليس خاص بالرياضيات فقط بل هو موجود في جميع العلوم.





النص العلمي بين القواعد العلمية والقواعد اللغوية.

نرى الكثير من الأساتذة ممن ينادون بوجود تناقض في النصوص العلمية بين من يرى أن كتابة عدد أكبر من عدد بلفظ أكبر لغوي تتناقض مع الكتابة الترميزية إذ في الأولى العدد الكبير يكتب يمينا أما الثانية يسارا وبين من يريدون تطبيق القواعد العلمية على النصوص اللغوية أو اللغوية على العلمية كجعل رمز النهاية لا يساوي النهاية إنما يؤول...

يجب أن نعلم أن النصوص العلمية بحكم الصياغة تخضع لقواعد علمين:

الأول : مجال تخصص النص العلمي.

الثاني : قواعد اللغة.

فلا تخلو الجمل في النص من ثلاث حالات:

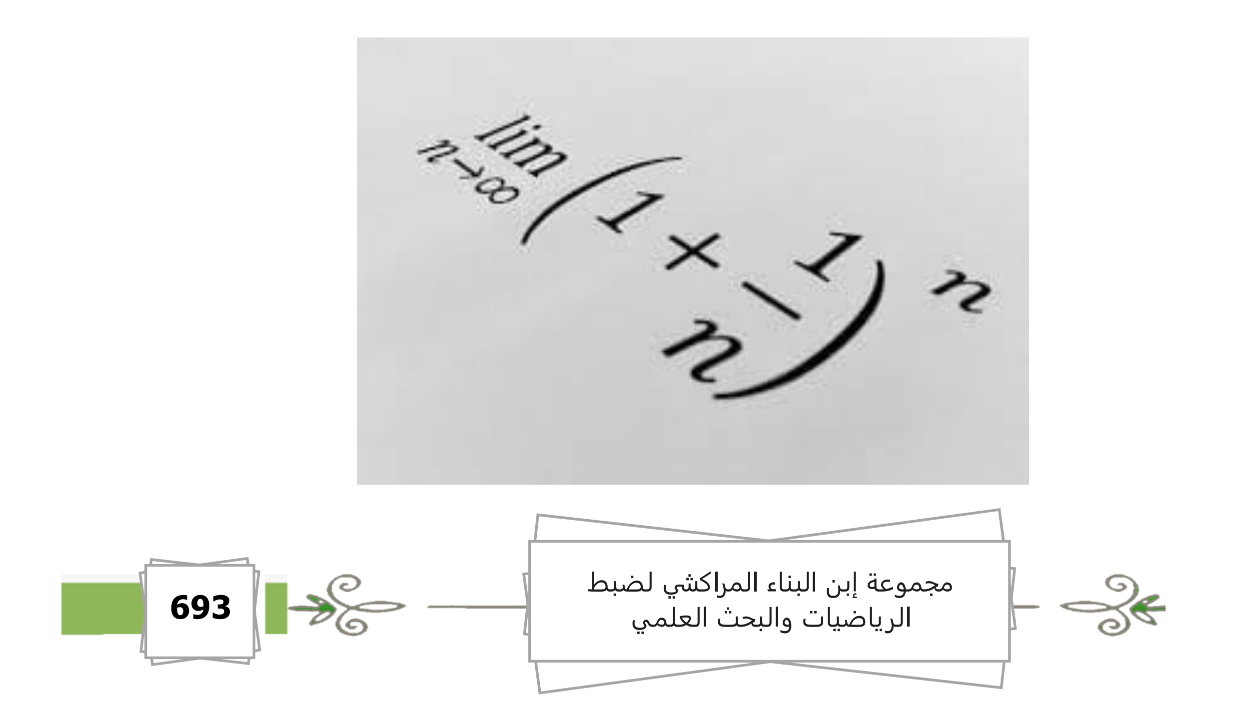
الحالة الاولى : الجملة لغوية فهي تخضع هنا لقواعد اللغة وأساليبها وبما أننا نكتب بالعربية فتكون الكتابة من اليمين إلى اليسار.

الحالة الثانية جملة بالترميز العلمي فهذه تخضع لقواعد علم النص وبما أنه هنا العلم هو الرياضيات فتكون الكتابة من اليسار إلى اليمين لأنه المتعارف عليه دوليا عند أهل الإختصاص ويكتب الرقم الأكبر على يسار ترميز علامة أكبر.

الحالة الثالثة : جملة خليط من اللغة ومن الترميز العلمي فينظر إلى اسلوب الجملة وتركيبها فإن كان لغويا فستخضع لقواعد اللغة ولذلك هنا يكتب الرقم الكبير يمينا والصغير يسارا.

اما إن كان الاسلوب والتركيب علميا فتخضع لقواعد علم النص.

إذن لا يوجد تناقض في المسألة كل ما هناك، وجود نقص في تكوين الأساتذة مما ترك المجال لخلط بين قواعد العلوم ممن يطبق قواعد علم الإختصاص على اللغة وممن يطبق قواعد اللغة على العلوم والحق التفصيل حسب إنتماء الجمل والله الموفق.



هل الحكم للمعنى اللغوي أو الرياضياتي في الرياضيات ؟

الألفاظ الرياضياتية أصلها لغوي لكن معناه بالدرجة الأولى يخضع للمعنى الإصطلاحي الذي أعطاها لها الرياضياتيون لذلك إذا حضر اللفظ خضع معناه لما يلي:

العرف الرياضياتي مقدم على اللغوي فإذا انتشر مصطلح وأصبح مفهوما فمعناه هو معناه الإصطلاحي كالحلقة مثلا فالأصل أنها سميت حلقة لأنها دورية ثم لما درست الحلقات غير المنتهية بقي يطلق عليها إسم الحلقة.

والعرف قد يكون إصطلاحيا كأن يسمي رياضياتي شيئا بإسم فينتشر وقد يكون عملي فمن كثرة ما يستعمل الرياضياتيون اللفظ بمعنى فيعرف به.

العرف يخصص المعنى اللغوي فقد يضيف على معناه لكن عادة يقيده لذلك عادة العرف أخص من اللغة.

القاعدة الثانية : عند ترجمة المصطلحات من اللاتينية إلى العربية فنترجم المعنى لا اللفظ فيمكن إختيار الأنسب لغة من المعنى المطلوب وإن كان يخالف لفظا الإسم اللاتيني والمقصود بالمعنى الوظيفة الرياضياتية للكائن.

القاعدة الثالثة : إذا كان عندنا أكثر من مصطلح لكائن رياضياتي واحد فيمكن ترجيح ما هو أنسب وهنا تستعين بالمعنى اللغوي كعنصر للتفضيل.

مثال ذلك تفضيل مصطلح متقايس الضلعين على متساوي الساقين فالأول ظاهر المعنى في تساوي الأطوال والثاني يحتاج إضمار لفظ الطول فيكون تقديره متساوي طول الساقين والإضمار يشكل على المبتدئ لأنه لا يعرفه.

القاعدة الرابعة : يسمح للمختصين ما لا يسمح لغيرهم فبحكم إختصاصهم قد يتساهلون في بعض المسميات لأنهم يدركون معانيها المضبوطة.

أما التلميذ فتراعى معه المنهجية فقد يضاف للرياضيات التدريسية من التقييدات مما يجعلها مناسبة للتلميذ.

والله أعلم.



المصطلح الرياضي بين العربية واللغات الغربية:

رأيت منشورا غريبا عجيبا مليئا بالخلط، ينتقد بعض المصطلحات العربية بدون الرجوع إلى المفاهيم الرياضية و عمدته في ذاك جعل المصطلحات الغربية وحيا ومبدأ لنقد العربية وهذا غريب جدا بل دليل على الخلط الحاصل في ميدان الرياضيات.

لذلك أحببت كتابة كلمات في هذا الميدان لأنه ليس الخلط الأول الذي ألاحظه في هذه المسائل.

ضبط الرياضيات ينطلق من مفاهيمها فالمصطلحات وخاصة المترجمة منها تضبط بمراعات مسائل عدة منها:

ترجمة المفهوم لا اللغة فلابد عند الترجمة ترجمة المفهوم لا اللغة كترجمة infini بالمالانهاية واللا نهاية فالأولى ترجمة مفهوم والثانية ترجمة لغة.

تنقيح المفهوم فقد يشمل المصطلح على جملة مفاهيم تجعله غير مناسب في نفسه فلا يشترط ترجمته كما هو إنما يختار المفهوم الأصلح كالاعداد الناطقة فمصطلحاتها كثيرة فالغرض ترجمة المصطلح لاستعماله لا لمناسبته الأصل المترجم عنه.

مراعات العرف والتطورات التاريخية فهناك مصطلحات أصلها تاريخي لكنها لم تعد مناسبة لمفهومها لأنها توسعت أو تغيرت كمصطلح الحلقة مثلا فأصله تاريخي لكن مفهومه العرفي توسع.

العرف : فالعرف يبقى قويا في مسألة المصطلحات إذ العرف مقدم على المعنى اللغوي فما لم يعارضه فلا مشكلة تطرح فيه إذ لا يشترط موافقة العرف لذات المعنى اللغوي إنما يكفي اشتراكهما في المعنى الأصلي كتسمية الحقل حقلا لخصوبته.

وهذه نقطة كثر فيها الخلط فهناك الكثير ممن ينتقد المصطلح من باب الفهم الحرفي للغة دون أخد الاعتبار للعرف لكن العرف مقدم على اللغة، كقولهم مصطلح مثلث متساوي الساقين غير صحيح لأن الضلعين متقايسان لا متساويان وهذا خطأ إذ العرف يقيد ويحذف ويضيف على المعنى الظاهر إذ المقصود تساوي الطولين وهذا يضمنه العرف فيكون معنى مثلث متساوي الساقين أي متساوي طول الساقين.

البعد التاريخي : هناك مصطلحات عربية لها بعد تاريخي في الحضارة العربية وهي أولى بالإستعمال من نظيراتها اللاتينية.

بالنسبة للمصطلحات اللاتينية فكثير منها مستحدث نشر عن طريق مجموعة بورباكي الفرنسية لكن تبقى الترجمة تحتاج لمعرفة باللغة العربية فالعربية ليست قاصرة على الترجمة إنما قد يكون المشكل في المترجم والأعمال الفردية يعتريها الكثير من النقصان.

لذلك لابد أن نعمل على توحيد المصطلحات العربية عبر جميع الوطن العربي ومحاولة وضع أسس لبناء مؤسسة موحدة للقيام بهذه المهمة والله أعلم.



من الأخطاء الشائعة : حمل المصطلحات العلمية على معاني ألفاظها اللغوية.

دراسة العلوم عند البشر وتقييدها والتواصل بها تتم عبر اللغة.

لذلك يقوم أصحاب كل علم بوضع مصطلحات يعبرون بها على مفاهيم علمهم باستعمال الألفاظ اللغوية.

إلا أن المعنى اللغوي للكلمات يقيد ويهذب ليصبح له معنى عرفي في كل علم وقد يتغير هذا المعنى ليخالف المعنى الأصلي.

مثال ذلك الاشتقاق في الرياضيات فالأصل لغة اشتق من الشيء أي استخرج منه بجهد أو مشقة.

إلا أنه في الرياضيات لا يطلق على كل ما نستخرجه من الدالة بل له تعريفه الخاص بالنهايات.

وكمثال آخر الحلقة ففي الأصل كانت الحلقات تدرس في مجموعات منتهية فسميت حلقة لأن العناصر فيها دورية بالنسبة للضرب، إلا أنه مع الزمن اكتشفت حلقات غير منتهية فعمم الاسم عليها فخالف المعنى الاصطلاحي المعنى اللغوي.

ومن ذلك الشعاع فالأصل فيه شعاع الشمس ثم أصبح له تعريفه الخاص في الرياضيات.

ومن ذلك الطبولوجيا والمنوعات التفاضلية والجبر ... والقائمة طويلة.

والمسألة لا تختص بالرياضيات فقط بل هي في جميع العلوم فالفايروس الذي يصيب الحاسوب ليس هو الفايروس الذي يصيب الإنسان.

لذلك الرجوع في معاني كل مصطلح يكون لتعريف أهل العلم له لا للمعنى اللغوي.

من الأخطاء الناجمة عن ذلك حمل بعضهم معنى الاستمرار على معناه اللغوي فمتى قيل لهم الدالة المعرفة على مجموعة الأعداد الناطقة Q بالصيغة $f(x) = x^2$ مستمرة في Q قالوا كيف يكون ذلك وفي Q ثغرات ؟ ذلك أنهم حملوا لفظ الاستمرار الاصطلاحي على المعنى اللغوي فوقع الخلط .

أما الرياضيات فلا تنظر لخارج مجموعة التعريف في هذه المسألة فالدالة المذكورة مستمرة على Q .

وكمثال آخر قول بعضهم أن دالة الجذر التربيعي المعرفة على R^+ غير مستمرة عند الصفر لأنها تتوقف عنده فحملوا هنا الاستمرار على المعنى اللغوي لا الاصطلاحي، أما أهل الرياضيات فلا ينظرون لخارج مجموعة التعريف لذلك هم لديهم التعريف الاصطلاحي للاستمرار وهنا يطبق بحساب النهاية في مجموعة التعريف أي على يمين الصفر.

فدالة الجذر التربيعي مستمرة على مجموعة تعريفها ومنها الصفر.

ضبط التعاريف الاصطلاحية مهم جدا ومن لم ينتبه لذلك سيواجه صعوبات في فهم الرياضيات وتصورها ذلك أنه يفهم كلام أهل الرياضيات على غير معناه.



بين المعنى اللغوي والعرفي والإصطلاحي : الإبسيلون نموذجا.

هناك فرق بين المعنى العرفي والمعنى الإصطلاحي والمعنى اللغوي.

مثال ذلك نقول الصلاة رغم أنها لغة هي الدعاء لكن الاصطلاح الشرعي والعرفي يحملان اللفظ على الصلاة المعروفة بسجودها وركوعها.

كل لفظ في علم له تعريفه الإصطلاحي الذي قد يتغير مع التعريف اللغوي والعرفي فمثلا الحلقة لغة لها معنى أما في الرياضيات فلها معنى آخر وفي لغة العامية لها معنى مختلف.

الإبسيلون لغة هو حرف إغريقي.

أما في إصطلاح الرياضيات فيستعمل في النهاية للإشارة لرمز لعدد موجب تماما.

أما في عرف الناس فأصبحوا يضربون به المثل في الصغر.

فالذي يجب أن نفهمه ان العرف يحرف الالفاظ من معناها لمعاني مختلفة عنها كاستعمالها وما يقاربها وما شابه.

مثال ذلك عرفا نقول للسيارة عندنا طاكسي رغم أن اصل اللفظ سيارة أجرة فأطلق على جميع السيارات.

وفي المغرب بقولون للياؤورت دانون رغم أن دانون هي شركة تنتجه.

ونقول البرتقال رغم أن إسمه النارنج لكل لما كانت البواخر تأتي به من البرتغال أطلق عليه البرتقال.

فالمعنى العرفي لا يعوض المعنى الإصطلاحي وهنا يأتي دور المتخصص فهو يضبط المعنى الإصطلاحي وبه يعمل بعكس العوام.

لذلك الذي نطلبه من المشتغلين بالرياضيات الخروج من رتبة العوام إلى رتبة المختصين بضبط هذه المصطلحات رياضيا لا كما يقوم به الكثيرون اليوم بخلط الحدس مع الشائعات بالرياضيات.

فالمسألة مسألة ضبط لا أكثر.



الفرق بين الكتابة الرياضية والكتابة اللغوية

المجلات العلمية يتساهلون في الكتابات إذا كانت خارج البرهان مادام وضح الكاتب معناها وهذا لا يعتبر من الكتابة الرياضية إنما هو داخل تحت التأليف اللغوي الذي تحكمه قواعد اللغة فتجيز فيه المبالغة والتشبيه.

فالمقال مكون من مقدمات لغوية وشروحات وبراهين فمثلا يمكننا القول لغويا إذا قسمنا الإبسيلون نصفين فسنحصل على الإبسيلون لأن هنا المقصود اللغوي وهو مفهوم الإبسيلون لكن لا يمكن أن نكتب داخل برهان رياضي $epsilon = epsilon/2$ فهذا خطأ.

الجمل اللغوية تحكم فيها اللغة والجمل الرياضية تحكم فيها الرياضيات، من قبيل ذلك قولنا:

الدالة x^2 رغم انها الصيغة لا الدالة فهذا موجود بكثرة في المجلات المختصة بل موجود حتى في مقال الدالة زيتا لريمان لكن هذا داخل في اللغة في التعبير على الكل بالجزء ولا يدخل ضمن الكتابة الرياضية التي يطبق عليها قواعد الرياضيات.

فمثلا لو كتب أحدهم

$$(-1)^{1/2} \times (-1)^{1/2} = (-1 \times -1)^{1/2} = 1$$

فلا يقبل منه لانها كتابة رياضية لابد أن تخضع للقواعد الرياضية.



الفرق بين الكتابة الرياضية في القرون السابقة والرياضيات المعاصرة

الكتابة الرياضية إلى غاية القرن 18 مشابهة لطريقة الثانوي أو أقل من حيث الضبط ثم تحسنت بمرور الزمن إلى أزمة الأساسيات والتي أنتجت الكتابة المعاصرة.

هناك ثلاث فروق جوهرية بين الكتابة قبل نهاية القرن التاسع عشر والكتابة المعاصرة:

أولها : الإنطلاق من المسلمات وخاصة نظرية المجموعات فقبل القرن التاسع عشر هناك إستعمال كثير للمفاهيم العرفية والحدسية التي أدت إلى أخطاء عديدة آخرها متناقضة راسل والتي دفعت العلماء وعلى رأسهم هلبرت إلى إطلاق برنامج جديد لإعادة كتابة الرياضيات على أسس سليمة.

الثاني : إستعمال المنطق والروابط المنطقية

الثالث : اشتهار الكثير من الترميزات الرياضية على يد مجموعة بورباكي كالمكممات المنطقية ورمز المجموعة الخالية ورمز الإستلزام.

الملاحظ أن الكثير من الطلبة يمر إلى الجامعة دون تصحيح طريقة كتابته من طريقة الثانوي إلى الطريقة الرياضية المتعارف عليها في المجتمع الرياضي.

ويساهم في ذلك الأساتذة بعدم تدريسهم لنظرية المجموعات وإعادة بناء الهيكل الرياضي في ذهن الطالب.

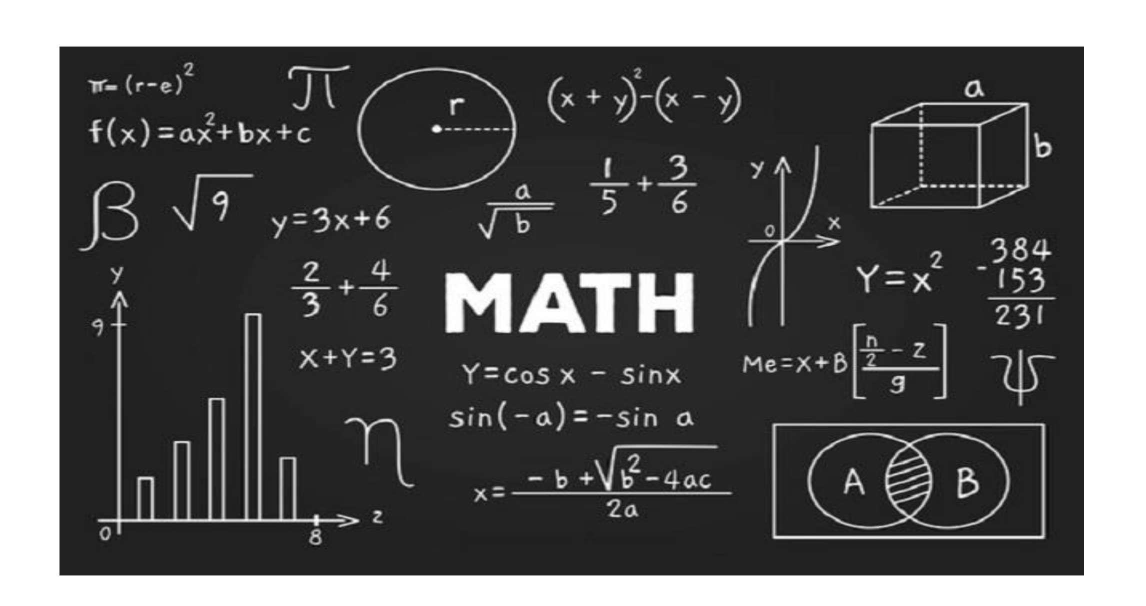
ضبط الكتابة الرياضية ومفاهيمها مقيد بأساسيات لابد من دراستها:

نظرية المجموعات

المنطق والترميز المنطقي

بناء المجموعات العددية

فهذه الأساسيات لابد منها للطالب الجامعي دونها يعد مستواه من مستوى ثانوي.





لنضبط الرياضيات معا : بين القواعد اللغوية والاصطلاحات الرياضية

موضوع كتاب الدالة f أو الدالة f(x) موضوع قديم قد ناقشناه في المجموعة، لكن أحد الإخوة دعاني لمتابعة نقاش حوله في أحد المجموعات فأحببت أن أعيد بيان ما فيه في هذا المنشور.

قبل البدء في الموضوع أدعو القارئ للنظر في صورة لمقال الدالة زيتا لريمان وهو مقال أشهر من العلم والذي يكتب فيها ريمان صراحة:

الدالة Zeta(s) والدالة Zeta(t) والدالة f(x)

وإنما أتيت بهذا المقال لأبين **امرين:**

أن استعمال هذا التعبير شائع في المقالات الرياضية

وأنه لا يمكن التشنيع به على الأستاذ ولا اعتباره خطأ شنيعا.

إنما المشكلة جاءت من عدم المختصين وذلك لخلطهم بين:

التعبيرات اللغوية والاصطلاحات الرياضية

والكتابة الرياضية والمناهج التدريسية.

بالنسبة للنقطة الأولى : فالاصطلاحات الرياضية وخاصة الكتابية منها اصطلاحات عرفية فعندما يتعارف الرياضياتيون على كتابة تكامل لوبيغ بالشكل ∫ f(x) dμ

فليس لأحد ان يقول هنا dμ لا معنى لها أو كيف نضرب فيها.

فالاصطلاح يفهم بما وضع له لا بكيفية كتابته الحرفية.

وعندما نكتب الدالة e^x فهي الدالة الأسية وليس لأحد أن يقول الكتابة خاطئة لأنها صورة x .

وعندما نكتب R فهو الحقل الحقيقي وليس لأحد أن يقول هذه مجموعة وليست الحقل فيجب كتابة (R, +,*)

فكل هذه الكتابات عرفية تعارف عليها أهل الرياضيات ونستعملها كل يوم بلا إشكال.

القسم الثاني من هذه النقطة : أنه يجب التفريق بين الجمل اللغوية والكتابة الرياضية:

فالجمل اللغوية تخضع لقواعد اللغة لا للرياضيات.

فعندما نكتب : الدالة f(x) فهذه جملة لغوية وليست رياضية أي لغوية من حيث التركيب لذلك هي تخضع لكل القواعد اللغوية والخطابية المعتادة على لسان البشر.

ومن القواعد اللغوية التعبير عن الشيء بأهم أجزائه كقوله تعالى : وحيثما كنتم فولوا وجوهكم شطره (البقرة : 144)

وسمي الجسم هنا بالوجه فالجسم من يتوجه للقبلة لا الوجه فقط.

فلا غرابة من استعمال الجملة : الدالة f(x) ذلك أن f(x) أهم أجزاء الدالة f ولذلك نجد الكثير من المقالات المختصة تستعمل هذا التعبير بلا حرج.



النقطة الثانية : يجب التفريق بين الكتابة الرياضية والمناهج التدريسية.

فالمناهج التدريسية تدخل تشويهات في العلوم لتقريبها لذهن التلميذ ذلك أن التلميذ في مراحله المبكرة لا يمكنه استيعاب الرياضيات كطالب جامعي ومن أمثلة ذلك تعريف الجوار بمجال $]a,b[$

رغم أننا نعلم أن الجوار هو أي مجموعة تحوي مفتوحا يشمل النقطة لكن التلميذ لا يمكنه استيعاب ذلك.

ومن الأمثلة كذلك قرن استمرار دالة بعدم انقطاع منحناها رغم أننا نعلم أن الدوال المستمرة ليست كلها قابلة للرسم إنما ترسم فقط الدوال من نوع C^1 إلا في نقاط منعزلة.

لكن التلميذ لا يمكنه استيعاب ذلك وكل الدوال التي يعرفها هي من نوع القابل للاشتقاق لمالانهاية إلا في نقاط منعزلة فلتقريب المعنى تشوه الرياضيات في مرحلة دراسته ثم تصلح لاحقا.

من الناحية المنهجية للتلميذ التفريق بـ f وصورة x بـ f لابد منه في هذه المرحلة لذلك المناهج قد تفرض على الأستاذ في المراحل الأولى للتلميذ عدم استعمال أسلوب : الدالة $f(x)$ لا لأنها خطأ رياضي لكن لكي يميز التلميذ بين f و صورة x بـ f فالتلميذ لا يفهم جميع التعابير وقد يقع عنده خلط.

كخلاصة أقول أن الاصطلاحات الرياضية مليئة بتسميات وكتابات قد لا تصح لغة كتسمية الحلقة بحلقة رغم أنه ليس كل الحلقات دورية وتسمية الفضاء الشعاعي بشعاعي رغم أن لفظ شعاع أصله ضَوْءُ الشمس.

لكن التعاريف الاصطلاحية تطغى على اللغوية فتصبح مقدمة عليها لذلك نقول العرف العلمي مقدم على العرف اللغوي فكل لفظ في علم معين إنما يفهم بعرف أهله.

رغم وجود هذه الاصطلاحات فيبقى استعمال أحدها داخل جملة لغوية خاضعا للغة فاللغة لا تحرف من أجل مصطلح دخيل سواء كان أجنبي او رياضياتي إنما المصطلح من يغير ليوافق اللغة سواء بالإعراب أو بالكتابة كأن نقول التطبيق الهولومورفي وأصل الكلمة اجنبي لكنها عربت وأعربت لتوافق اللغة.

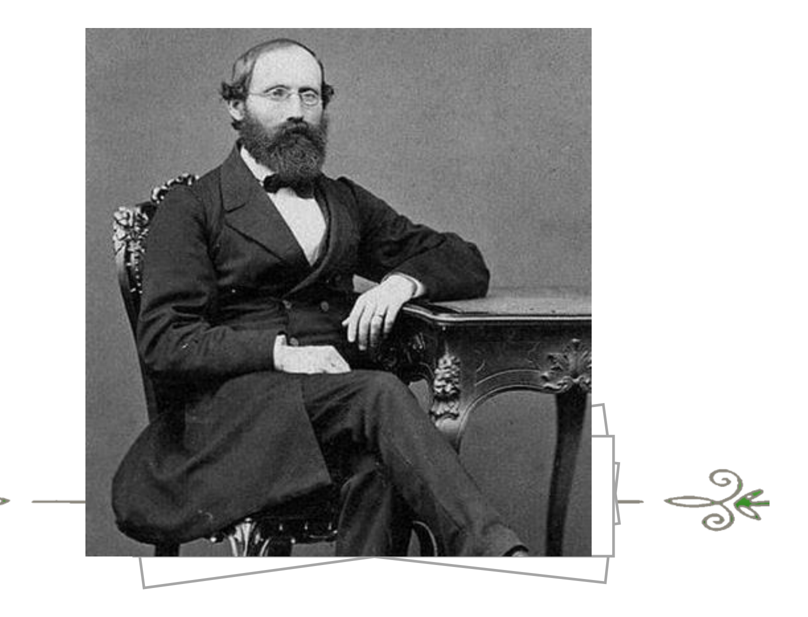
إذن استعمال لفظ الدالة $f(x)$ صحيح لا إشكال فيه وهذا صنيع الرياضياتيين في مقالاتهم.

من الناحية التدريسية قد يقال من الأفضل عدم استعماله لتعويد التلميذ على ضبط المفاهيم.

والله أعلم.

مصادر : مقال ريمان

http://www.claymath.org/publicat.../riemanns-1859-manuscript



Betrachtet man nun das Integral

$$\int \frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^x-1}$$

von $+\infty$ bis $+\infty$ positiv um ein Grössengebiet erstreckt, welches den Werth 0, aber keinen andern Unstetigkeitswerth der Function unter dem Integralzeichen im Innern enthält, so ergiebt sich dieses leicht gleich

$$(e^{-\pi si}-e^{\pi si})\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1},$$

vorausgesetzt, dass in der vieldeutigen Function $(-x)^{s-1}=e^{(s-1)\log(-x)}$ der Logarithmus von $-x$ so bestimmt worden ist, dass er für ein negatives x reell wird. Man hat daher

$$2\sin\pi s\,\Pi(s-1)\zeta(s) = i\int_\infty^\infty \frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^x-1},$$

das Integral in der eben angegebenen Bedeutung verstanden.

Diese Gleichung giebt nun den Werth der Function $\zeta(s)$ für jedes beliebige complexe s und zeigt, dass sie einwerthig und [illegible]chen Werthe von s, ausser 1, endlich ist, so wie auch, dass sie verschwindet, wenn s gleich einer negativen geraden Zahl ist.

Wenn der reelle Theil von s negativ ist, kann das Integral, statt positiv um das angegebene Grössengebiet auch negativ um das Grössengebiet, welches sämmtliche übrigen complexen Grössen enthält, erstreckt werden, da das Integral durch Werthe mit unendlich grossem Modul dann unendlich klein ist. Im Innern dieses Grössengebiets aber wird die Function unter dem Integralzeichen nur unstetig, wenn x gleich einem ganzen Vielfachen von $\pm 2\pi i$ wird und das Integral ist daher gleich der Summe der Integrale negativ um diese Werthe genommen. Das Integral um den Werth $n\,2\pi i$ aber ist $=(-n\,2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$, man erhält daher

$$2\sin\pi s\,\Pi(s-1)\zeta(s)=(2\pi)^s\sum n^{s-1}((-i)^{s-1}+i^{s-1}),$$

also eine Relation zwischen $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$, welche sich mit Benutzung bekannter Eigenschaften der Function Π auch so ausdrücken lässt:

$$\Pi\left(\frac s2-1\right)\pi^{-\frac s2}\zeta(s)$$

bleibt ungeändert, wenn s in $1-s$ verwandelt wird.

2

Diese Eigenschaft der Function veranlasste mich statt $\Pi(s-1)$ das Integral $\Pi\left(\frac s2 -1\right)$ in dem allgemeinen Gliede der Reihe $\sum\frac{1}{n^s}$ einzuführen, wodurch man einen sehr bequemen Ausdruck der Function $\zeta(s)$ erhält. In der That hat man

$$\frac{1}{n^s}\Pi\left(\frac s2-1\right)\pi^{-\frac s2}=\int_0^\infty e^{-nn\pi x}x^{\frac s2-1}\,dx,$$

also, wenn man

$$\sum_1^\infty e^{-nn\pi x}=\psi(x)$$

setzt,

$$\Pi\left(\frac s2-1\right)\pi^{-\frac s2}\zeta(s)=\int_0^\infty\psi(x)x^{\frac s2-1}\,dx,$$

oder da

$$2\psi(x)+1=x^{-\frac12}\left(2\psi\left(\frac1x\right)+1\right),\quad \text{(Jacobi, Fund. S. 184)}$$

$$\begin{aligned}\Pi\left(\frac s2-1\right)\pi^{-\frac s2}\zeta(s) &= \int_1^\infty \psi(x)x^{\frac s2-1}\,dx+\int_1^\infty\psi\left(\frac1x\right)x^{\frac{s-3}{2}}\,dx \\ &\quad +\frac12\int_0^1\left(x^{\frac{s-3}{2}}-x^{\frac s2-1}\right)dx \\ &= \frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty\psi(x)\left(x^{\frac s2-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx.\end{aligned}$$

Ich setze nun $s=\frac12+ti$ und

$$\Pi\left(\frac s2\right)(s-1)\pi^{-\frac s2}\zeta(s)=\xi(t),$$

so dass

$$\xi(t)=\tfrac12-(tt+\tfrac14)\int_1^\infty\psi(x)x^{-\frac34}\cos(\tfrac12 t\log x)\,dx$$

oder auch

$$\xi(t)=4\int_1^\infty\frac{d(x^{\frac32}\psi'(x))}{dx}x^{-\frac14}\cos(\tfrac12 t\log x)\,dx.$$

Diese Function ist für alle endlichen Werthe von t endlich, und lässt sich nach Potenzen von tt in eine sehr schnell convergirende Reihe entwickeln.

3

Da für einen Werth von s, dessen reeller Bestandtheil grösser als 1 ist, $\log\zeta(s)=-\sum\log(1-p^{-s})$ endlich bleibt, und von den Logarithmen der übrigen Factoren von $\xi(t)$ dasselbe gilt, so kann die Function $\xi(t)$ nur verschwinden, wenn der imaginäre Theil von t zwischen [illegible]egt. Die Anzahl der Wurzeln von $\xi(t)=0$, deren reeller Theil zwischen 0 und T liegt, ist etwa

$$=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi};$$

denn das Integral $\int d\log\xi(t)$ positiv um den Inbegriff der Werthe von t erstreckt, deren imaginärer Theil zwischen $\frac12 i$ und $-\frac12 i$ und deren reeller Theil zwischen 0 und T liegt, ist (bis auf einen Bruchtheil von der Ordnung der Grösse $\frac1T$) gleich $\left(T\log\frac{T}{2\pi}-T\right)i$; dieses Integral aber ist gleich der Anzahl der in diesem Gebiet liegenden Wurzeln von $\xi(t)=0$, multiplicirt mit $2\pi i$. Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind. Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.

Bezeichnet man durch α jede Wurzel der Gleichung $\xi(\alpha)=0$, so kann man $\log\xi(t)$ durch

$$\sum\log\left(1-\frac{tt}{\alpha\alpha}\right)+\log\xi(0)$$

ausdrücken; denn da die Dichtigkeit der Wurzeln von der Gr[illegible] nur wie $\log\frac{t}{2\pi}$ wächst, so convergirt dieser Ausdruck und wird für ein unendliches t nur unendlich wie $t\log t$; er unterscheidet sich also von $\log\xi(t)$ um eine Function von tt, die für ein endliches t stetig und endlich bleibt und mit tt dividirt für ein unendliches t unendlich klein wird. Dieser Unterschied ist folglich eine Constante, deren Werth durch Einsetzung von $t=0$ bestimmt werden kann.

Mit diesen Hülfsmitteln lässt sich nun die Anzahl der Primzahlen, die kleiner als x sind, bestimmen.

Es sei $F(x)$, wenn x nicht gerade einer Primzahl gleich ist, gleich dieser Anzahl, wenn aber x eine Primzahl ist, um $\frac12$ grösser, so dass für ein x, bei welchem $F(x)$ sich sprungweise ändert,

$$F(x)=\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}.$$

Ersetzt man nun in

$$\log\zeta(s)=-\sum\log(1-p^{-s})=\sum p^{-s}+\tfrac12\sum p^{-2s}+\tfrac13\sum p^{-3s}+\cdots$$

4

Das Integral stellt für einen Werth von y, bei welchem eine sprungweise Aenderung der Function $h(y)$ stattfindet, den Mittelwerth aus den Werthen der Function h zu beiden Seiten des Sprunges dar. Bei der hier vorausgesetzten Bestimmungsweise der Function $f(x)$ besitzt diese dieselbe Eigenschaft, und man hat daher völlig all[illegible]

$$f(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\log\zeta(s)}{s}y^s\,ds.$$

Für $\log\zeta$ kann man nun den früher gefundenen Ausdruck

$$\frac s2\log\pi-\log(s-1)-\log\Pi\left(\frac s2\right)+\sum^\alpha\log\left(1+\frac{(s-\frac12)^2}{\alpha\alpha}\right)+\log\xi(0)$$

substituiren; die Integrale der einzelnen Glieder dieses Ausdrucks würden aber dann ins Unendliche ausgedehnt nicht convergiren, weshalb es zweckmässig ist, die Gleichung vorher durch partielle Integration in

$$f(x)=-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\frac{\log\zeta(s)}{s}}{ds}x^s\,ds$$

umzuformen.

Da

$$-\log\Pi\left(\frac s2\right)=\lim\left(\sum_{n=1}^{n=m}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)-\frac s2\log m\right),$$

für $m=\infty$, also

$$-\frac{d\frac1s\log\Pi\left(\frac s2\right)}{ds}=\sum_1^\infty\frac{d\frac1s\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)}{ds},$$

so erhalten dann sämmtliche Glieder des Ausdruckes für $f(x)$ mit Ausnahme von

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{ss}\log\xi(0)x^s\,ds=\log\xi(0)$$

die Form

$$\pm\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\left(\frac1s\log\left(1-\frac s\beta\right)\right)}{ds}x^s\,ds.$$

6

المشاغب والترجمة

المؤلفات الغربية ليست لغة فقط بل هي بلاغة لغة غربية وعلم و ثقافة .

لذلك عند الترجمة يحذر من الترجمة الحرفية الركيكة بثقافة مستوردة إنما يترجم المعنى العلمي ببلاغة عربية و ثقافية إسلامية.

فتعدل المادة لتوافق كل ذلك، مثال ذلك لا يترجم هذا النص هكذا:

هذا أمر توجبه الطبيعة إنما نترجم هذا أمر سنه الله في خلقه

ولا يترجم نص هكذا : يجب ثني الأصابع ، لأنه مثل شركي غربي وإنما يترجم يجب التوكل على الله.

ولا يترجم هكذا : الذي يضرب الروح في اول نظرة إنما نترجم : الملفت للإنتباه لاول وهلة....

فالترجمة إكتساب علوم بلغتنا لا إفساد لغتنا وتمييع ثقافتنا فتجنبوا التراجم الركيكة والتقليد الأعمى فإن اللغة تحمل الثقافة وتوجه التفكير وكثير هي التراجم الركيكة والمفاهيم العلمانية المتغلغلة في مدرستنا بسبب التراجم السيئة.



هل المصطلحات الرياضية توقيفية أو اجتهادية ؟ الكتابة النظيفة وغير النظيفة لعدد حقيقي .

يظن البعض أن المصطلح الرياضي وحي لا يجوز الخروج عنه وهذا جهل بآليات الرياضيات واللغة.

المصطلح الرياضي منه العرفي أي الذي اشتهر بين أهل الرياضيات كتعريف الزمرة والحلقة ومنه الخاص أي يمكن لكل مشتغل بالرياضيات أن يضع مصطلحاته.

مسألة المصطلحات اجتهادية ولا مشاحة في الاصطلاح فهذه التسميات أغلبها أصله لغوي ثم أسقطت على الرياضيات

والاختلاف في التسميات مشهور خاصة إذا كان المصطلح مترجما مثل الدالة والتابع ونسبة التزايد ونسبة التغير والحقل والجسم...

بل من المصطلحات اللاتينية ما يختلف في بعض حيثياته بين مدرسة وأخرى ككون الصفر ليس بعدد طبيعي عند المدرسة الأنجلوسكسونية واشتراط أن تكون الحلقة واحدية عند الفرانكفونية.

لكن المطلوب عدم تغيير المعاني الرياضية للمصطلحات المشهورة لأنها تفهم على ما أشتهرت عليه أما ما غير ذلك فالمسألة واسعة.

مع حركة الترجمة ظهرت ترجمة المصطلحات الغربية بألفاظ عربية مختلفة أحيانا حسب الكتابة الحرفية وأحيانا حسب الوظيفة وأحيانا حسب الأصل المترجم عنه.

لكن أفضل التراجم ما أعطى للمصطلح اسما يدل على معنى الكائن الرياضي و وظيفته.

من أمثلة ذلك كتابة أو نشر عدد حقيقي في الأساس العشري.

فكل عدد حقيقي يمكن كتابته عن طريق مجموع سلسلة أو ما نسميه بالكتابة العشرية.

$\pi = 3.141592653589793...$

لكن هل كل كتابة عشرية هي عدد حقيقي ؟

الجواب نعم وعادة كتابة العدد وحيدة إلا الأعداد العشرية فهي تقبل كتابتين مثل:

$0.999... = 1$

$2.678 = 2.677999....$

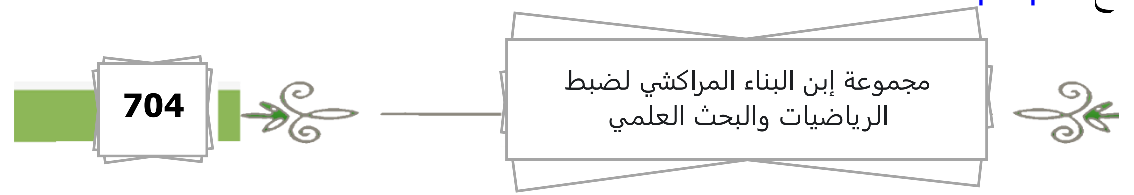
فيكفي نزع واحد من أول رقم عن اليمين من كتابة عدد عشري وإضافة سلسلة غير منتهية من الرقم 9 لنحصل على كتابة غير منتهية له .

بالفرنسية يطلقون على هذه الكتابة بـ Le développement décimal impropre

وبالمقابل للنشر المعتاد بـ Le développement décimal propre

المصطلح العربي الذي أتبناه هنا هيا الكتابة النظيفة propre وغير النطيفة impropre .

وهي ليست مجرد ترجمة حرفية بل توافق الأسلوب الفرنسي المستعمل لهذه الألفاظ وتوافق الأسلوب العربي كذلك إذ نطلق على العمل بغير النظيف إن قام العامل بعمله إلا أنه غير متقن وكذلك هو أحد المعاني الفرنسية لمصطلح impropre .



وكان قد سألني أحدهم من أيام عن ترجمة لفظ impropre هنا بغير النظيف مقابل ترجمته في التكامل بالمعتل فلم أرى أن المسألة تحتاج التوقف عندها لظهور المصطلح ولا مشاحة في الاصطلاح.

لكن أحد الذين لا باع لهم بالرياضيات إلا رسمها أعاد إثارة المسألة فأردت أن أنبه على مسألة مهمة هنا للفائدة.

لابد أن نعرف أن هناك فرقا بين التكامل المعتل والكتابة العشرية غير النظيفة.

التكامل المعتل كمفهوم هو غير تكامل ريمان إنما هو نهاية لتكامل ريمان ويمكن أن يكون متقاربا أو لا.

على عكس الكتابة العشرية فهي نهاية كيفما كانت كما أنها دائما توافق عددا حقيقيا بل تنتج من الحسابات المعتادة: $1 = 0.999... = 3 \times 0.333... = 3 \times 1/3$

فتسميتها بالمعتلة لا توافق مفهومها وتسميتها بالنظيفة تعطي المعنى إذ هي كتابة تعطي المطلوب إلا أنها ليست بأفضل تمثيل للأعداد العشرية وإذا نُظِّفَتْ رجعت للكتابة النظيفة.

وهذه من الأمور التي لا ينتبه إليها الواقف على الشكليات لأنه دخيل على الرياضيات وهو علم فهم لا علم رسم.

لكن وجب إرشاد المهتمين بمفاهيم الرياضيات إلى هذا لأن ترجمة المصطلحات لم تنته بعد وإن كنت لا أرى أن المرحلة مرحلة تنقيح وتوحيد لها لأن هناك ما هو أهم إلا أنه لا بد أن نشتغل على هذه المسألة لتجنب التراجم الحرفية التي لا تؤدي وظيفتها.

0.99999999999999999999999999999999999999...

مثال عن عدم ضبط الترميزات الرياضية

السلام عليكم وبعد: رفعا لكل لبس عن الزعم بأن العددين 1و 0.999999..... متساويان، إليكم التبرير الآتي:

1=3×0.3333333333........... +r (r=/=0)
alors:
1/3=0.3333333333.........+r/3
par contre:1/3=0.33333333333.......
est fausse (parlant de valeur exacte).
de plus:
3(1/3)=0.9999999999999..........+r
d'où:
1=0.99999999999...........+r (r=/=0)
enfin:
1-0.999999999999............=r
cqf: 1=/=0.9999999999.........

ومنه العددان غير متساويين بالضبط (اما تقريبا، فنعم)

مثال عن النظر للشكليات دون التنبه للمعاني الرياضية

جراء وهم الضبط وسوء الترجمة السليمة، يتم في هذه الأيام تداول وترويج التعبيرين:

"الكتابة العشرية النظيفة- *écriture décimale propre*-"

و"غير النظيفة -*écriture decimale impropre*-"

هل هذا من الضبط يا مترجم؟ أم من التثبت يا مروج؟

الكتابة العشرية النظيفة وغير النظيفة

Propre , impropre

عندنا يحارب الإصلاح بدعوى الجمود ، هل تراجم المصطلحات الغربية مسألة توقيفية ؟

حدثت نقاشات مؤخرا حول ترجمة مصطلحات غربية، اختلفت فيها المذاهب بين خيار البعض على الحمود على المعروف عندهم وخيار البعض الآخر وأنا منهم تحسين التراجم عند الحاجة.

السؤال الذي يطرح هل المصطلحات المترجمة مسألة توقيفية ؟

لا أحتاج أن أذكر أن مسألة ترجمة المصطلحات الرياضية الغربية فيها خلافات كثيرة حتى في نفس البلدان مثل الدالة والتابع والاستمرار والاتصال والمالانهاية وللانهاية ... والقائمة طويلة.

فجعل المسألة توقيفية تعنت إذ هي لحد الآن في الرياضيات مسألة اجتهادية.

لو أخذنا المثال الذي اختلف فيه وهي الكتابة العشرية فمن المعروف أن العدد العشري غير المعدوم عنده كتابتين كتابة نظيفة (propre) وكتابة غير نظيفة (impropre) .

الكتابة النظيفة لعدد حقيقي نحصل عليها بالنشر عن طريق القسمة المتكررة على 10^n مثل العدد π 3.14....

وهي تمثل متتالية أرقام تجعل من العدد الحقيقي نهاية لأعداد عشرية لذلك نقول أن الأعداد العشرية مجموعة كثيفة في مجموعة الأعداد الحقيقية.

لكن لو انطلقنا من كتابة عشرية كيفية فهل كل كتابة توافق عددا حقيقيا ؟

الجواب نعم إلا أنه يمكنك أن تجد للعدد العشري غير المعدوم كتابتين: $2.25 = 2.24999....$

الأعداد العشرية يمكن كتابتها بطريقتين النظيفة أو القانونية أو الاعتيادية أو السليمة وهي كتابة منتهية.

وكتابة ثانية للعدد العشري غير نظيفة لأن بها شوائب فهي غير منتهية مثل: $2.2499....$

فالتسعات المتكررة تشكل متتالية تؤول للواحد: $0.999... = 1$

باللغة الفرنسية نقول للكتابة النظيفة développement décimal propre

فهناك من يترجمها بالكتابة المناسبة أوالاعتيادي أو السليمة

وغير النظيفة développement décimal impropre

هناك من يترجمها بغير المناسبة أو المعتلة ومعتلة في مقابل سليمة.

الخيار الذي اخترته هو ترجمتها بالنظيفة وغير النظيفة وهي معاني مستعملة بالفرنسية نجدها في لغتهم وتستعمل في المعلوماتية عند قراءة بيانات بطريقة غير سليمة فنقول قراءة غير نظيفة (أنظر المرفقات) وغير نظيفة لا تعني وسخة إنما هذا من الفهم الخاطئ للغة.

قول impropre بمعنى معتل غير شائع في فرنسا أقول ذلك بحكم إقامتي لأكثر من 23 سنة بها.

نعم قد تترجم بغير سليم لكن بين غير سليم ومعتل فرق شاسع.



بل لفظ impropre يقصد به عادة عند الفرنسيين غير صالح وغير مناسب وغير نظيف وخاصة يستعمل بمعنى غير نظيف مجازيا بكثرة في كل ما يصنع بطريقة غير سليمة أو غير موافق للقاعدة العامة مع تأديته مهمته.

وهذا الموافق لكتابة من الشكل: 2.24999

فهي تعطي العدد فلا يمكن أن يقال هي معتلة لأنها تمثل العدد المطلوب.

بل هي تظهر عند الحسابات المعتادة: $0.333... \times 3 = 0.999... = 1$

فكيف يمكن تسميتها بالمعتلة ونحن لابد أن نمر بها عند العمل بعمليات الجمع والضرب ؟

أما ترجمتها بغير المناسبة ترجمة ناقصة إذ غير مناسبة لماذا ؟

ترجمتها بغير النظيفة توافق كونها غير منتهية في مكان كان بالأمكن فيه اختيار المنته.

وترجمة propre بنظيفة توافق كذلك المعنى المعروف لدى الفرنسيين فعند الكلام مثلا عن خط التلميذ نقول كتابته نظيفة أي توافق قواعد الكتابة من حيث الحجم والتسطير ويسهل قراءتها.

ويستعمل لفظ Sale ecriture كتابة غير نظيفة للكتابة التي لا توافق القواعد وصعبة القراءة.

http://dansmespetitscarnets.com/sale-ecriture/

مسألة ترجمة المصطلحات ليست توقيفية ما لم نحرف المشهور فالمسألة واسعة فالأصل ومن حق أي أحد يعمل في الرياضيات باللغة العربية تحسين هذه الترجمات لأن أغلبها تراجم حرفية كانت في وقت لم تنتشر فيه الرياضيات فلا تعكس دائما المعنى المقصود من المفهوم.

والترجيح بين التراجم كذلك مقبول أما التعنت عن ترجمة واحدة بدعوى المعتاد لا يفعله مشتغل بالرياضيات لأن أصل الرياضيات الإبداع فمتى جمد أحدهم فقد ألغى التفكير.

مرحلة إصلاح التراجم لابد منها وهي تسبق مرحلة توحيد المصطلحات على أنه لا يمكن لأحد أن يمنع أهل الرياضيات من وضع مصطلحات جديدة فالرياضيات علم يتطور بسرعة.

أن ينادي البعض بالجمود على المألوف جهلا منهم بالمفاهيم الرياضية لا يخدم الرياضيات بل يدخلنا في دوامات نحن في غنى عنها اليوم إذ نحتاج اليوم إلى وضع رياضيات قوية تدرس باللغة العربية فترك الواجب والدخول في جدالات فرعية عقيمة لا يخدم أمتنا خاصة إن كان المجادلون ليس لهم مستوى مقبول في الرياضيات فضلا عن جهلهم بأبسط تعاريفها ومفاهيمها.

وصراحة لقد ضاع لي وقت ثمين في مثل هذه النقاشات كان بالأمكن استغلاله في ترجمة براهين أو شرح مفاهيم بالعربية تخدم مرحلتنا الحالية وهي نقل العلوم من اللغة اللاتينية للغتنا العربية حتى نكتسبها فتصبح جزء من تراثنا وتساهم في نهضة أمتنا.

وبالله التوفيق.



الكتابة غير النظيفة عنظنا ننظفها ترجع نظيفة وهذا الحال مع $3 \times 0.33... = 0.999... = 1$

فلا يوجد مانع من استعمالها بل تظهر تلقائيا في الحسابات.

تأملت في جميع معاني Propre et impropre فلم أجد افضل من ترجمتين في هذا الموضع:

كتابة نقية وكتابة غير نقية

كتابة نظيفة وكتابة غير نظيفة

أما الباقي فلا يعطس المعنى:

كغير سليمة وغير مناسبة وغير صالحة ومعتلة ذاك أنه لا يوجد ما يمنع من استعمالها كما أن هذه الالفاظ تشير إلى شيء خارجي عن الكتابة فلا علة في هذه الكتابة إلا مخالفة الاصطلاح وحتى على تعريف الأعداد العشرية بأن لها كتابة عشرية منتهية فلا يتناقض ذلك مع كتابة ثانية غير منتهية إذ لا يشترط في هذا التعريف وإن كان ليس برياضي وحدانية الكتابة.

وتسميتها بغير الاعتيادية كذلك يردها بساطة ظهورها عند الحسابات.

فلا أجد أفضل من ترجمة نظيفة وغير نظيفة.



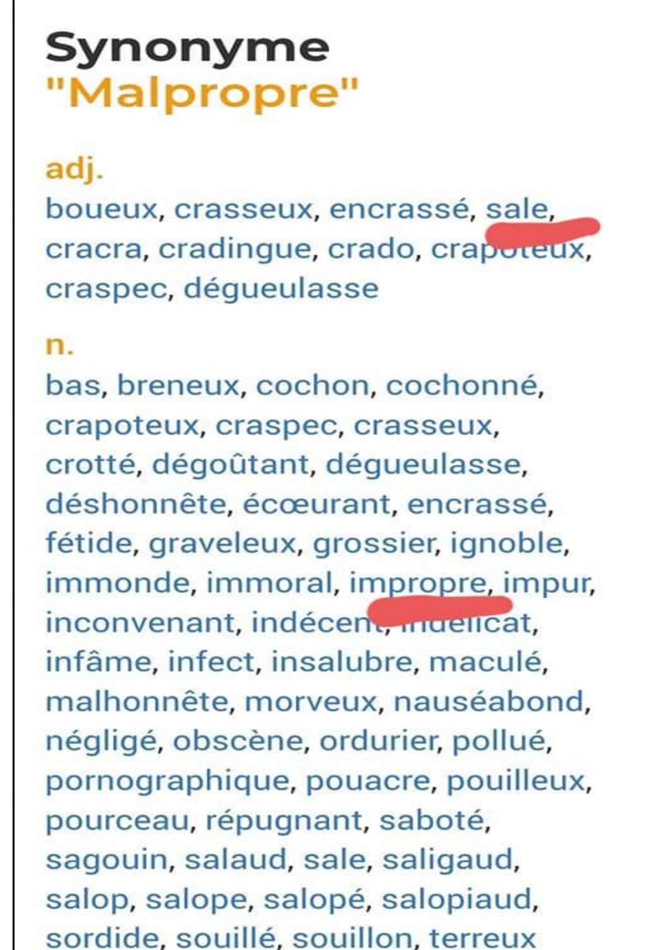
Sale écriture

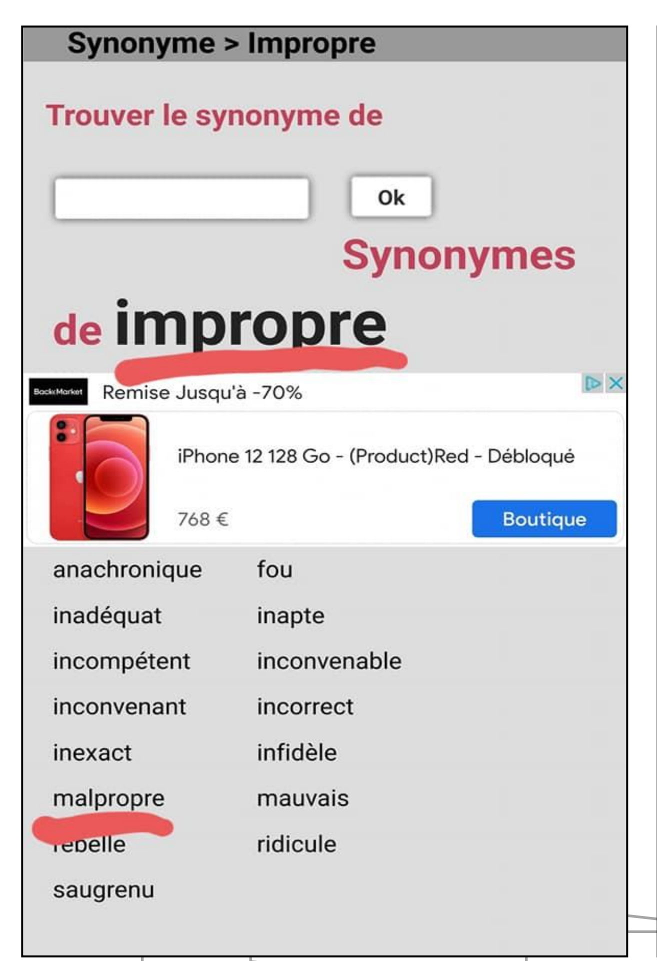
29 Mars 2019

Peut-on avoir tous les talents. Et bien je ne crois pas et je ne pense pas que ce soit souhaitable dans l'absolu. Enfin, je sais pas, j'y ai jamais vraiment pensé. Bref, dans ma quête d'une vie plus jolie, j'entrevois un allié hyper intéressant, le fameux bullet journal ou Bujo, sauf que… j'ai vraiment une sale écriture.

0.99999999999
99999999999999999
9999999999999999999999
999999999999999
999999999999999
999999999999999
999999999999999
999999999999999
999999999999999
999999999999999
999999999999999
999999999999999
999999999999999
999999999999999
999999999999999
999999999999999
999999999999999
999999999999999
999999999999999
999999999999999
999999999999999
999999999999999
999999999999999999999999999999999999...


lecture impropre
Discussion sur l'étymologie :
composé de lecture et de impropre.
Monde francophone
Nom, féminin
Synonyme de lecture sale : dans une base de données, lecture par une requête de données en cours de modification par une autre.
Synonyme
lecture sale
Terme apparenté
lecture fantôme
lecture non reproductible


Synonyme "Malpropre"
adj.
boueux, crasseux, encrassé, sale, cracra, cradingue, crado, crapoteux, craspec, dégueulasse
n.
bas, breneux, cochon, cochonné, crapoteux, craspec, crasseux, crotté, dégoûtant, dégueulasse, déshonnête, écœurant, encrassé, fétide, graveleux, grossier, ignoble, immonde, immoral, impropre, impur, inconvenant, indécent, indélicat, infâme, infect, insalubre, maculé, malhonnête, morveux, nauséabond, négligé, obscène, ordurier, pollué, pornographique, pouacre, pouilleux, pourceau, répugnant, saboté, sagouin, salaud, sale, saligaud, salop, salope, salopé, salopiaud, sordide, souillé, souillon, terreux


Synonyme > Impropre
Trouver le synonyme de
Ok
Synonymes de impropre
Remise Jusqu'à -70%
iPhone 12 128 Go - (Product)Red - Débloqué
768 €
Boutique
anachronique
fou
inadéquat
inapte
incompétent
inconvenable
inconvenant
incorrect
inexact
infidèle
malpropre
mauvais
rebelle
ridicule
saugrenu


Français
Étymologie
Composé de lecture et de impropre.
Locution nominale
Singulier
Pluriel
lecture impropre
lectures impropres
\lɛk.tyʁ ɛ̃.pʁɔ_pʁ'\
lecture impropre féminin
1. (Bases de données) Synonyme de lecture sale : dans une base de données, lecture par une requête de données en cours de modification par une autre.



malpropre *définition* CNRTL *espace sémantique*

54 synonymes

bas, breneux, cochon, cochonné, crapoteux, craspec, crasseux, crotté, dégoûtant, dégueulasse, déshonnête, écoeurant, encrassé, fétide, graveleux, grossier, ignoble, immonde, immoral, impropre, impur, inconvenant, indécent, indélicat, infâme, infect, insalubre, maculé, malhonnête, maritorne, morveux, nauséabond, négligé, obscène, ordurier, pollué, pornographique, pouacre, pouilleux, pourceau, répugnant, saboté, sagouin, salaud, sale, saligaud, salop, salopé, salope, salopiaud, sordide, souillé, souillon, terreux

8 antonymes

blanc, décent, honnête, immaculé, net, propre, reluisant, soigné

للفائدة : من قاموس لاروس propre بمعنى نظيف أو نقي أو غير وسخ.



LAROUSSE

Rechercher dans le dictionnaire...

Accueil > langue française > dictionnaire > propre adj. - propre n.m.

propre

adjectif

(de propre 1)

1. Qui n'est pas sale, qui est net, sans traces de souillure, sans poussière, etc. : Une chemise propre. Avoir les mains propres.

Synonymes :

blanc - immaculé - impeccable - net

Contraires :

maculé - malpropre - négligé - poussiéreux - sale - sali - sordide - souillé - taché

لنضبط الرياضيات معا

خصائص الكائنات الرياضياتيه الوجودية والبنائية وعلاقتها بالحدس الرياضياتي

قد تقدم فيما سبق الكلام عن الفرق بين التعريف البنائي والتعريف الوجودي وأن الأخير لا يعطي طريقة لحساب أو تعيين الكائن بعكس البنائي.

في مقال اليوم سنتطرق الى مفهوم آخر وهو الفرق بين الخصائص البنائية والوجودية.

مقال اليوم ليس بالمقال السهل لأنه سيحاول الخوض في الحدس الرياضياتي وهو ميدان صعب التجريد والضبط لأنه يخضع لذوق الرياضياتي لكن به تبنى الرياضيات.

الخاصية البنائية هي خاصية أولية داخلة في تركيب الكائن أي هي أقرب ما يكون إلى النظام المسلماتي منها من غيرها للكائن، فالكائن لا يكون كائنا إلا بها.

فهي بمثابة الحمض النووي للإنسان فهو طويل بسببه، قصير بسببه...

الخاصية البنائية لا يمكن تقسيمها إلى عدة خصائص كما لا يمكن الاستغناء عنها فعدم وجودها يلغي وجود الكائن ولا يمكن تعويضها إلا عن طريق تركيب خصائص أخرى يكون تقاطعها هو هذه الخاصية أو يشملها بل هذه الخصائص نتيجة عنها

الخاصية الوجودية على عكس البنائية تظهر بوجود الكائن فهي نتيجة عنه أما البنائية فهي سبب في وجود خصائص الكائن.

التفريق بينهما رياضيا يكاد يكون غير ممكن لتداخل القضايا المنطقية، لكنه تفريق بالمعنى او الحدس يلجأ إلى التأمل الرياضياتي من الرياضياتي أو ذوق الرياضياتي .

الخاصية البنائية هي جواب سؤال لماذا ؟ أما الوجودية فهي جواب لسؤال هل ؟

فلو أخذنا أوراقا خضراء فإذا سألنا لماذا هي خضراء فالجواب لأن فيها اليخضور فهذه خاصية بنائية إذا اختفت اختفى الإخضرار لكن لو سألنا هل توجد أوراق خضراء او هل الاوراق خضراء فالجواب نعم لكن الجواب لا يفسر سبب ذلك.

فهم الخصائص البنائية في الحقيقة هو شيء من الحدس الرياضياتي فالحدس الرياضياتي يتجه إلى تعيين هذه الخصائص لفهم طبيعة الكائن فمتى وجدها عمم خواص الكائن على غيره من الكائنات بربطها بوجود هذه الخاصية وهذا ما نسميه البناء المسلماتي للنظرية.

فالنظرية تبدأ بحالات خاصة ثم تعمم عبر التنقيب عم الخصائص البنائية لتصل إلى نضجها عندما تصبح نظرية مسلماتية كنظرية القياس مثلا.

من الناحية التطبيقية كمثال بسيط يمكننا ذكر الخاصية الأساسية للدالة الأسية و هي نقل الجمع إلى ضرب فهذه الخاصية هي مصدر الأسية بل الأسية لا تكون إلا بها و منها يمكن فهم جميع خصائص الأسية

كمشتقتها و نهاياتها، فهي خاصية بسيطة تبين ماذا تعني الدالة الأسية ألا و هي مجرد تماثل بين الزمرة الحقيقية الجمعية و الزمرة الحقيقية الضربية الموجبة تماما.

فهي خاصية أولية قريبة جدا للبنية الجبرية للحقل الحقيقي فهي قريبة جدا للنظام المسلماتي في نظرية الأعداد بل تخبرنا أن الدالة الأسية نتيجة حتمية لعمليتي الجمع والضرب وهذا ما يفسر ظهورها من النهاية $\lim (1+x/n)^n$ والنشر $\text{Sum } x^n/n!$ فكلاهما يوازن الجمع بالضرب.

لنأخذ مثالا آخر بتكامل ريمان:

فمن المعلوم أن الإستمرار و عدمه يؤثر في وجود تكامل ريمان ذلك أن كل دالة مستمرة تقبل المكاملة بمفهوم ريمان ، لكن هذه الخاصية وجودية فوجود الإستمرار يوجد تكامل ريمان لكن لا يفسر سبب ذلك.

لكن لو دققنا في تكامل ريمان، في كيفية بنائه لوجدنا أنه يعتمد إعتمادا كليا على ممثل لقيمة الدالة على كل تجزئات للمجال.

لكن ماذا يحدث لو وجدنا اضطرابا في قيمة هذا الممثل بسبب عدم استمرار الدالة عند نقطة فقيمتها يمينا تختلف عن قيمتها شمالا فأي ممثل نختار ؟

سنحصل هنا على اضطراب في قيمة التكامل، لكن مع شرط الإستمرار نجد أنه كلما صغرنا مجال التجزئة فاختيار قيمة للدالة يغني عن الباقي في مل جزء من تجزئة المحال لأنها كلها متقاربة بحكم الإستمرار.

لذلك إذا غاب شرط الإستمرار أمكن اختيار قيمتين للدالة في نفس المجال الصغير متباعدتين وهذا التباعد قد يفسد لنا الحصول على نهاية مجاميع ريمان.

فإذا أردنا أن نتخلص من هذه المشكلة فإما أن نتخلص من القيم المتباعدة للدالة في كل تجزئة و هذا غير ممكن إلا بالاستمرار أو نجعل التجزئات التي تظهر فيها هذه المشكلة ذات قيمة مهملة و هنا نحصل على شرط لوبيغ في وجود تكامل ريمان.

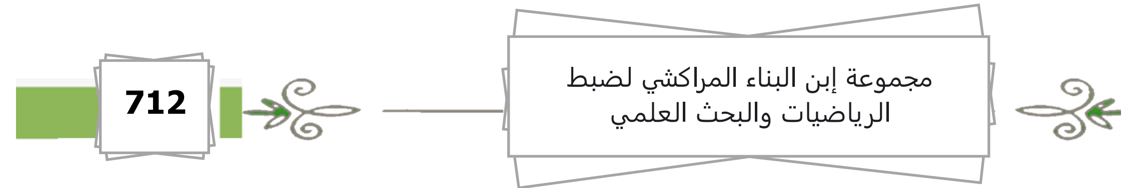
فشرط لوبيغ لوجود تكامل ريمان أن تكون مجموعة عدم إستمرار الدالة مهملة و هنا نحصل على شرط بنائي لا وجودي إذ بغيابه يختفي وجود تكامل ريمان.

ومن هنا نفهم سبب قوة تكامل لوبيغ فبنائه مسلماتي لا يستعمل خصائص وجودية كالإستمرار و قسمة المجال على أطوال متساوية إنما يستعمل القياس و هو مفهوم أولي جدا قريب من البنية المسلماتية.

وكذلك نفهم المشكلة في تكامل ريمان فمشكلته بنائية وبفهمها أمكن تعميمه لنظرية مسلماتية أوسع.

السؤال الآن كيف نوظف هذا الوصف في التفريق بين الخواص البنائية والوجودية في حل التمارين فكما قلنا هو جزء من الحدس الرياضياتي ؟

وهنا نتوجه إلى الأستاذ ومن خلاله إلى التلميذ : الطريقة المثلى هي تأمل الكائن لمعرفة لما هو كائن فمثلا البرتقالة تستطيع التدحرج لأنها كروية لا لأنها موجودة في مرتفع ولا لأنها برتقالية فمتى ميزنا هذا الوصف الذي لا يكون الكائن إلا به كائنا أي يدخل في تركيبته أمكننا بناء حل عليه.



ولشرح ذلك سنستخدم التمرين التطبيقي التالي:

لتكن المتتالية الحقيقية التي تحقق الشروط التالية:

$$0 < U_{n+m} \leq U_n + U_m$$

من أجل كل عددين طبيعيين غير معدومين n ، m

المطلوب برهنة أن قسمة المتتالية على رتبتها متتالية متقاربة في المالانهاية

$$\lim U_n/n = L \text{ , } n \to \text{INFINI}$$

فعند التأمل في المطلوب و هو مقارنته مع الخاصية المعطاة وهنا نشير إلى اهمية محاولة ربط المطلوب بالمعطيات، نلاحظ أن هناك توافقا.

فالمطلوب يقسم المتتالية على المتغير و الخاصية تجعل المتتالية أقل من مجموع حدودها السابقة، بل نلاحظ مباشرة أن $U_{n+n} \leq U_n + U_n = 2 U_n$ ونلاحظ كذلك أن

$$U_{n+1} \leq U_n + U_1 <= U_{n-1} + U_1 + U_1 \dots \leq (n+1) U_1$$
$$\Rightarrow U_{n+1} /(n + 1) \leq U_1$$

فالخاصية المذكورة هنا تؤذي بنا إلى خاصية أعمق بل تظهر القسمة الموجودة في النهاية لكن ما يفسد علينا الأمر في ما توصلنا إليه هو أن القسم الأيمن U_1 فهو ثابت وهذا غير كاف لإستنتاج النهاية.

وهنا الحدس يقول لما لا نعمم ، ماذا يحدث لو استبدلنا الواحد بشيء أعم كيفي وهو m :

$$U_{k * m} \leq U_{(k-1) m} + U_m \leq \dots \leq k U_m$$

ثم لما لا نقسم على الرتبة لننظر على ما نحصل

$$n = k * m$$
$$U_{k * m}/(k * m) <= k U_m / (k * m) = U_m / m$$
$$\Rightarrow U_n/n \leq U_m/m$$

فهذه تشبه متتالية متناقصة ، فلنواصل التعميم ، لكتب

$$n = k m + r \text{ , } 0 \leq r < m$$
$$U_{k * m + r} \leq U_{(k-1) m + r} + U_m \leq \dots \leq k U_m + U_r$$
$$\Rightarrow U_{k * m + r} / (k * m + r) \leq k U_m /(k * m + r) + U_r/(k * m + r)$$
$$\Rightarrow U_n/n \leq k U_m /(k * m) + U_r/n$$
$$\Rightarrow U_n/n \leq U_m /m + U_r/n$$

وهنا نلاحظ أننا من مجرد ملاحظة بسيطة استطعنا التنقيب فيها لتعميمها لخاصية بدائية جدا تشبه الخصائص البنائية، فهذه متتالية تكاد تكون شبه متناقصة لولا القسم الإضافي U_r/n

لكن هذا لا يهم فهو يؤول إلى الصفر عند المالانهاية

ما العمل الآن لنثبت التقارب ؟ هنا نستحضر الآلات الرياضياتية لأننا قد حددنا الخاصية البنائية ، فالآن لننطلق منها.



ما هي الآلات التي نعرفها ؟ قد نستحضر البراهين فهنا المتتالية أشبه ما تكون بمتتالية رتيبة فلما لا نطبق برهانا مشابها لبرهان تقارب المتتالية الرتيبة ؟ لكن مناداة الإبسيلون ثقيلة جدا....

أو لنستعمل ما هو أقوى ، فالمتتالية هنا محدودة فإن كان لا يمكننا استعمال النهايات لأننا لم نثبت بعد تقاربها، فيمكننا استعمال النهاية العليا و النهاية السفلى.

لنحاول حصر المتتالية اليسرى نحو اليمني اذن لندفعها بالنهاية العليا:

$$\limsup U_n/n \leq \limsup U_m/m + \limsup U_r/n \;,\; n \to \text{INFINI}$$

لكن المتتالية U_m/m لا علاقة لها بـ n فهي ثابتة بالنسبة لها إذن لا تتغير بالنهاية

$$\Rightarrow \limsup U_n/n \leq U_m/m + 0 = U_m/m$$

والآن لنحاول حصر المتتالية اليمنى نحو اليسرى باستدعاء النهاية السفلى

$$\Rightarrow \liminf(\limsup U_n/n) \leq \liminf U_m/m \;,\; m \to \text{INFINI}$$

لكن القسم الأيسر ثابت فهو نهاية إذن

$$\Rightarrow \limsup U_n/n \leq \liminf U_m/m$$

إذن النهاية العليا أقل من النهاية السفلى و هذا غير ممكن إلا عند التساوي فالمتتالية تقبل نهاية

$$\Rightarrow \limsup U_n/n = \liminf U_m/m = \lim U_n/n$$

لو لخصنا البرهان لوجدناه في بعض سطور:

$U_{k*m+r} \leq U_{(k-1)m+r} + U_m \leq \dots \leq k\,U_m + U_r$

$\Rightarrow U_{k*m+r}/(k*m+r) \leq k\,U_m/(k*m+r) + U_r/(k*m+r)$

$\Rightarrow U_n/n \leq U_m/m + U_r/n$

$\limsup U_n/n \leq \limsup U_m/m + \limsup U_r/n \;,\; n \to \text{INFINI}$

$\Rightarrow \limsup U_n/n \leq U_m/m + 0 = U_m/m$

$\Rightarrow \liminf(\limsup U_n/n) \leq \liminf U_m/m \;,\; m \to \text{INFINI}$

$\Rightarrow \limsup U_n/n \leq \liminf U_m/m$

$\Rightarrow \limsup U_n/n = \liminf U_m/m = \lim U_n/n$

البرهان موجود في المرفقات

إذا تأملنا ما قمنا به نجد اننا بحثنا عن الخاصية البنائية فلما وجدناها طبقنا معارفنا المكتسبة في طرق البراهين ، فهنا جمعنا بين الحدس و المعرفة.

وهذا الواجب على كل أستاذ تعليمه للتلاميذ فليس فقط يعلمهم طريقة البرهان إنما سبب تحرير البرهان بتلك الطريقة فهذا الفرق بين الفهم والحفظ.

ليس من السهل تجريد الخاصية البنائية لأنه إذا فعلنا ذلك أخرجناها من الحدس و هي في الأصل حدسية أكثر منها رياضياتية.

لكن الذي يمكننا أن نقوله انه إذا أردنا فهم المسائل لابد لنا من البحث عن هذه الخصائص فهي أصل كل ما يتصف به الكائن الرياضياتي.

BENCHABANA Abdelhakim

$$\forall n,m \in \mathbb{N}^* : x_n > 0, x_{n+m} \le x_n + x_m$$

$$n \ge m, n = km + r, 0 \le r < m : x_n = x_{km+r} \le x_{km} + x_r$$

$$\Longrightarrow x_n \le x_{(k-1)m} + x_m + x_r .. < kx_m + x_r$$

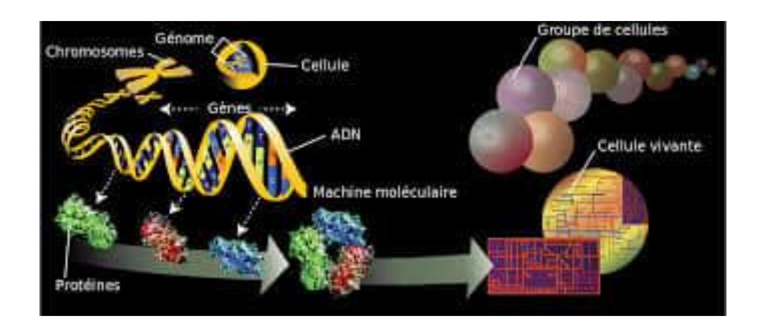
$$\Longrightarrow \frac{x_n}{n} \le \frac{kx_m + x_r}{km+r} = \frac{kx_m}{km+r} + \frac{x_r}{km+r}$$

$$\Longrightarrow \frac{x_n}{n} \le \frac{km}{km+r}\frac{x_m}{m} + \frac{x_r}{km+r} \le \frac{x_m}{m} + \frac{x_r}{n}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\forall m \in \mathbb{N}^* : \limsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} \le \frac{x_m}{m} \ (*)}$$

$$\liminf_{m\to\infty}(\limsup_{n\to\infty})\frac{x_n}{n} \le \liminf_{m\to\infty}\frac{x_m}{m} = \liminf_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} \Longrightarrow \limsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = \liminf_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = \boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = l}$$

$$(*) \Longrightarrow si\ \exists m : Inf_{n\ge 1}(\frac{x_n}{n}) = \frac{x_m}{m} \Longrightarrow \frac{x_m}{m} \le \lim_{\infty}\frac{x_n}{n} \le \frac{x_m}{m} \Longrightarrow \boxed{\lim_{\infty}\frac{x_n}{n} = Inf_{n\ge 1}(\frac{x_n}{n})}$$





لنضبط الرياضيات معا

بين الخاصية والتعريف : هل ترتقي خاصية لتصبح تعريفا ؟

بسم الله الرحمن الرحيم

الخاصية رياضيا مجرد قضية يتصف بها كائن رياضي متى كانت صحيحة عليه، فالكائن الرياضياتي هو مجموعة من الخصائص.

الرياضيات علم تجريد يدرس الخصائص لذلك لتعريف أي كائن رياضي نستعمل خصائصه، ولذلك في نظرية المجموعات نقول أن عنصرين متساويين في مجموعة إذا كان لهما نفس الخصائص.

ونقول أن مجموعتين متساويتين إذا كان لهما نفس العناصر .

ونقول عن بنيتين جبريتين أنهما متساويتين إذا وجد بينهما تماثل وهو تطبيق تقابلي يحافظ على العمليات الجبرية فمتي تساوت الخصائص فرياضياتيا هو عندنا نفس الكائن.

لكن كيف يتم تعريف الكائنات الرياضياتية ؟

هناك عدة طرق لتعريف الكائن الرياضي كلها تهدف إلى تحديد خصائصه:

أولها التعريف الإصطلاحي : أي نصطلح أنه إذا تحققت عدد من الخصائص في كائن فنعطيه إسما معينا، مثال ذلك الزمرة فنحن نصطلح عليها بأنها مجموعة مزودة بعملية داخلية تحقق شروطا معينة مع وجود النظير والعنصر الحيادي فكل هذه فرضيات لخصائص تتصف بها المجموعة وعمليتها.

ومثال آخر : المجموعة الخالية فنحن نصطلح عليها أنها تحقق خاصية عدم وجود عناصر فيها ثم نسلم بوجودها.

فكما تلاحظون هذا النوع من التعريف لا يضمن وجود الكائن ولا تعيينه فمثلا المجموعة الخالية اضطررنا إلى التسليم بوجودها لأن تعريفها غير كاف لذلك.

الثانية : التعريف البنائي أي نبني الكائن ليحقق خصائص وهو تعريف وجودي وسيأتي بيانه،

مثال ذلك : تعريف الدالة الأسية عن طريق النشر فهو تعريف بنائي بنينا فيه الكائن.

الثالثة : التعريف الوجودي فنكتفي بإعطاء خصائص تضمن وجود الكائن لكن لا تعينه مثال ذلك تعريف الدالة الأسية بواسطة حلول المعادلة التفاضلية $y' = y, y(0)=1$ ففي هذا التعريف عرفنا جيدا الكائن الرياضي بتحقيقه لهاتين الخاصيتين لكنه تعريف وجودي لم نعين به صور الدالة بدلالة السابقة.

قد نمر من التعريف الوجودي إلى البنائي عن طريق تحويل الخصائص بواسطة الروابط المنطقية كإستعمال تعريف الدالة الأسية بالمعادلات التفاضلية لإستنتاج نشرها.

كما نلاحظ التعريف البنائي يشمل الوجودي.

معرفة هذه الأنواع من التعاريف مهم جدا لعدة أمور :

أولها أنه ليس كل مجموعة من الخصائص تشكل تعريفا وإن كانت تعين الكائن، خاصة التعريف الوجودي .



فالهدف من التعريف إستعماله فإذا كان التعريف يستعمل مثلا خاصية لا يمكن إثباتها إلا بإستعمال تعريف ثان للكائن فكأننا لم نصنع شيئا.

مثال ذلك أن نعرف المجموعة الخالية بالمجموعة التي عدد عناصرها معدوم فهنا لم نصنع شيئا لامور عدة اولها: أن مجموعة الأعداد الطبيعية مصنوعة إنطلاقا من المجموعة الخالية فكيف نعرف المجموعة الخالية بالاعداد الطبيعية ؟

والثاني أن عدد عناصر المجموعة الخالية معدوم إصطلاحا فكيف نستعمل الإصطلاح لتعريف ما عرف به!!! وكمثال آخر أن نعرف مثلا الأعداد الطبيعية بالأعداد الحقيقية الموجبة التي ليست لها أرقام عن يمين الفاصلة.

المشكل أن صناعة الأعداد الحقيقية تحتاج لمجموعة الأعداد الطبيعية فكيف نعرف الأعداد الطبيعية بالحقيقية ؟ إذن كون الأعداد الطبيعية أعدادا حقيقية موجبة ليست لها أرقام عن يمين الفاصلة هو مجرد خاصية لا ترتقي أن تكون تعريفا.

فعدد خصائص كائن رياضي غير منته لكن ما نستعمله لتعريفه جيدا منته ويهدف إلى إستعماله فليس كل خاصية تعريف لكن كل تعريف هو مجموعة من الخصائص.

ثانيها في أهمية معرفة أنواع هذه التعاريف : أن المنطق الحدسي مثلا لا يقبل التعريف الوجودي إذ لابد أن يكون بنائيا وإلا فهو غير معرف.

ثالثها : أن الواقع يحتاج لبناء قابل للتطبيق مثال ذلك ان تعرف العدد الأولي بمبرهنة ولسون والتي تنص على أن الدالة $f(n) = 2 + (2(n!) \bmod (n + 1))$ تنتج كل الأعداد الأولية، ورغم كون هذا التعريف بنائي نظريا إلا أنه عمليا هذه الدالة لا يمكن إستعمالها لأن $n!$ تكبر سريعا بحيث لا يمكن لأي حاسوب إستيعابها.

يمكن تعريف كائن رياضياتي بعدة تعاريف متكافئة فمثلا الدالة الأسية تعرف بخمس طرق منها البنائي ومنها الوجودي.

البنائية منها:

عن طريق النشر

عن طريق النهايات

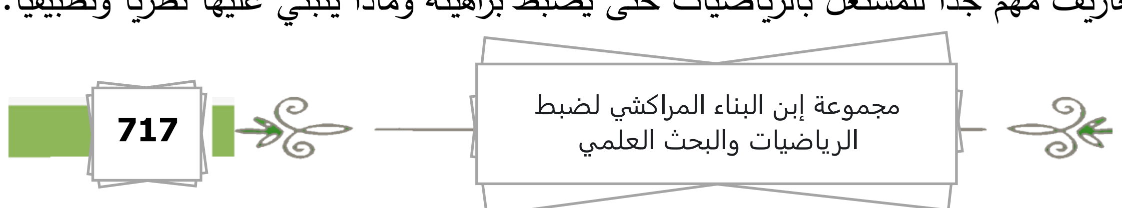
عن طريق الدالة العكسية للدالة اللوغارتمية

الوجودية :

عن طريق المعادلات التفاضلية

عن طريق خاصية تحويل الجمع إلى ضرب.

معرفة أنواع التعاريف مهم جدا للمشتغل بالرياضيات حتى يضبط براهينه وماذا ينبني عليها نظريا وتطبيقيا.



لنضبط الرياضات معا : هل نتخذ المبرهنة كتعريف ؟ الاستمرار عن اليمين وعن اليسار كنموذج.

من الأمور التي لابد على المشتغل بالرياضيات ضبطها هي التفريق بين التعاريف والمبرهنات.

فالتعريف لا يحتاج برهانا لذاته لكن يحتاج أن تكون كائناته الذي يبني عليها موجودة رياضيا من خلال المسلمات أو المبرهنات.

أما المبرهنة فهي نتيجة تسلسل منطقي مبني على مسلمات وفرضيات بشكل مباشر أو غير مباشر ونقصد بغير المباشر المبرهنات نفسها التي تبنى عليها مبرهنات أخرى.

أحيانا قد تتكافئ التعاريف والمبرهنات مثال ذلك مبرهنة إقليدس ومبرهنة طاليس تكافئان مسلمة التوازي في هندسة إقليدس.

وكمثال آخر مسلمة الاختيار تكافئ توطئة زورن ومبرهنة زارميلو.

لكن هذا الأمر ليس على عمومه فكثير من المبرهنات هي نتائج تعريفات في حالات خاصة مثال ذلك الاستمرار عن اليمين وعن اليسار لدالة حقيقية.

فالمبرهنة تخبرنا أنه إذا وجد الاستمرار عن اليمين والاستمرار عن اليسار فالدالة مستمرة إلا أن هذه المبرهنة لا تكون مبرهنة إلا بفرضياتها فهي تتحدث عن دالة حقيقية معرفة على مفتوح عند نقطة a يمينا ويسارا.

والمسألة تعود للمسارات وبما أنه يوجد مساران في R على الأكثر وصلنا لهذه النتيجة في هذه الحالة.

هذه المبرهنة تعمم للفضاءات منتهية الأبعاد مع تعدد المسارات.

لكن هل تتخذ هذه المبرهنة كتعريف للاستمرار ؟

الجواب لا فالمبرهنات لا يمكن أن تتخذ كتعاريف من حيث إلحاق الخاصية التي تبرهن وجودها بوجودها لأن هذا دور البرهان التي تقدمه.

فلا يمكن أن نقول نعرف الاستمرار لدالة حقيقية بالاستمرار عن اليمين واليسار لأن هذه نتيجة من تعريف أعم وهو أن الاستمرار في الطبولوجيا يعرف خارج المسارات إنما ظهرت المسارات في الفضاءات النظيمية فقط.

يجب أن ننبه إلى حالة تكافؤ التعريف مع المبرهنة فهذه يصح قلب التعريف مع المبرهنة لتصبح المبرهنة كتعريف والتعريف كمبرهنة لكن لا يتخذا كليهما تعريفا في آن واحد.

بالنسبة لتعريف الاستمرار في الطبولوجيا فالعمل يكون على مجموعة التعريف بطبولوجيا الأثر وسأسوق هنا التعريف بالنسبة لدالة f معرفة على جزء من فضاء متري نحو فضاء متري عند a

$$\forall\ \xi > 0,\ \exists\ \delta > 0\ ,\ \forall\ x \in Df : d(x\ ,a) < \delta \Rightarrow d(f(x)\ ,\ f(a)) < \xi$$

فالكلام عن الاستمرار ممكن متى كانت الدالة معرفة عند نقطة سواء كانت معزولة أو لا.

فالاستمرار خاصية للدالة على مجموعة تعريفها ولا علاقة له بما هو خارجها لذلك نستعمل طبولوجيا الأثر على مجموعة تعريفها.




ولذلك هناك دوال مستمرة في R أو جزء منها لكن متى خرجنا من R تصبح غير مستمرة مثل دالة الجذر التربيعي فهي مستمرة بانتظام على R^+ وخصوصا عند الصفر ورغم ذلك لا يمكن تعميمها بخواصها لدالة مستمرة على مجموعة الأعداد العقدية فهي مستمرة على R^+ غير مستمرة على C رغم أن R^+ جزء منها
https://fr.m.wikipedia.org/.../Racine_d%27un_nombre_complexe

ذلك أن المسارات تختلف من مجموعة لأخرى ففي R^+ يوجد مساران لكل قيمة ما عدا الصفر فله مسار اقتراب واحد.

أما في C فالمسارات متعددة وكونها لا تتوافق عند حساب نهاية الجذر التربيعي جعل ذلك الدالة غير مستمرة على C .

ضبط التعاريف والتفريق بينها وبين المبرهنات مهم جدا حتى لا يقع طالب الرياضيات في أخطاء بسبب اتخاذه للمبرهنات كتعاريف على نتائجها دون الأخذ بعين الاعتبار بشروطها.

Détermination continue

Si *U* est une partie de ℂ, une détermination continue d'une racine carrée sur *U* est une application continue $f : U \to \mathbb{C}$ telle que $(f(z))^2 = z$.

> Il n'existe aucune détermination continue d'une racine carrée sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, ni même sur le cercle unité[8].

Démonstration — Sinon, il existerait une fonction continue *f*, qui à tout complexe de module 1, $e^{i\theta}$, associe l'une de ses deux racines carrées : $e^{i\theta/2}$ ou $-e^{i\theta/2}$. La fonction

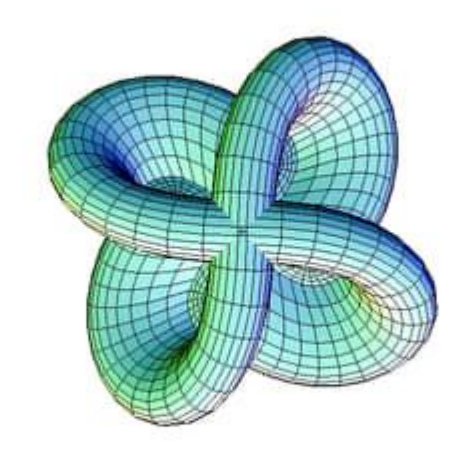
$$\mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \theta \mapsto f(e^{i\theta})e^{-i\theta/}$$

serait alors continue et à valeurs dans {−1, 1} donc (par connexité de ℝ) constante :

$$f(e^{i\theta}) = \varepsilon e^{i\theta/2}, \quad \text{où} \quad \varepsilon =$$

Mais alors, remplacer θ par θ + 2π pose problème : le terme de droite (non nul) est remplacé par son opposé tandis que le terme de gauche reste inchangé. D'où une contradiction.

L'image ci-contre illustre ce phénomène. Pour un tour complet effectué le long d'un cercle de centre 0, le suivi continu d'une racine carrée ne parcourt qu'un demi-tour.



بين المعرفة الرياضية والمعرفة الواقعية

هل يمكن معرفة الكتابة العشرية لأي عدد حقيقي ؟

هل يمكن معرفة خصائص عدد حقيقي من كتابته العشرية ؟

قد يظن البعض أن مجرد تكافؤ الكتابة العشرية لعدد حقيقي مع قيمته يخول لنا معرفة أي خصائص من خصائصه إنطلاقا منها ؟ لكن الأمر ليس صحيح على عمومه.

فلا ننسى أن الرياضيات تتعامل مع المالانهاية بل مع أنواع متعددة منها فتعطي لها وجودا وتبني عليها قضايا تصفها بالصحة إلا أن الواقع على غير ذلك.

فإن كان رياضيا من الممكن حساب أي رقم من الكتابة العشرية لأعداد مألوفة مثل e و π فعمليا الأمر ليس بالهين ذلك أن:

الكتابة العشرية لأعداد غير ناطقة غير منتهية وهذا يعني إستحالة تدوينها في الواقع.

وحتى ولو غيرنا شرط التدوين الكلي بالحساب الجزئي فالأمر ليس بالسهل إذ لذلك يجب إيجاد خوارزمية تجعل العدد قابلا للحساب من جهة أي الخوارزمية تتوقف بعد عدد منته من العمليات تجعلنا نصل للدقة المنشودة في الحساب. ومن جهة أخرى الزمن المستغرق لتوقف الخوارزمية يجب أن يكون مناسبا لعمر البشرية فخوارزمية تستغرق ملايير السنين بالتكنولوجيا الحديثة لحساب دقة مطلوبة لها حكم العدم بالنسبة لعمر البشر.

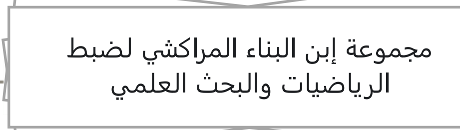
وهنا يظهر الفرق الشاسع بين المعرفة الرياضية والمعرفة الواقعية فما يمكن إثباته رياضيا لا يمكننا دوما إثباته واقعيا وخير مثال على ذلك كل ما تنتجه مسلمة الإختيار فلا سبيل لبنائه على أرض الواقع.

الطريقة المتبعة للخروج من هذا المأزق هي التقريب لكن التقريب ليس ممكن دائما فهناك أعداد حقيقية غير قابلة للحساب كالعدد أوميغا لشاتان كما أن هناك حسابات غير منتهية على الطريقة الرياضية.

فإن كان من السهل التعريف رياضيا العدد المتسامي بأنه ليس بجذر لكثير حدود ذو معاملات صحيحة فهذا التعريف غير مفيد على أرض الواقع إذ لا يمكننا واقعيا مقارنة عدد حقيقي بجميع جذور كثيرات الحدود لإنها غير منتهية. وهذا ما يفسر صعوبة برهنة طبيعة بعض الأعداد ذلك أننا نبحث عن طرق أخرى شاملة للتعريف الأصلي. رغم أن بعض الأعداد لها كتابة عشرية خوارزمية تمكننا من التعامل معها كتدوين منته والحكم على طبيعتها كأعداد ليوفيل المتسامية مثلا فتبقى الكثير من الأعداد الحقيقية لها كتابة عشوائية فيما يظهر لنا وأحيانا يستحيل حسابها. لذلك في الرياضيات هناك نظرية تدعى بنظرية الحسابات أو نظرية التراجع Théorie de la calculabilité والتي تهتم بالدوال القابلة للحساب عن طريق خوارزميات.

أهمية هذا المجال تكمن في محاولة تطبيق الرياضيات على أرض الواقع والتمييز بين ما يمكن حسابه وما لا يمكن حسابه.

إن كانت المعرفة الرياضية لا نهائية فتبقى المعرفة البشرية منتهية.




بين المبرهنات الرياضية والنظريات الفيزيائية

النتائج الرياضية المطبقة على الواقع قائمة على فرضيات استنتجناها من مراقبة الواقع.

فإذا خالفت النتائج الواقع فهو أحد **أمرين**:

إما أننا اخطانا في مراقبة النتائج في الواقع كالخطأ في الحساب أو لم اهملنا ما لا يمكن إهماله وهذا ما وقع مع نبتون قبل إكتشافه فبما أن الفلكيين لاحظوا أن مسار أورانوس لا يتوافق مع النتائج الرياضية استنتجوا أنهم اهملوا أشياء من الواقع فحسبوا نوقع نبتون إنطاقا من ذلك ثم راقبوا الموقع فوجدوه.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Neptune_(plan%C3%A8te)

أو الأمر الثاني أن النظرية الفيزيائية المطبقة لا توافق الواقع أي تنطلق من خطأ في الفرضيات أي فرضيات لا توافق الواقع وهذا ما حدث مع عطارد فمساره دورانه حفل نفسه مختلف قليلا عن نتائج ميكانيك نيوتن تبين خطأ ميكانيك نيوتن وجاءت النسبية فصححت ذلك.

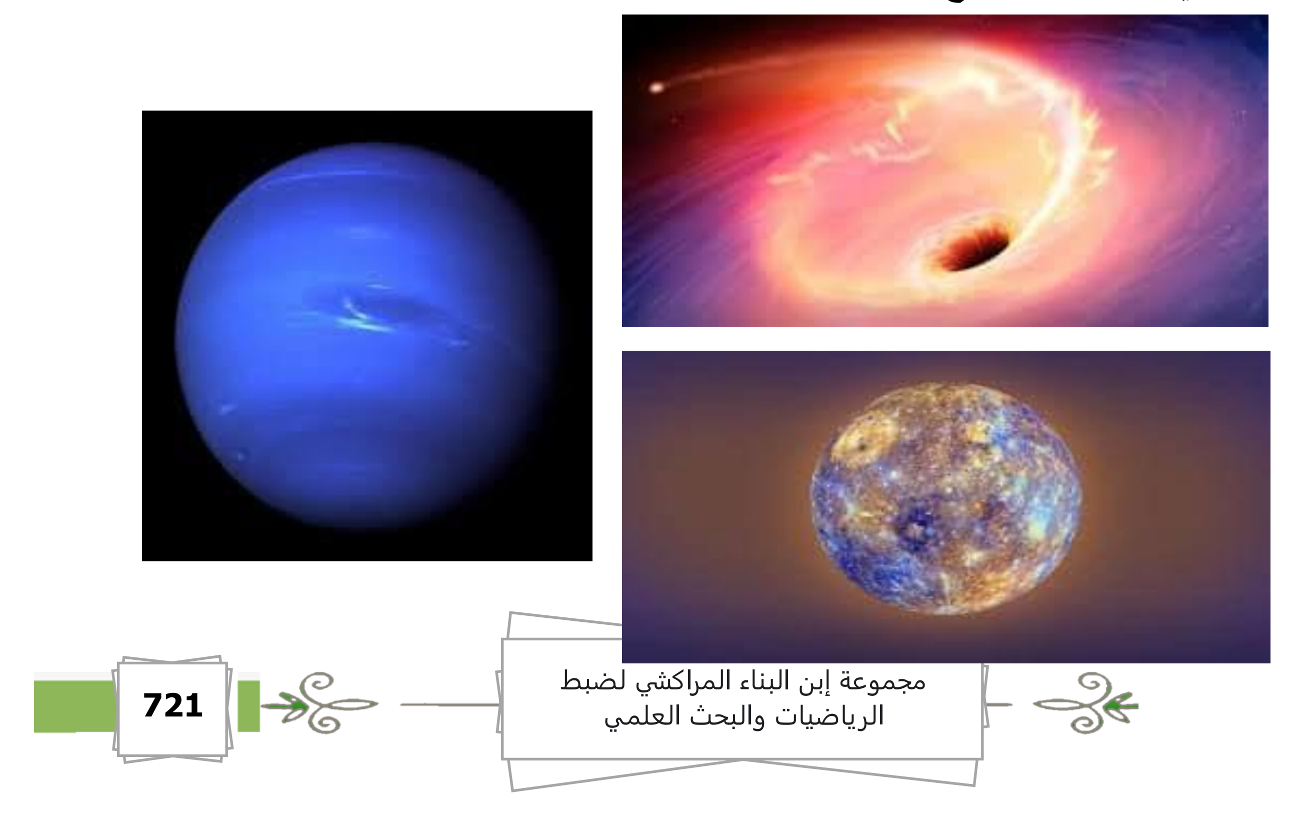
https://fr.m.wikipedia.org/.../Tests_exp%C3%A9rimentaux...

المبرهنات الرياضية لا تخطئ لكن الخطأ من مراقبة البشر للواقع فالنظريات الفيزيائية مجرد تقريب للواقع لذلك تسمى نظريات لا مبرهنات.

فإذا تبين خطأ نظرية بحثنا عن ما يصححها لذلك بعد ميكانيك نيوتن جاءت النسبية وميكانيك الكم ثم لما لم تقدر هاتين على تفسير ما يحصل داخل الثقوب السوداء وما قبل زمن بلانك قام العلماء بالبحث عن نظرية أعم تفسر الواقع كنظرية الحبال ونظرية الجاذبية الكمية.

الأكيد ان الفيزياء لا تبرهن الرياضيات فإذا جاءت الفيزياء بشيء يختلف عن المعتاد في الرياضيات فهذا يعني إما خطأ التجربة أو اننا نستعمل رياضيات غير مناسبة للواقع أي تنطلق من فرضيات لا توافق الواقع وهذا كذاك خطأ مراقبة في تجربة الإنطلاق.

فالخطأ بشري لأننا نقرب النتائج.



ما هو التخيل ؟

الإنسان بطبعه يدرك ما حوله من خلال الأوصاف التي يتلقاها عبر حواسه.

لكن العجيب في العقل البشري أنه قادر على تجريد الأوصاف فيجمع الاشياء ذات الوصف الواحد في جنس الوصف فيصنع وجودا للوصف في ذهنه غير موجد على الواقع منفصلا عن الموصوف فاللون مثلا هي خاصية لا يمكن أن تجدها في الواقع مجردة على الشيء.

فلو قلت لأحدهم برتقالة وبطيخة وقمر فسيقول لك كلها كروية فالتكوير وصف أو خاصية جردها الإنسان فجعل لها وجودا في ذهنه.

لكن الإنسان قادر على فعل أكثر من ذلك فكل هذه الخصائص هو قادر على إعادة تركيبها وتطبيقها على الأشياء فمتى أريت الإنسان طماطم حمراء فهو قادر على استبدال اللون الأحمر باللون الأزرق لأنه فيتصور طماطم زرقاء، فالطماطم في ذهنه يراها بالأوصاف بوصف اللون الأحمر والحجم الكروي فهو قادر على استبدال وصف بوصف من جنسه كاللون الأحمر بالازرق بل هو قادر على اضافة وصف لهذه الأوصاف كجعل للطماطم آذن وأنف وعينين كرأس الإنسان او جعلها تطير بجناحين.

فخيال الإنسان ما هو إلا إعادة تركيب خواص الأشياء التي جردها من الواقع لصناعة شيء جديد في ذهنه.

لذلك العقل البشري غير قادر على تصور شيء بوصف لم يشاهده من قبل فلو طلبت من أحد تصور شيء موجود في لا مكان فلا يمكنه ذلك أو تصور شيء موجود في كل مكان فلا يمكنه ذلك إلا بتكراره.

الرياضيات تستعمل هذه الخواص التي جردها البشر من الواقع لكن التي تضيف عليه هو تصور امكانية وجود غير الموجود متى عرف ضده فإن كان الوجود يمكن تصوره فالرياضيات قادرة على تصور العدم افتراضيا لكنها لا تعرفه إلا بنفي الوجود فما هي المجموعة الخالية ؟ هي عدم وجود نوع من الاشياء لكن تصر ذلك مطلقا غير ممكن.

العقل الرياضي قادر على تصور الاعداد الحقيقية رغم أن البشر لا يمكنهم إدراكها جميعها لكن التفكير البشري أضاف على ما هو موجود امكانية تكراره بدون توقف فصنع المالانهاية ثم أضاف التنوع فمتى كان هناك الصفر والواحد فلما لا يكون هناك شيء بينهما.

فالعقل البشري قادر على ملئ الفراغات وهذا الذي تستخدمه الرياضيات لصناعة كائنات لا يمكن للعقل البشري تصورها فالاعداد الحقيقية ما هي إلا ملا فراغات.

بل حتى العدد التخيلي i في بدايته ما كان إلا ملأ فراغ فقد تصورنا وجود حل للمعادلة $x^2+1=0$.

فرض وجود غير الموجود متى رأينا موجودا آخر من جنسه هي قدرة زائدة في العقل البشري على مقدرته على التخيل.

فالإنسان قادر ان يفرض وجود لون غير الألوان المعروفة ويتعامل معه كموجود لكن هل يمكنك أن تتصور لونا جديدا لم يكن موجودا من قبل ؟ .... حاول إن استطعت.



وهذا الذي حدث في الفضاءات الشعاعية عموما والهلبرتية خصوصا فهل يمكننا تصور فضاءات بأكثر من ثلاث أبعاد ؟

تخيلها غير ممكن لكن فرض وجودها ممكن فالعقل الرياضي متى رأى جنس الابعاد عمم ذلك بل الفيزياء تعمل بذلك كنظرية الحبال في 12 بعدا.

العقل الرياضي محرر عن قيود الخيال البشري فالبشر يجرد الواقع ثم يتخيله بتركيبات مختلفة ثم يتضور وجود أوصاف أخرى من جنس ما جرده من أوصاف الواقع وهنا يدخل في التجريد الرياضي.

في الحقيقة تدريس الرياضيات يمر بهذه المراحل الثلاثة فنعلم الطفل العد بالقريصات ثم ننزعها في الواقع ونتركه يعد بتخيلها أو تخيل أشياء أخرى مكانها ثم ننزعها تماما فيعد بالتجريد دون المرور بها.

الرياضيات وليدة قدرات العقل البشري على تجريد الأوصاف.









ما الفرق بين الثابت و المتغير و قيمة من قيمه والمجهول والوسيط ؟

لا فرق بين الثابت والمتغير كل ما في الأمر هو نظرتنا للمسألة و ايضا مسألة مكممات

الفرق بين المتغير و قيمة من قيمه كالفرق بين خروف و هذا الخروف، فالمتغير رمز شائع في جنسه يصح اطلاقه على أي قيم من قيمه بالبدل لا بالشمول أي اذا أخذ قيمة أحد قيمة لم يمكنه أخذ أخرى معها لكنه يمكنه أخذ أي قيمة يريد منها فهو عموم بدلي لا شمولي.

أما الفرق بين المتغير و المجهول فكالفرق بين المكمم العمومي و الوجودي، فالمتغير رمز لأي عنصر من مجموعة فهو يمثل جنس العناصر كأن نقول الخروف ذيله طويل ، فهذا صالح لكل خروف لكن إذا قلنا هذا خروف ذيله طويل فهو معين، إذن المتغير رمز بدلي.

أما المجهول فهو رمز لعنصر يحقق خصائص في مجموعة فهو رمز وجودي لكن نجهل تعيينه.

لذلك نستعمل المتغير في الدلالة على سوابق دالة لأن السابقة عنصر من مجموعة تطلق على أي عنصر منها عنده صورة بالدالة فالمتغير عنصر بدلي.

أما المجهول فنستعمله للدلالة على العناصر التي تحقق خاصية كمعادلة فهو عنصر وجودي.

أما الوسيط فهو متغير ثان فرياضيا لا يوجد فرق بينه وبين المتغير الا اننا سميناه وسيطا لانه عادة له دور مختلف عن المتغير في التطبيقات اذ يرى كأنه متغير في عبارة الصيغة لا في نتيجتها

مثال ذلك عندما نكتب $f(x)=a\,x^2+k\,b\,x+k\,c$ حيث k وسيط

فرغم أن هذه الدالة رياضيا ما هي الا دالة بمتغيرين: $f(x,k)$

فإننا نراها كذلك دالة كدالة كثير حدود من الدرجة الثانية احادية المتغير اذا صغناها

بشكل $f(x)=a\,x^2+(k\,b)\,x+(k\,c)$ فيلعب k هنا دور متغير في حدود كثير الحدود

الخلاصة :

المتغير رمز لعنصر كيفي من مجموعة يمكنه أخذ أي عنصر منها على سبيل البدل لا الشمول.

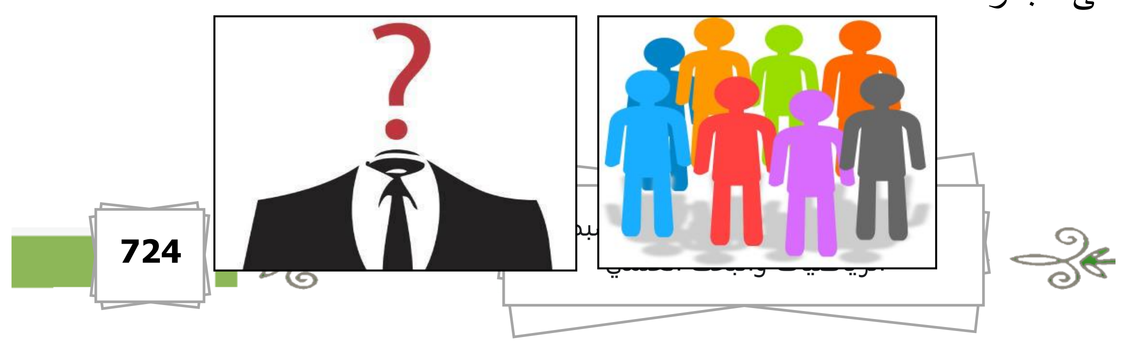
أما قيمة المتغير فهو تعيين عنصر من المجموعة يصدق عليه وصف الرمز.

أما المجهول فهو رمز وجودي لعنصر يحقق خصائص معينة من مجموعة

أما الوسيط فهو متغير ثان فرياضيا لا يوجد فرق بينه وبين المتغير

التلميذ: إذا كان المتغير هو رمز لعنصر كيفي من مجموعة يمكنه أخذ أي عنصر منها على سبيل البدل لا الشمول، فهل يوجد مصطلح آخر يحقق نفس المفهوم مع إجراء تعديل ونقول على سبيل الشمول لا على سبيل البدل؟

الاستاذ: ذلك يسمى مجموعة.



لنضبط الرياضيات معا : عندما لا يفرق التلميذ بين عبارة الدالة والدالة

لماذا نقول عن دالة مثل دالة الجذر التربيعي ل x أنها مستمرة على R^+ وهي غير معرفة عن يسار الصفر ؟

الجواب على هذا يقودنا للعودة لتعريف الدالة كتطبيق ثم كعلاقة بين مجموعتين A و B مثلا فنلاحظ أن تعريف الدالة متعلق بمجموعة البدء A لذلك لا يوجد معنى لدراسة دالة عرفناها على A على مجموعة أكبر منها M فالكثير يخلط بين الدالة وعبارة الدالة فإذا رأى أن عبارة الدالة مثل العبارات الجبرية مثلا تصلح في بنية جبرية أكبر M ظن أن الدالة هي نفسها على B وهذا خطأ من عدة نواحي:

التوسيعات الجبرية ل A لا تنتهي فعندك C أكبر من R و الرباعيات أكبر من C و حقل الدوال توسيع ل R فلو ذهبنا ننظر في التوسيعات فلن ينته الأمر كما أن التوسيع ممكن بأكثر من طريقة فهو غير وحيد.

كما أن تمديدات الدالة غير منتهية كذلك فأي دالة معرفة على A يمكن تمديدها بعدد غير منته من الدوال على M إن كانت M غنية بالعناصر فما الذي يمنع تمديد الدالة الجذر التربيعي على R^- بعبارة الجذر التكعيبي ؟ أو ببساطة الجذر التربيعي للقيمة المطلقة ؟

الدالة المعرفة على A هي ليست الدالة المعرفة على M ، وكتمثيل عندما نعرف الدالة f على R^+ بعبارة x^2 فهي ليست الدالة g المعرفة على R بعبارة x^2 .

فالدالة في الأصل مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي فمتى غيرت مجموعة البدء فالجداء الديكارتي يختلف.

أما عبارة الدالة فهي مجرد طريقة بنائية معرفة جيدا لتعيين صور الدالة انطلاقا من سوابقها كالعبارات الجبرية والنهايات والتكامل لذلك عبارة الدالة غير وحيدة فالجذر التربيعي ل x هو نفسه الجذر الرباعي ل x^2 على R^+ .

ومثلا الدالة الأسية لها أكثر من عبارة منها نهاية لسلسلة مجموع ومنها نهاية بسيطة لقوة.

لو نظرنا للخلل في هذا الموضوع لوجدناه نابع من عدم دراسة نظرية المجموعات وعدم ضبط المفاهيم الأولية أو عدم استحضارها كمفهوم الدالة من الناحية المجموعاتية.



لنضبط الرياضيات معا : مسألة اليمين واليسار في R

البعض يسأل متى نتكلم عن اليمين وعن اليسار في النهايات والإستمرار والإشتقاق ؟

الجواب : المسألة أبسط من هذا بكثير ولفهمها نعود لتعريف الدالة فالدالة في الأصل علاقة من مجموعة نحو مجموعة فهي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي.

دراسة خصائص دالة من حيث السلوك تقتضي دراسة هذا الجزء من الجداء الديكارتي من حيث التركيب ففي هذه الدراسة لا يهمنا ما يحدث خارج هذه المجموعة.

بتعبير آخر عندما ندرس دالة في R لا ننظر للمجموعة C بل لا يوجد معنى لذلك مثال ذلك الدالة المعرفة بالصيغة $f(x) = x$ على R فهي ليست نفس الدالة المعرفة بنفس الصيغة على C .

فالأولى مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $R \times R$ والثانية مجموعة جزئية من $C \times C$.

فالقاعدة سهلة جدا:

الدالة تدرس على مجموعة تعريفها ولا يهمك ما يحدث خارجها.

فإذا علمت ذلك فيمكن التطبيق بسهولة مثال ذلك:

الدالة الجذر التربيعي معرفة على R^+ لذلك تدرسها على مجموعة تعريفها فيمكنك دراسة الإستمرار عن يمين الصفر لأنه من مجموعة تعريفها لكن لا يهمنا ما يحدث عن يسار الصفر لأنه خارج مجموعة تعريفها.

لذلك نقول الدالة الجذر التربيعي مستمرة على R^+ ولا نقول هي غير مستمرة عند الصفر لأنها غير معرفة يسارا فهذا لا معنى له فلا أحد طلب منك النظر خارج R^+ ولا داخل مجموعة الأعداد المركبة C ولا داخل حقل الرباعيات ولا الثمانيات ولو فتحنا هذا الباب فلن تنتهي هذه المجموعات.

بل نقول الدالة مستمرة على R^+ وإنتهى الأمر فهي مستمرة عند الصفر لأنها مستمرة عن يمينه ولا ننظر ليساره فهي غير معرفة هناك.

يمكننا أن ندرس كذلك قابليتها للإشتقاق عند الصفر فهي لا تقبل الإشتقاق عند الصفر لعدم وجود العدد المشتق عن يمين الصفر لكن لا نقول لأنها غير معرفة عن يسار الصفر فهذا لا يهمنا.

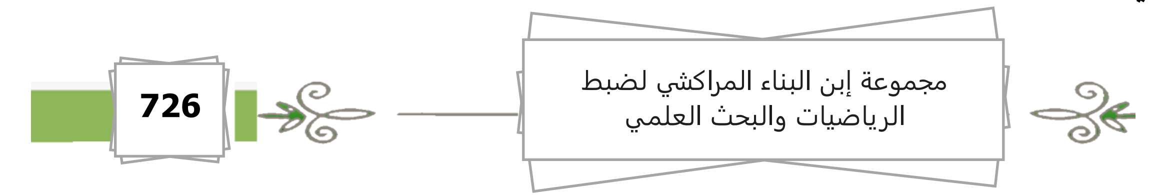
ننظر لمجموعة التعريف فقط.

وكمثال آخر الدالة القيمة المطلقة $|x|$ فهذه مجموعة تعريفها هي R لذلك ننظر الإستمرار عن يمين الصفر وعن يساره فالدالة معرفة عن اليمين واليسار فنجد أنها مستمرة.

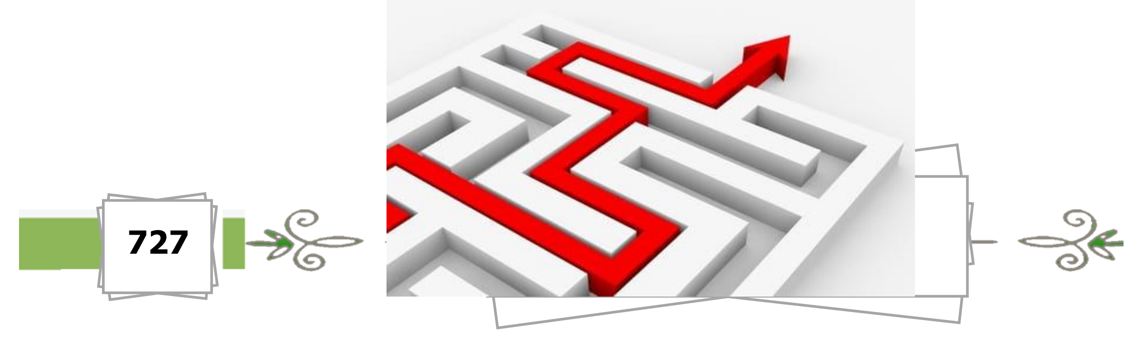
وهي غير قابلة للإشتقاق عند الصفر لأن العدد المشتق عن يمين الصفر لا يساوي العدد المشتق عن يسار الصفر فهنا ننظر لليمين واليسار لأن الدالة معرفة عن اليمين وعن اليسار.

فمسألة اليمين واليسار هي مسألة مسار فقط أيْ أيُ مسار ستسلكه الدالة لكي تصل للنقطة التي تريد دراستها إنطلاقا من مجموعة التعريف.

الحالة العامة في R عندك مسارين يمين وشمال إذا كانت الدالة معرفة يمينا وشمالا.



وقد يكون مسارا واحدا إذا كانت الدالة معرفة على مجال مغلق والدراسة تتم عند طرفيه.
أما في C فعدد المسارات غير منته وعموما مسألة المسار تظهر في فضاء نظيمي بسبب الأشعة وإتجاهاتها لكن نهتم دائما بمجموعة التعريف.
بصفة عامة كل خصائص الدوال تدرس على مجموعة التعريف فلا نقول الدالة الجذر التربيعي لا تنعدم عند الصفر لأنها ليست معرفة يسارا فهذا لا معنى له.
قد يسأل البعض لماذا نجد في التعاريف كتعريف الإشتقاق ذكر مجال مفتوح ، فالجواب عن ذلك لعدة أسباب:
بالنسبة للثانوي فالبرنامج يبسط المسألة للتلميذ لذلك لا يذكر الحالة الخاصة حتى يستوعب التلميذ والتعريف لا يمنع الحالة العامة لذلك هناك حالات نطلب فيها دراسة الإشتقاق عند طرفي المجال لرسم نصف المماس كالدالة الجذر التربيعي ل x^3 حتى نتمكن من توجيه المنحنى عند الصفر.
بالنسبة للمراجع الجامعية فنجدها قد تختلف فهناك من تتكلم عن الإشتقاق على مجال مغلق وهناك من تذكر الحالة العامة فقط لذلك قد نجد العديد من المراجع تشترط الدراسة على مفتوح لأن المبرهنات العامة تحتاج لذلك لكنها لا تنفي الإشتقاق على الحواف بل نحتاج ذلك في العديد من المبرهنات كالمبرهنة الأساسية للتحليل وقابلية الإشتقاق حيثما كان وغيرها من المبرهنات بل هناك ميادين خاصة بدراسة الدوال عند الحواف. يجب على المشتغل بالرياضيات فهم التعاريف وسبب صياغتها بطريقة دون أخرى مع ضبط نظرية المجموعات وغيرها من النظريات الرياضية فالتعاريف لا توضع من أجل التعريف إنما توضع لمغزى والصياغات قد تختلف من مرجع لآخر حسب الحاجة.
ولابد من كثرة الإطلاع، على أنه التعريف لا يمنع شيئا لأنه تعريف إنما هذه طريقة إدارية خالية من الفهم ففي الرضيات لا نتعامل هكذا مع المفاهيم إنما نقول التعريف خصص المسألة بهذا القيد لهذا السبب وذلك السبب .
فمثلا عندما نتكلم عن تكامل ريمان نشترط مجالا مغلقا $[a,b]$ فإذا قلنا لماذا لا نحسب تكامل ريمان للدالة الجذر التربيعي ل x^2-1 على المجال $[-5,5]$ فالجواب لا يمكن لأن التعريف يشترط أن تكون الدالة معرفة على جميع المجال لأن تكامل ريمان يعتمد على تجزئة المجال وحساب مجاميع ريمان الذي نحتاج لحسابه قيمة الدالة عند كل تجزئة فلابد من أن تكون الدالة معرفة على المجال كله.
فهنا نعلل السبب ولا نكتفي بالقول لأن التعريف يمنع ذلك !!
التأمل في التعاريف وفهم سبب صياغتها بطريقة دون أخرى جزء من الرياضيات بل هو أصلها فلا يمكن تطبيق تعريف دون فهمه.



لنضبط الرياضيات معا

هل عندما ندرس نهاية دالة عند نقطة من حواف مجال تعريفها بحيث لا تكون معرفة عندها فنحن ندرس خاصية للدالة خارج مجموعة تعريفها ؟

مثال ذلك الدالة $f(x) = sin(x)/x$ المعرفة على المجال $]0,1]$ فهي تقبل نهاية عند 0 وتساوي 1 فكيف خرجنا على مجموعة التعريف ؟

لتمحيص،المسألة لابد من التدقيق هنا : فالطبولوجيا المستعملة هنا هي ليست طبولوجيا الأثر فهذه النهاية ليست خاصية للدالة إنما خاصية مشتركة بين مجموعة نقاط الدالة والمجموعة الأم.

ولو غيرنا طبولوجيا الام دون تغيير طبولوجيا الأثر سنلاحظ أن النهاية تتغير وسنجرب ذلك

فلنغير طبولوجيا الوصول أي نترك f تنطلق من R بالطبولوجيا المعتادة ونغير طبولوجيا الوصول بالطريقة التالية.

نغير ترتيب 1 بـ 5 فنقلبهما فنضع ترتيبا 1 مكان 5 و5 مكان 1 فيصبح المجال $[0,5]$

لا يشمل الواحد بل يساوي بالمجالات المعتادة $[0,1[\cup \{5\}$

عند هذا تصبح النهاية $Lim\ sin(x)/x = 5$ وليس 1 .

فنلاحظ أن قيمة النهاية تغيرت رغم اننا لم نغير الدالة ولا طبولوجيا الأثر على مجموعة التعريف.

فهنا النهاية هذه ليست خاصية للدالة إنما هي خاصية لتوزيع نقاط الدالة في المجموعة الأم وهذا يعرف بسبب أننا أدخلنا شيئا زائدا عن الدالة وهي نقطة خارج مجموعة تعريفها وطبولوجيا أكبر من طبولوجيا الأثر ففي الحقيقة نحن ندرس من حيث القيمة خاصية مشتركة بين الدالة والمجموعة الأم.

لذلك عند دراسة خاصية الدالة فقط من هذه الناحية نتكلم عن الدوال الكوشية لا عن النهاية خارج مجموعتها فالخاصية الكوشية تتعلق فقط بالدالة ولا تدخل عنصرا جديدا في التعريف.





لنضبط الرياضيات معا

عدد، شعاع، قياس، مسافة لما كل هذه المفاهيم في الرياضيات ؟

إن العقل البشري بطبيعته يفرق بين الأشياء بالخصائص والمقارنة فهو لا يكتفي بتشبيه الأشياء بل حتى في مواطن الشبه يقارن بينها فقد يبدو من الطبيعي أن عشر خرفان أكثر من خمسة وان الشمس أكثر توهجا من القمر لكن العقل البشري بمقدرته استطاع تجريد هذه المقارنة عن طريق العدد،

كيف ذلك ؟ العقل البشري يقوم بتجريد الخاصية ثم تكميمها والتكميم يقوم على الترميز إلى تكرار معين برمز فعدد الخرفان مثلا ما هو إلا رمز لتكرار وجود مضبوط كلما تقابل تكرار مع تكرار فخمس خرفان يقابلها خمس بقرات فهذا ما يسميه البشر بالعدد.

لكن العقل البشري لم يلجأ لهذا التكميم إلا للمقارنة ذلك أن البشر يعيش في كون متغير وقياس هذا التغير يحتاج لمقارنة كميات أي اعداد.

فالغرض الأول من العدد هو المقارنة إذ كيف نحسب الزمن إن لم نقارن عشر ساعات بتسع وكيف نحسب السرعة إن لم نقارن المسافة بالزمن ؟

فكل الرياضيات بنيت على الأعداد والمقارنات والعدد مبني على التكرار لكن مقارنة الأشياء تعود إلى مقارنة الخصائص أو كمياتها فكيف نميز الإلكترون إن ام نحسب شحنته وزنه....

المشكلة في الخصائص أنها متنوعة فإن كان الوجود سهل العد كخمس قطط وست أبقار فوضع عدد واحد على شيء له خصائص متعددة ليس بالأمر السهل فكيف نعبر على طول وعرض منزل إن لم نستعمل عددين ؟ فهذا ما نسميه التنوع أي أعداد تمثل تكرار لخصائص متعددة وهذا ما يعطي مفهوم الفضاء الشعاعي في الرياضيات.

الشعاع ما هو إلا تكرار متنوع فهو عدد موجه والجهة تمثل النوع وقد تكون هذه الأنواع متجانسة متعلقة ببعض كالشمال والجنوب واليمين واليسار فتصنع ما يسمى بالفضاء الإقليدي وقد تكون غير متعلقة ببعض كوزن وشحنة الإلكترون.

لكن العدد وحده غبر كاف للمقارنة فالعدد ينفع في المقارنة بين العناصر لكن ماذا يحدث إذا كان التكرار غير منته ؟ فلا معنى للعدد هنا وقولنا غير منته يقابله في الطبيعة الأعداد الكبيرة فهل سنعبر على شحنة بطارية بعدد الإلكترونات فيها ؟ فهذا غير ممكن لكبر هذه الأعداد.

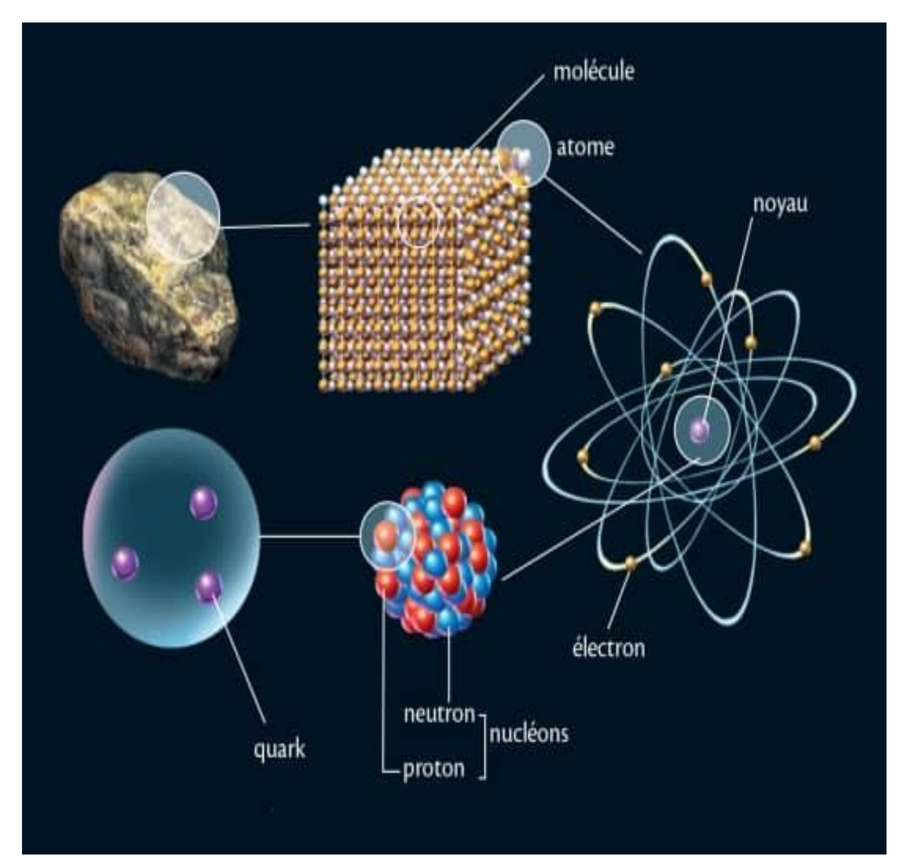
الرياضيات حلت هذا المعضل بمقارنة المجموعات بواسطة القياس فالقياس هو تكميم مجموعات فنقارن مجموعة بمجموعة وهذا الذي نقوم به في المساحة فنقارن السطح بتكرار المربعات فيه.

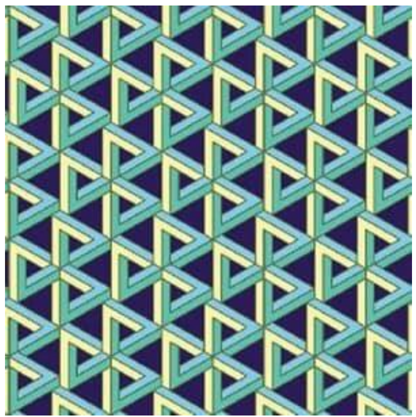
العقل البشري لم يتوقف عند هذا الحد بل قارن حتى المقارنة فكيف نقارن بين ثلاث عناصر ؟ الجواب على هذا بالمسافة فالمسافة تكميم للمقارنة ذاتها بين عنصرين فيكفي لمقارنة ثلاث عناصر بمقارنتها مثنى وإعطاء عدد لكل مقارنة ثم مقارنة هذه الأعداد مع بعصها.

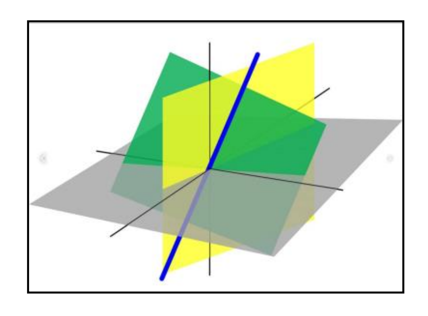


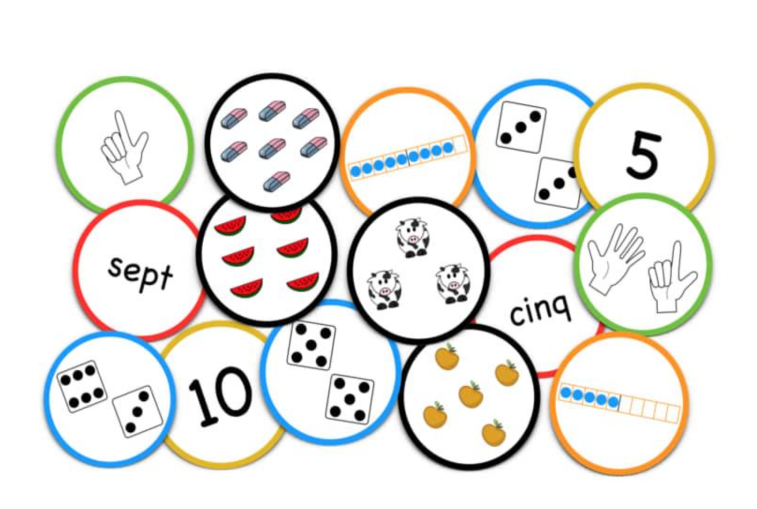
بما أن الكون مبني على التكرار : ذرات، جزيئات .... كانت طريقة تكميم التكرار مع دراسة تغيره بالمقارنة كفيلة لوصفه رياضيا ، فنلاحظ من هنا الإرتباط الوطيد بين الرياضيات والواقع.

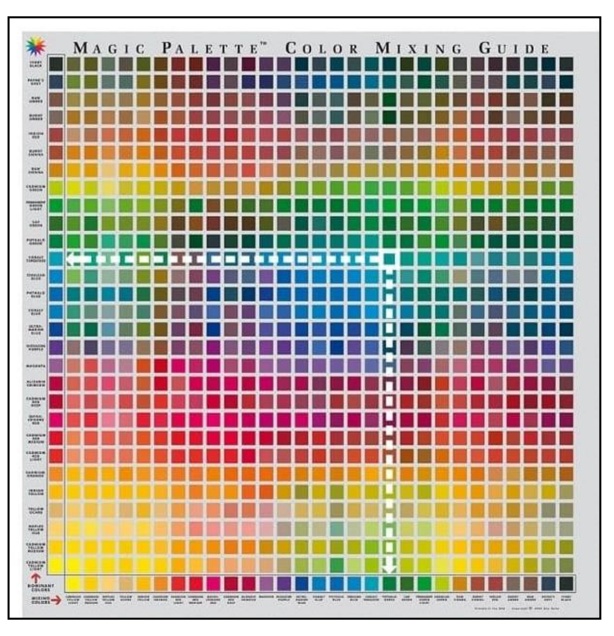
فالرياضيات تجريد لمفهوم تكرار الوجود والتغير فيه.













ما هو سبب ضبط الرياضيات ؟

الرياضيات علم مضبوط والمقصود بذلك أنه لا يختلف إثنان في صحة براهينها متى حررت ذلك أن طريقة بنائها متعارف عليها.

إن كانت الرياضيات وغيرها من العلوم تجتمعان في كونها تبنى على قواعد متعارف عليها فتبقى البراهين الرياضية محل إتفاق بين الرياضياتيين على خلاف ما نراه في العلوم الأخرى.

ففي الفيزياء مثلا نجد النظرية النسبية وميكانيك الكم يختلفان في طريقة البناء وتفسير الواقع بل في النتائج.

وكلما تقدمنا نحو علوم مثل الأدب والإجتماعيات نجد هوة الخلاف تتسع فما سبب ذلك ؟

الرياضيات لا تكتفي بوضع قواعد لبنائها بل تضيق على ما يستعمل لبنائها بما تسميه المسلمات وتضيق في طريقة البناء فلا تدخل فيها الذوق البشري.

وهذا ما نسميه في الرياضيات بالتجريد فهي تفصل تماما كائناتها عن الواقع وبما فيه البشر، فلا تترك فيها إلا مسلمات وطريقة الربط بينها أو ما نسميه البرهان المنطقي.

فمتى اتفقت مجموعة من البشر على ما تستعله للبناء وتحدد نوعه بشكل منته وتحدد طريقة جمعه فمن المعقول أنه لا يمكنها أن تختلف بعد ذلك.

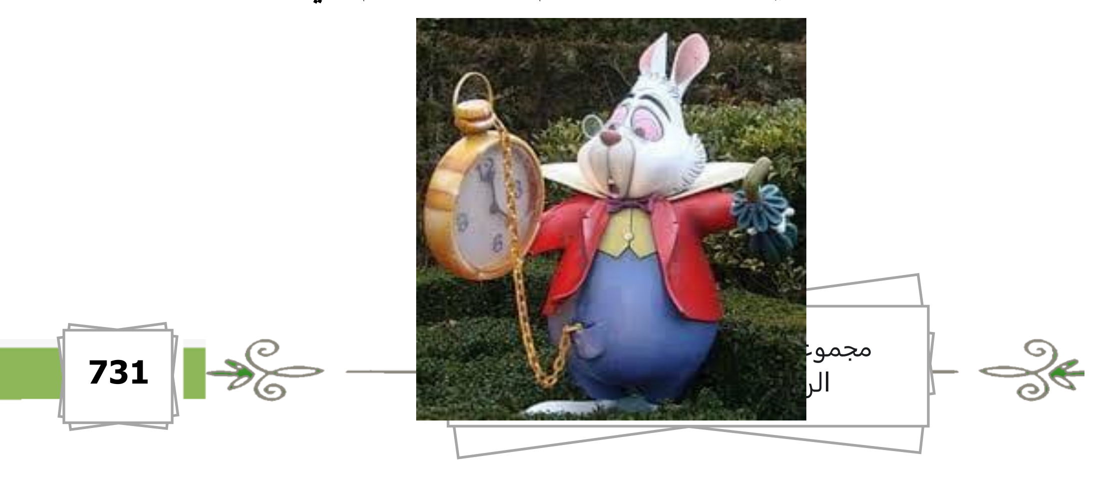
لذلك الخلافات الرياضية نجدها في الأمور التي تبنى عليها لا في البراهين كاستعمال مسلمة الإختيار ومبدأ الثالث المرفوع. أما إذا ذهبنا للعلوم الأخرى كالفيزياء مثلا فنجدها متعلقة بالواقع وبمراقبة البشر للواقع وبما أن البشر لا يحيط بالواقع فقد ترك بابا مفتوحا لأخطاء المراقبة.

لذلك اختلف ألبرت أينشتاين مع نيلس بور في ما يمكن لنظرية فيزيائية وصفه، هل هو الموجود فعلا كما يظنه أينشتاين أو ما يراقبه البشر من تأثير الموجود على المراقب كما يراه نيلس بور.

ولو ذهبنا للعلوم الأدبية كالعربية فنجدهم يختلفون في الفاعل والمفعول والشعر وبحوره لكنهم يتفقون أن أصل هذا كلام العرب إلا أن فهم كلام العرب وأسبابه يمر على العقل البشري الذي يجتهد فيه ومن هنا يأتي الاختلاف. فالرياضيات ما تفعله هو تضييق مصادرها فتضبط نفسها بذلك أي أنها تقلل من التعقيد بعكس العلوم الأخرى فهي أكثر تعقيدا من الرياضيات لأنها تستقي ما تبنى عليه من الواقع فلبناتها متغيرة بتغير ما نكتشفه من الواقع وإذا لم تحدد المصادر أو لم تضبطها فالإختلاف سيأتي من ذلك.

فضبط الرياضيات أصله فصلها عن الواقع وهي بذلك أقل تعقيدا لا كما يظنه البعض.

لذلك قال نيومان : الناس لا تعتقد أن الرياضيات سهلة لأنهم لا يدركون كم هي الحياة معقدة.



التجريد الرياضي وعصر المعلوماتية : العملة النقدية بيتكون نموذجا

لقد ذكرنا في مواضيع عديدة أن البناء الرياضي صنع من فكرة الوجود المتمثلة في المجموعة الخالية والروابط بين الكائنات إنطلاقا من ربطها ببعضها فهذا ما نسميه نظرية المجموعاتZFC .

هذه الأفكار البنائية جردتها الرياضيات من الواقع عن طريق تجريد خصائص على شكل روابط.

فالعدد مثلا ما هو إلا تكرار للوجود فعندما نقول ثلاث تفاحات فهي وجود مع وجود مع وجود.

فالعدد ثلاثة ما هو إلا رابط بين شيء وشيء وشيء بتمييزهما عن الباقي.

الرياضيات عممت فكرة الروابط عن طريق أصناف التكافؤ فصنف التكافؤ ما هو إلا عناصر لها نفس الخاصية فالرياضيات تعطي وجودا لهذه الخاصية وتتعامل معها ككائن ، العدد الحقيقي مثلا هو صنف تكافؤ متتاليات كوشية.

مع ظهور العلوم المعاصرة اتبع البشر نفس الطريقة في تجريد الخصائص في علومهم فاعطوها وجودا وبهذا قاموا بشيئين:

تكميمها فامكن دراستها رياضيا كالنظريات الفيزيائية.

تحريدها لتصبح معلومات فأمكن تصورها والتحكم فيها معلوماتيا.

فكيف يمكن لبرنامج ان يسير بيع وشراء سلع إلا باعتبارها مجرد معلومات من حيث الكم والوصف : خمس سراويل زرق، 100 هاتف احمر بثمن للوحدة....

فالسلعة ما هي إلا كائن بأوصاف فيمكن فرزها بلونها وثمنها ونوعها.....

يمكننا أخذ مثال يبين قوة التجريد وهي العملة:

فالأصل في الماضي أن عملتهم الذهب والفضة و ذلك **لأمور:**

الأمر الاول : فائدة الذهب والفضة إعطاء قيمة ثمنية تكمسمة لسلعة فيمكن مقارنة سلعة مقابل سلعة فهما سعر مرجعي للسلع.

الثاني : الندرة مع الكثرة فلا يمكن لأحد ان يدخل في السوق كمية زائدة من الذهب والفضة تفسد مقارنة السلع ببعضها لأن الغرض هو ان تبيع سلعة ثم تشتري بثمنها سلع أخرى فالعملة مجرد وسيلة تكميمية لثمنية السلع.

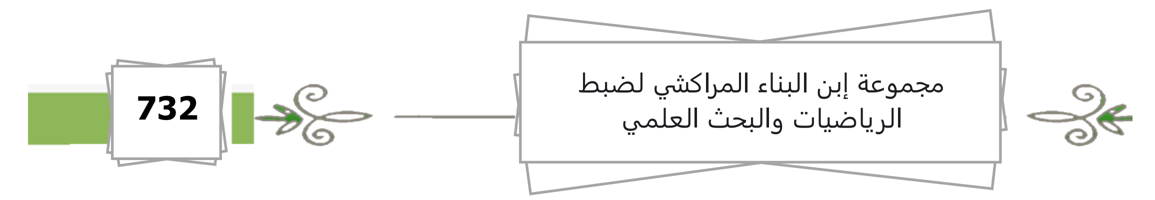
والكثرة بتوفرهم بشكل كاف وبقطع صغيرة لقياس ثمنية أي سلعة.

الثالث : قابلة الزيادة للسير مع زيادة السلع أي نمو الإقتصاد وذلك عن طريق التنقيب عن الذهب والفضة في المناجم.

فإذا جردنا هذه الأمور أمكننا تعويض الذهب والفضة بكل شيء له نفس هذه الخصائص.

لذلك استعمل في الماضي الملح كثمن للمقايضة لندرته قبل أن يستخرج من ماء البحر .

أما اليوم فجردت هذه الخصائص بالعملة الورقية ذاك أن العملة الورقية:



يمكن تثمين السلع بها

نادرة من حيث صعوبة تزويرها وتحكم البنوك فيها

متوفرة من حيث إمكانية طباعة البنوك لها.

يحب التنبيه إلى أن الإقتصاد يتوسع بنمو السكان فكان لزاما أن تكون العملة قابلة للزيادة حتى تغطي حاجة التثمين في الإقتصاد ليقابل المواليد الجدد من البشر.

وبما أننا وصلنا لعصر الرقمية حلت محل العملة الورقية العملة الرقمية.

فالندرة هنا مفتعلة بقوة القانون على عكس الذهب والفضة أين كانت نذرة وجود.

لكن ماذا يحدث مع البتكون فهو غير مسير من هيئة معينة ؟

البتكون من حيث البرمجة يحقق هذه الخصائص التجريدية:

من حيث الثمنية العددية و الندرة والنمو فهو يزيد بنسبة متضائلة عبر الزمن وهذا ما يفسر غلاءه فالزيادة لا تغطي نمو الإقتصاد.

ومن الملاحظ أن ازمات عالمية تحديث بسبب الخلل في هذه الخصائص التجريدية سواء بطباعة النقود أكثر من اللازم فيخل شرط الندرة أو من حيث الربا فيخل لك شرط الكثرة لتغطي العملة إقتصاد السوق و كذاك بتوقف العملة عند بعض رؤوس الاموال فيخل شرط الكثرة كذلك.

هذه الطريقة في تجريد الخائص وجعلها معلومات هي التي ولدت النهضة الرقمية المشاهدة في العشرين سنة الماضية.

إذ كيف تستطيع قراءة هذا المقال إن لم نجردك كمشارك بخصائص حساب رقمي ونجرد إجتماعنا بمسمى المجموعة التي انتميت إليها ونجرد الكتابة بمقالات ومنشورات.

التحريد الرياضي تعدى الرياضيات ليدخل في جميع العلوم وأوجها المعلوماتية والرقمية فأصبح التسيير يتم عبر الخصائص لا الأشياء.








عصر المعلوماتية وليد نظرية المجموعات ZF .

الرياضيات المعاصرة قائمة على نظرية المجموعات فلو تأملنا الأعداد الطبيعية لوجداها مبنية من المجموعة الخالية فالصفر هو: $\varnothing$, الواحد: $\{\varnothing\}$, الإثنين: $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

فكما نلاحظ الأعداد تعبر عن كمية تكرار فنحن نكرر وجود المجموعة الخالية لصناعة الأعداد.

أما الأعداد الصحيحة فهي معرفة عن طريق علاقة تكافؤ على $N \times N$ فهي ثنائيات فهي كذلك مجموعات والمجموعات تكرار عناصر.

وهكذا مع الأعداد الناطقة والعشرية فهي مجموعات على مجموعات.

وكذلك العمليات والدوال فهي علاقات يمكن التعبير عليها بمجموعات جزئية من الجداء الديكارتي $(x, f(x))$ فالجمع ضم تكرار لتكرار والضرب تكرار تكرار فكل هذا يعود لتكوين مجموعة من مجموعات. هنا نلاحظ شيئا مهما أنه مهما كانت الخاصية الرياضية فيمكن كتابتها عن طريق مجموعات فالرياضيات تصنع الكائنات الجديدة عن طريق توليد مجموعات جديدة بروابط داخلية بين مجموعات.

هذه الطريقة تجريد لكيفية بناء المادة في الكون فالذرة مكونة من جسيمات والجزيئات من ذرات والمادة من جزيئات والكائنات من مواد.

الرياضيات تجريد لهذه الطريقة في البناء لتصبح روابط بين عناصر عن طريق المجموعات .

هذه النظرة تقودنا للإعلام الآلي فالإعلام الآلي ما هو إلا تسجيل لمعلومات فكل البيانات والعمليات المعلوماتية هي مجرد كتابات بالصفر والواحد.

في الحقيقة الرياضيات عن طريق المجموعات اخترعت طريقة لتحويل الخصائص إلى بيانات يمكن كتابتها على شكل مجموعات وهذا الذي فتح الباب على مصراعيه لظهور الإعلام الآلي.

فالرياضيات تحول الخصائص إلى معلومات يمكن تشفيرها عن طريق مجموعة معينة.

الإعلام الآلي تبنى نفس الطريقة عن طريق التعبير على أي معلومة بمجموعة مكونة من تداخل مجموعات مكونة في النهاية من الصفر والواحد.

فالبرمجة التي تتم عن طريق أحرف في النهاية تترجم أحرفها إلى مجموعة بيانات من الصفر والواحد.

يمكننا أن تقول أن الإعلام الآلي ما هو إلا الجانب العملي للرياضيات وأن الرياضيات ما هي إلا نظرتنا التجريدية للواقع.







الحضارة المعاصرة قائمة على نظرية المجموعات ZFC

مسلمات ZFC هي ما شاهدناه في الواقع وجبل عليه العقل من عمليات بسيطة وهي:

-الوجود وترجم بوجود المجموعة الخالية

-التمييز و هو تمييز شيء أو أشياء عن غيرها فترجمناه بصناعة مجموعة من عنصر ومجموعة جزئية من مجموعة

-التركيب : وترجمناه بإتحاد المجموعات

-الربط وهو الإختيار البسيط : وترجمناه بالجداء الديكارتي

-الإختيار المطلق : وترجمناه بمسلمة الإختيار.

كل العمليات التي يقوم بها العقل البشري على الواقع تنطلق مما سبق كالمقارنة فهي من الربط والتفكيك فهو عكس الاتحاد والتقريب فهو نوع من الربط والمقارنة، والبناء هو خليط من التمييز والتركيب.

فمسلمات ZFC هي ترجمة للعمليات البسيطة للبناء الكوني ولذلك تستعملها الفيزياء عن طريق المبرهنات الرياضية طمعا في تفسير البناء الكوني من عمليات بسيطة.

ولذلك الفيزياء الحديثة مرتبطة جدا بنظرية المجموعات ZFC فالنظرية النسبية ممثلة رياضيا عن طريق هندسة غير إقليدية وتستعمل الهندسة التفاضلية وهذا يحتاج لبناء رياضي متعلق بالطبولوجيا والفضاءات الشعاعية الذين بدورهما نتيجة لمسلمات بسيطة من ZFC منها المقارنة عبر المجموعات وهذه الطبولوجيا والتفكيك والتركيب عبر الجداء الديكارتي وهذا الجبر ثم التقريب وهو خليط بينهما.

أما ميكانيك الكم فيحتاج لفضاءات هيلبرت وهي كذلك تحتاج للطبولوجيا والجبر.

وكذلك النظام الإعتيادي وبوزون هيج فهو مبني على زمر لي وهو خليط من كل ما سبق.

بل الأمر يتعدى ذلك للإعلام الآلي فالنظرية المعلوماتية مبنية على المنطق الرياضي الخوارزمي.

وكذلك علم الإحتمالات والإحصاء.

ولا يوجد علم اليوم لا يستعمل المبرهنات الرياضية المبنية علىZFC .

إن قوة العلم الحديث التي نراها اليوم هي نتيجة لنظام المسلمات ZFC فهو من سرع هذه الإكتشافات ومكننا من فهم الواقع المعقد التركيب والنظر إليه كمجموعة جزيئات بسيطة مترابطة عقدها كثرتها وتكرار الترابط فيها.



الرياضيات مبنية على الانتظام والتفرد

الرياضيات تحاول تبسيط الظواهر الطبيعية قدر ما أمكن ذلك أن تفكير البشر مبسط والبشر يؤمنون أن هذا الكون قائم على قواعد بسيطة.

لذلك الذي تقوم به الرياضيات مقارنة الكائنات الرياضية بكائنات بسيطة وهذا ما نسميه الانتظام فنقرب الدوال بدوال خطية وبكثيرات حدود مثلا.

وفي الجبر نحاول إرجاع المعادلات لمعادلات خطية ما استطعنا.

عادة عندما نبحث عن قانون عام لظاهرة كونية فنحن نفرض أن الحالة يمكن التعبير عليها بصيغ مألوفة وهذا غير ممكن إلا بفرض الانتظام.

رغم ذلك هناك ظواهر كونية تخرج عن المألوف كالثقوب السوداء مثلا أو كتغيير المسار لجسم مثلا فهذا ما يسمى التفرد أو الشذوذ.

فالتفرد يظهر في الرياضيات عن طريق الشذوذ أو ما نسميه النقاط الشاذة وهي نقاط لا تخضع للسلوك العام للكائن كالذروة للمنحنيات فالمنحنى يغير في اتجاه الرتابة وكالمالانهاية مثلا التي تظهر في النهايات.

وأحيانا الرياضيات تجمع بين المفهومين فمثلا تكامل ريمان يستعمل مفهوم الانتظام عبر الاستمرار حيثما كان للدالة القابلة للمكاملة ويهمل نقاط التقطع والتي تعتبر نقاط شذوذ أو تفرد.

لو نظرنا لفضاءات هلبرت نفسها فسنرى أنها قائمة على مفهوم الانتظام فهي تحاول دراسة الدوال عبر جداء سلمي ودوال خطية.

أما فضاءات باناخ فتتجه نحو الشذوذ إذ تعتبر الدوال كنهايات لسلاسل غير منتهية.

النقطة الصامدة مثلا يمكننا أن نراها كنقطة شاذة فهي من باب التفرد.

الاحتمالات والاحصاء هي نظرة انتظامية للحوادث.

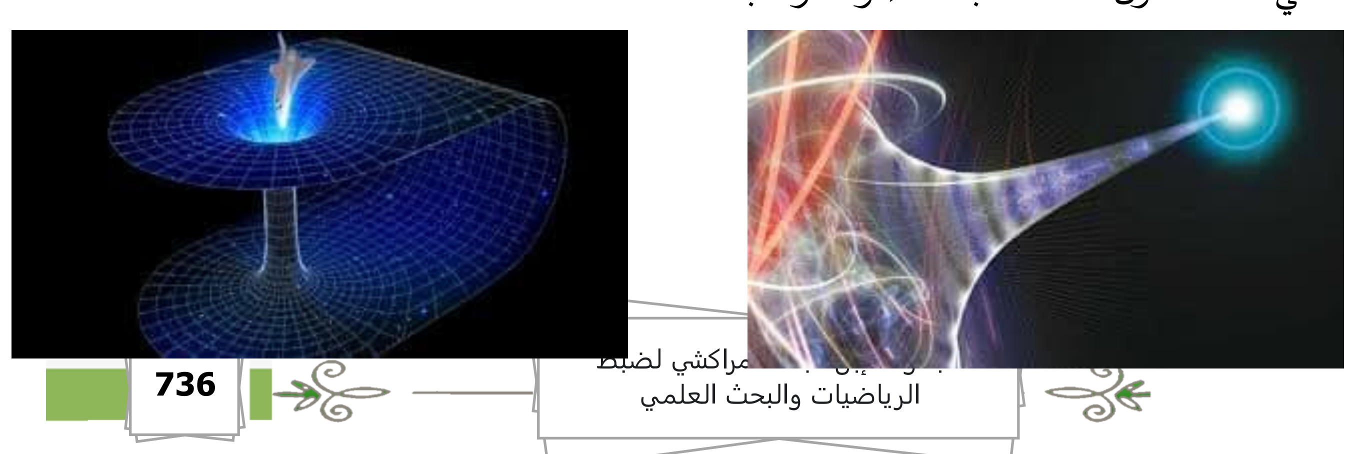
مسلمة الاختيار مثلا تنتج شواذا كالمجموعات غير قابلة للقياس ومفارقة باناخ تارسكي.

الدالة زيتا لريمان هي محاولة تفسير الأعداد الأولية بنظرة نظامية.

النظرية النسبية العامة مثلا فيها حلول تبين الانتظام كالجاذبية بين الكواكب عموما وحلول تبين الشذوذ كالثقوب السوداء.

والأمثلة كثيرة فالرياضيات كلها مبنية على النظرتين انتظام وتفرد.

نسمي عادة الحلول المنتظمة بالملساء والمتفردة بالشاذة.



البناء في الرياضيات

البناء الرياضي

المصطلحات الرياضية مبنية على مفاهيم لغوية لذلك لابد من التمعن في المعاني اللغوية للألفاظ حتى نتمكن من استيعاب المفهوم الرياضي المشتق منها.

ما هو البناء لغة ؟ البناء تشكيل شيء بواسطة تركيبه من عناصر أولية والربط بينها فبناء المنزل يكون من تركيبه من حجارة واسمنت.

والبناء في الرياضيات لا يختلف عن هذا فهو فرض كائن رياضي بواسطة فرض قضايا تعطيه خصائص فعندما نبني متتالية حسابية مثلا فنحن نفرض وجود تطبيق له مواصفات كذا وكذا فنحن نفرض خصائص ونركب بينها.

فرض الوجود والبناء شيء واحد فالبناء فرض كائن رياضي له خصائص معينة.

نظرية المجموعات مثلا هي مجموعة من الفرضيات نسميها مسلمات فنحن نفرض وجود المجموعة الخالية ونفرض امكانية صناعة مجموعة انطلاقا منها كعنصر وهكذا.

وكذلك الطبولوجيا فصناعة فضاء طبولوجي هي افتراض كائن له خصائص فهو تركيب مجموعة من الخصائص كوجود المفتوحات وما تحققه من قضايا.

وهكذا فالبناء في الرياضيات مسلماتي أي يتم عبر التسليم بوجود خصائص معينة ثم منها نبرهن وجود كائنات تنتج عن وجود هذه الخصائص التي سلمنا بها.

فمثلا وجود قاعدة لكل فضاء شعاعي هي نتيجة لتسليمنا بمسلمة الاختيار ولطريقة بناء الفضاء الشعاعي.



الحدس الرياضي بين الخطأ والصواب...

من منا لم يأته هذا الشعور عند قراءة مسألة رياضية ؟ فكرة تظهر فجأة من اللاوعي كحل صحيح للمسألة لكن نتساءل من أين جاءت وكيف نبررها ؟

الحدس ما هو إلى طريقة خوارزمية يستعملها العقل للوصول إلى تجارب سابقة إنطلاقا من بعض العلامات الظاهرة أمامه في تجربة معينة.

فالذي يحدث أنه كلما اكتسبنا مجموعة من المعلومات يصنفها العقل في الذاكرة الباطنية ويجعل لها مفاتيح، فإذا رأى العقل ما يشبه هذه المفاتيح ربط بينها وبين التجارب السابقة.

الحدس كعملة سلاح كحدين إذ هو يعمل بالتشبيه الجزئي لتجارب سابقة فقد يصيب وقد يخطئ لذلك تقوم الرياضيات بتصفيته عن طريق الكتابة الشكلية والتي تطلب من كاتبها تفصيل هذه الروابط المختصرة مع العلامات السابقة لتحويلها لعمليات منطقية تربط بالفعل النتيجة مع قضايا مثبتة مسبقا.

فالرياضيات لابد لها من الحدس لأنه وسيلة الإبداع فلا يكفي كتابة عشوائية على أوراق للوصول إلى نتيجة جديدة بل يجب إختبار أفكار وإختيار طريق وهذا لا يتم إلا عن طريق الحدس.

والرياضيات تحتاج كذلك لتصويب الحدس عن طريق التحرير والضبط بالكتابة الشكلية.

تنمية هذا الحدس عند الرياضي تتم عن طريق إكتسابه لتجارب في صناعة الرياضيات وهنا تلعب دراسة تاريخ الرياضيات وكيفية اكتشاف المبرهنات دورا مهما إذ يمكن استخدام أفكار قديمة لصناعة نتائج جديدة.

المشكل الذي نواجهه اليوم في التعليم الأكاديمي أنه لا ينمي هذا الحدس بشكل جيد إذ التلميذ لا يدرس تاريخ الرياضيات ولا يهتم بالتعاريف ولا طرق البرهنة بل يكتفي بحل التمارين فالحدس الذي يكتسبه هو حدس ميكانيكي بتشبيه التمرينات بدل الحدس البنائي والذي يربط طريقة الحل بأصل الكائنات الرياضية.

والذي يزيد المشكل تفاقما عدم تعويد التلميذ على تهذيب حدسه إذ عادة يكتفي بتشبيه سطحي للمسائل دون التعمق فيها ليعرف صوابها ظن خطئنا وهذا الذي يظهر لنا أناسا تظن أن: $1 \neq 0.999.....$

إذ حدسه يربط 0.99 بعدد ينقص جزءا عن 1 لكنه لا يهمل النقاط ... فلا يفكر في النهاية ولو هذب حدسه بتعريف صحيح لهذه الكتابة لعلم أن

$$0.999... = \lim \sum 9\ 10^{-n} = 1$$





الحدس الرياضي متصف بنقاء التجريد:

يا أستاذ لماذا نخطئ عند تصور الكائنات الرياضية وأحيانا لا نفهم كيف جاءت ؟

للجواب على هذا السؤال لابد من مقدمة، فما هو التجريد الرياضي ؟

إن الرياضيات علم تجريد فهو يعطي وجودا للخصائص التي تتصف بها الأشياء لتصبح كائنا في الذهن نعبر عليه بواسطة نظرية المجموعات ZFC .

فالتجريد كما يدل معناه اللغوي تنقية الشيء من جميع الشوائب فجَرَدَ الشيءَ يجرُدُهُ جَرْداً وجَرَّدَهُ: قشَره ونقول أرض جرداء لأنها منزوعة النباتات.

فعملية المرور من الواقع إلى الذهن تتم عن طريق نزع جميع الشوائب عن الخاصية التي نريد دراستها.

لذلك عندما نستعمل العدد 1 فهي صفة للتكرار فواحد ليس خشيبة ولا قريصة ولا بقرة إنما هو تكرار الشيء فلا يلصق به وصف آخر.

لكن صعوبة تصور الخاصية مجردة عن غيرها تدفع العقل البشري للتمثيل إذ لابد أن يربط العقل بين الخاصية وشيء ملموس وهذا ما يقع عندما نربط بين الواحد كعدد و 1 ككتابة للعد فعندما نقول 1 تتقدح في ذهننا الصورة."1"

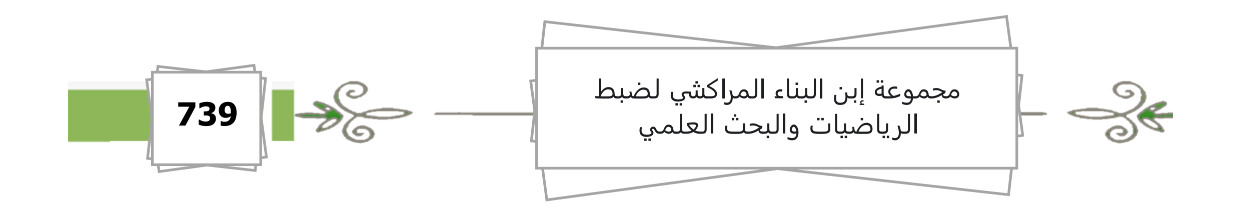
فمن أين تظهر أخطاء الكثيرين في تصور المسائل ؟

إن سبب الخطأ هو حدسهم المشوب بالشوائب ذلك أنهم لم يعودوا على تجريد الخصائص كما ينبغي بل أحيانا لا يجردونها أصلا ويتعاملون معها مخلوطة بصفات أخرى لا علاقة لها بمفهومها ومن هنا يأتي الخطأ إذ ينقلون الوصف من الشوائب نحو الخاصية المدروسة فيصفونها بما لا يصح به أن تتصف.

فالذي لا يفرق بين 1 كعدد وبين 1 كرمز متى مر إلى عدد مثل π لا يستطيع تصوره إلا بالمرور للكتابة العشرية $\pi = 3.14....$ وبما أنهم يرون أن الكتابة غير منتهية يصفون π بعدم الإنتهاء بل منهم من يراه غير محدود فيخلط بين العدد وعدم انتهاء كتابته وهذان مفهومان مختلفان فمثل هذا مثل من يخلط بين المسطرة كآلة قياس والسنتيمتر كوحدة طول والقطعة المستقيمة كمجموعة نقاط وطولها كقياس.

ومن الأخطاء التي عرضها البعض في هذه المجموعة عدم تقبل امكانية تعريف الدالة من مشتقتها إذ في ذهن المتصور يظن أن التعريف داخل مجموعة يمثل خلق كائن جديد لم يكن كائنا رياضيا مسبقا قبل التعريف وهذا خطأ.

فتعريف كائن داخل مجموعة هو مجرد تمييز له عن غيره من العناصر لكن الكائن موجود مسبقا لانه عنصر في المجموعة فعندما نطلب حل المعادلة الحقيقية $x^2 - 1 = 0$



فنجيب الحلول هي 1 , 1- فنحن لم نصنع أعدادا جديدة فهي لا تحتاج للمعادلة السابقة لتكون موجودة إنما كل ما فعلناه أننا أظهرنا علاقة هذه الأعداد بالمعادلة السابقة.

ونفس الشيء عندما نقول أن x^2 هي دالة أصلية ل $2x$ ف x^2 و $2x$ كثيران حدود موجودان ولا يحتاج أحدهما للآخر إنما كل ما فعلناه هو الربط بينهما برابط الدالة ومشتقتها.

ونفس الشيء عندما نعرف اللوغارتم بأنه الدالة الأصلية لمشتقته مقلوب x التي تنعدم عند 1 فهل اللوغارتم لم يكن موجودا ثم ولد من مشتقته ؟

الجواب هذا تصور خاطئ إذ الدالة الحقيقية هي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $R\times R$ وهذه المجموعات موجودة قبل أن نتصورها في أذهاننا منفصلة.

فكل ما فعلناه بالتعريف هو تمييز واحدة من هذه المجموعات بعلاقتها بأخرى فسميناها اللوغارتم.

منشأ الخطأ هنا هو زيادة شوائب على هذه التجريدات فيتصور أحدهم الدالة ومشتقتها كالحليب والزبدة أو كالأم وابنها وهذا خطأ في التصور إذ أضاف للمفهوم الأصلي شوائب منها الوجود الزمني فالجبن زمنيا لا يمكنه أن يوجد قبل حليبه والإبن لا يوجد قبل أمه بعكس الدوال فكلها موجودة مسبقا لأنها مجموعات جزئية من $R\times R$ وتعريفها هو تمييزها عن غيرها فقط لا إيجادها زمنيا فالرياضيات لا تتعلق بالزمن إنما الزمن مفهوم بشري.

لذلك نجد للوغارتم أكثر من تعريف فيمكن تعريفه كدالة أصلية لمقلوب x التي تنعدم عند 1 ويمكن تعريفه كالدالة التي تحقق $\ln(x * y) = \ln(x) + \ln(y)$ مع $\ln(e) = 1$

ويمكن تعريفه كدالة عكسية للدالة الأسية

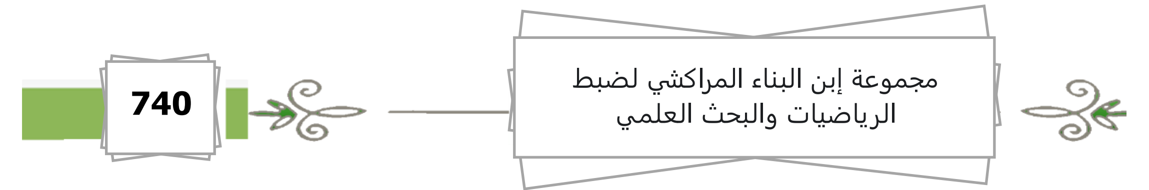
ويمكن تعريفه عن طريق النشر.

فامكانية كل هذه التعريفات ناتجة عن كونها مجرد طرق نميز بها مجموعة جزئية من $R\times R$ لها خصائص معينة سميناها اللوغارتم مثلها مثل لو قلنا أن الجذر التربيعي ل 2 هو حل موجب تماما للمعادلة $x^2-2=0$ أو للمعادلة $x(x^2-2)$ فتعدد المعادلات هنا لا يهم إنما المهم كيفية تمييز الجذر التربيعي ل 2 .

لذلك قد يستغرب البعض كيف نعرف الدالة اللوغارتمية بأنها الدالة العكسية للأسية والدالة الأسية معرفة بالدالة اللوغارتمية ؟

والجواب ان هذا خطأ فكما للدالة اللوغارتمية تعريفات متعددة فكذلك للأسية تعريفات متعددة إنما السؤال بأي تعريف منها نبدأ ؟ فإذا عرفت اللوغارتم بكونه دالة أصلية لمقلوب x فيمكنك تعريف الأسية بالدالة العكسية للوغارتم.

ويمكنك كذلك البدء بتعريف الأسية فإذا عرفتها بالنشر فيمكنك تعريف اللوغارتم كدالة عكسية للأسية فهذه مسألة ترتيب في التعاريف فقط وطرق التعريف ليست وحيدة.



كخلاصة لموضوعنا نقول أنه كي يكون الحدس الرياضي سليما لابد من تنقيته من الشوائب فلا يضاف للكائن الرياضي خاصية مختلفة عنه ثم يوصف بها.

لذلك عندما تكلمنا عن قابلية إشتقاق دالة الجذر التربيعي عند الصفر ضربنا لها مثلا بتبليط غرفة فإذا وصلنا للحائط قسمنا البلاطة قسمين حتى نربط التبليط للحائط ولم ننظر لما يحدث وراء الحائط.

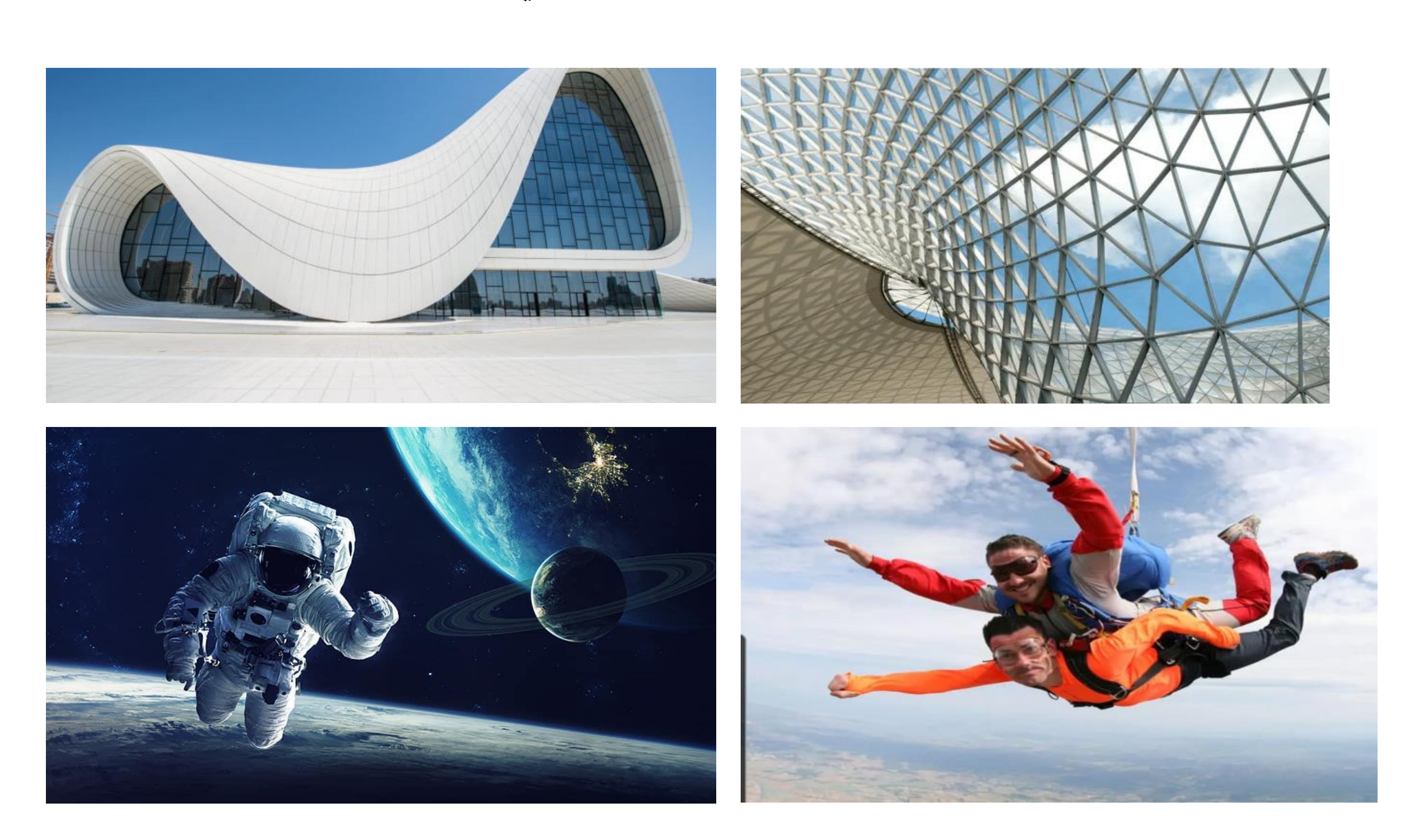
فهنا ربطنا خاصية قابلية الإشتقاق بخاصية قابلية التبليط فالذي جردناه هنا هو فكرة القابلية لكننا لم نقل أن الإشتقاق يتم ببلاطات وليس عند نقطة كالإشتقاق لأن هذا من الشوائب فلم نهتم به.

فجردنا فقط القابلية كقابلية الإشتقاق وقابلية التبليط والمحدودية على مجال مغلق عند الصفر بمحدودية أرضية الغرفة عند الجدار.

فهنا نقلنا مفهومان مجردان إلى الواقع مع نقاء التحريد لذلك جاءنا الجواب بإمكانية التبليط ولا يهمنا ما يحدث خارج الغرفة فنقلنا ذلك بالإتجاه العكسي بقابلية الإشتقاق ولا يهمنا ما يحدث خارج مجموعة التعريف.

ولذلك هذا المثال يصلح للإستمرار والمكاملة وأي خاصية للدالة متعلقة بالدالة.

الرياضيات تتصرف مع الخصائص مجردة فهذا الذي يجب على التلاميذ والطلبة التنبه له عند التجريد والتصور فمتى تعودوا على تنقية التجريد استقام لديهم الحدس الرياضي.



التعريفات الرياضياتية لم توضع من أجل التعريف فقط.

ليس أي تعريف يصلح للتعريف إنما التعريف يصاغ لغايات وأهداف والتعريف ذاته لا يمنع شيئا لم يذكره لذلك نجد تعريفات خاصة ثم تعريفات أخرى تعممها وهذا كثير في الرياضيات.

بل من التعريفات ما يناقض غيرها لاختلاف التوجهات فهناك من يجعل الصفر عدد طبيعي وهناك من يستثنيه.

وهناك من يعرف R بمسلمة الاختيار وهي المألوفة عندنا في المنطق الشكلي وهناك من يعرفها بقابلية الحساب كالمنطق الحدسي فتعطي R قابلة للعد على غير المألوف.

التعريف يوضع لهدف معين يراعى فيه السهولة والقيام بمهمته المرجوة منه.

مثال ذلك الدالة الأسية فلها خمس تعريفات متكافئة لكن لو عرفناها كنهاية $Lim\ (1+x/n)^x$

فهذا التعريف ليس عملي فهو لا يتيح دراسة الطبيعة التحليلية للدالة الأسية كالاستمرار والاشتقاق والنشر.

لذلك التعريف المعتمد هو إحدى ثلاث تعريفات تمتاز بظهور مشتقتها : كمجموع سلسلة عددية ،أو كحل لمعادلة تفاضلية، أوكدالة عكسية للوغارتم.

فهذه التعريفات تتيح دراسة الاشتقاق لرتب عليا بسهولة و مقارنة الدالة الأسية بغيرها.

الكتابة الرمزية نفسها في التعاريف والبراهين ليست مقصودة لذاتها إنما هي تدوين لفهم استخدمناه للوصول للنتيجة والذي نريد تبادله مع غيرنا عبر لغة تجرده من الذوق البشري.

لذلك جاء في منشورات بورباكي

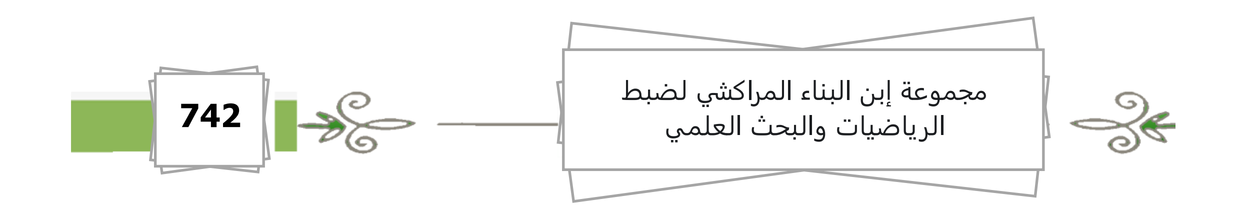
فكل رياضي يعلم أن البرهنة ليست في الحقيقة مفهومة ما دمنا نتقيد بمجرد التأكد من صحة مراحل الإستنتاجات التي نراها خطوة خطوة، بدون التصور الواضح للأفكار التي قادتنا لبناء هذه السلسلة من الإستنتاجات دون غيرها. اه (Bourbaki 1948, p.37 note1)

وهذا نص عام في الصياغة الرياضياتية وأهدافها فهدف الصياغة ضبط كيفية تطبيق الأفكار لا قوقعة الأفكار في صيغة محددة فالصياغة نفسها ليست الرياضيات إنما هي أفكار تسلسلت فمكنتنا من كتابة هذه الصياغة .

لذلك في الرياضيات نجد تعريفات خاصة ثم تعريفات عامة فنجد التعريف العام للدالة الأسية كمجموع سلسلة في فضاء باناخي ولذلك نجد أسية مصفوفة.

وهكذا كل تعريف يوضع لعدة غايات فيصاغ بالطريقة التي تحقق ذلك.

فعلى المشتغلين بالرياضيات التمعن في التعاريف جيدا والتمعن في قيودها وعدم فهم تقييد من عدم الذكر في التعريف فكل ما لم يذكر في التعريف لا يفهم منه عدم وجوده فالرياضيات لا تعمل بهذه الطريقة إنما التعريف خاص بما ذكره لا أكثر.



والرياضيات علم تعميمات لذلك نجد الطبولوجيا التي تعمم مفهوم النهايات في R تعريفا للجوار أعم منه في R .

ونجد تعريفا للرتابة في مجموعات كيفية مزودة بعلاقة ترتيب بل نجد تعريفا للاشتقاق في الجبر ... وعبر التوزيعات .... والقائمة طويلة.

بل حتى الأعداد الأولية تعمم في حلقة كيفية.

قد يستغرب غير المطلع من هذه الأمور فيظنها ضربا من الخيال لأنه لم يعرف إلا ما درسه لكن هذا ناتج من عدم فتح الذهن وعدم المثابرة على المطالعة في الميدان وعدم القدرة على التجريد.

ولك أن تتصور لو عاش كاردان بيننا عندما وضع العدد التخيلي $i^2=-1$

لكان أتهم بالجنون وشنق وحرق على منصة الرياضيات بدعوى خروجه عن المألوف .... وكذلك فعلوا بغاليليه.

لا ننسى أن الرياضيات علم تجريد للأفكار فبدأنا من جداء سلمي في فضاء إقليدس بين أشعة ثم وصلنا به لجداء سلمي بين دوال في فضاء لوبيغ.

وبدأنا بعد الأعداد الطبيعية منفصلة فوصلنا للدالة زيتا لريمان.

وبدأنا بهندسة إقليدس لنصل لهندسة الفضاء الزمكاني...

الرياضيات علم أفكار وتخيل للتجريد لا تقوقعه التعريفات.





لنضبط الرياضيات معا : كيف نحرر برهانا عن طريق مثال تطبيقي.

سنحاول في هذا المنشور استعراض كيفية حل التمرين الذي في الصورة وسنبين أن المسألة سهلة وتعود لاستحضار التعاريف والتحرير الجيد.

لتكن E مجموعة غير خالية A و B مجموعتان جزئيتان من المجموعة E. و

$$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$$
$$X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$$

.i f متباين $\Leftrightarrow A \cup B = E$.

لبرهنة التكافؤ الأول نبدأ بأحد الاستلزامين فالطريقة الغالبة في برهنة التكافؤات هي برهنة كل استلزام على حدى لكنها ليست الوحيدة فأحيانا يمكننا برهنة التكافؤ مباشرة.

إذا ننطلق من كون f متباين ولابد أن نصل إلى أن $A \cup B = E$:

حتى نبين أن $A \cup B = E$ فلابد أن نبين أن $\forall x \in A \cup B : x \in E$

بما أن هذا مكمم عمومي وكل هذه مجاهيل فأفضل طريقة للبرهان هنا هي استعمال البرهان بالخلف فالبرهان بالخلف يحول المكمم العمومي إلى مكمم وجودي والتعامل مع عنصر واحد موجود أسهل من التعامل مع عدد غير معروف من العناصر.

إذن البرهان بالخلف هنا يعني أن نفرض صحة نفي القضية أن $A \cup B \neq E$

فنترجمها بالمكممات ، أي: $A \cup B \neq E \Leftrightarrow \exists x : x \in E \wedge x \notin A \cup B$

وهذا يعني: $x \notin A \wedge x \notin B$

الآن بعد أن كتبنا المعطيات وحددنا طريقتنا في البرهنة سنحرر البرهان و ذلك باستعمال كون f متباين

فلدينا: $f(X) = (X \cap A , X \cap B)$

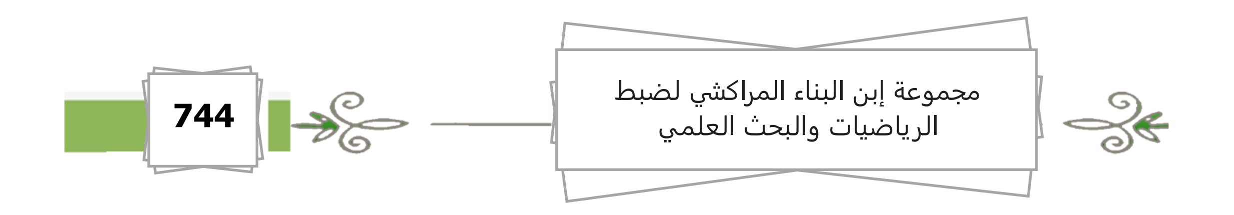
لابد ان نبحث عن التناقض لأنه اخترنا البرهان بالخلف وهنا كل ما نملكه هو A , B , f , E والعنصر x

فلذلك سنجرب صناعة مثال يعطينا تناقضا والتناقض هنا يكون بمثال يناقض كون f متباين أي بصيغة رياضية يجب أن نجد عنصرين مختلفين y و z بحيث $f(y) = f(z)$

فلنحاول صناعة y و z بما نمتلكه، يمكننا مثلا تجربة $y = A$ فهذا من أبسط ما عندنا ولنستعمل x السابق لتكوين مجوعة جديدة وهي $A \cup \{x\}$ وهذا ابسط ما نستطيع تكوينه بـ x

كان بامكاننا أن نجرب كذلك $B \cup \{x\}$ و $A \cup B \cup \{x\}$ وحتى $y = \varnothing$ و $z =\{x\}$

لكن أخذنا أسهل ما خطر على البال فلنجربه.



فلدينا هنا $f(y) = f(A) = (A \cap A , A \cap B) = (A , A \cap B)$ وبالنسبة للمجموعة الثانية

$$f(z) = f(A \cup \{x\})$$
$$= ((A \cup \{x\}) \cap A , (A \cup \{x\}) \cap B)$$

لكن نعلم ان x لا تنتمي ل A ولا تنتمي ل B وهذا يعني أن:

$$[A \cup \{x\}] \cap A = A$$
$$[A \cup \{x\}] \cap B = A \cap B$$

ومنه $f(z) = (A , A \cap B) = f(y)$ وهذا هو التناقض الذي كنا نبحث عنه ومنه صحة الاستلزام الأول. ولو جربنا مثلا:

$$y = \varnothing$$
$$z = \{x\}$$

سنجد

$$f(\{x\}) = (\{x\} \cap A , \{x\} \cap B)$$
$$= (\varnothing , \varnothing) = (\varnothing \cap A , \varnothing \cap B) = f(\varnothing)$$

منه التناقض لأن f متباين فنلاحظ أن التناقض يظهر متى أخذنا كعنصرين جزء من A اتحاد B كمجموعة أولى ثم اضافة عنصر له لا ينتمى ل A اتحاد B كمجموعة ثانية وهنا نفهم أن السبب نابع من التقاطع الذي يقصر العمل على A و B ويهمل ما هو خارجهما وكأنه اسقاط عليهما ومتى أهملنا كل ما هو خارج عنهما حصلنا على عدم التباين لأن كل ما هو خارج عنهما سينتج المجموعة الخالية.

لو لاحظنا البرهان هنا لوجدنا أن 90% من المكتوب مجرد شرح للآليات وترجمتها منطقيا وللوصول لهذا يكفي أن: نستحضر التعاريف وكتابتها مع المعطيات كتابة منطقية

والنتيجة لم تكن فقط الوصول للحل بل فهم سبب خاصية التباين.

لننظر للاستلزام الثاني وهو كون $A \cup B = E$ يستلزم f متباين أي أنه مهما كان y و z فإن:

$$f(y) = f(z) \Rightarrow y = z$$

فلنكتب

$$f(y) = f(z) \Rightarrow$$
$$(y \cap A , y \cap B) = (z \cap A , z \cap B)$$
$$\Rightarrow (y \cap A = z \cap A) \wedge (y \cap B = z \cap B)$$
$$\Rightarrow (y \cap A) \cup (y \cap B) = (z \cap A) \cup (z \cap B)$$
$$\Rightarrow y \cap (A \cup B) = z \cap (A \cup B)$$
$$\Rightarrow y \cap E = z \cap E$$
$$\Rightarrow y = z$$

ومنه المطلوب.

فالمسألة مسألة تدرب على الضبط ولا توجد صعوبة البتة هنا إلا التعود على تحرير الأجوبة.



ماذا لو كانت المالانهاية مجرد جهلنا بالمنتهي ؟

في الرياضيات يوجد مفهومان للمالانهاية : العددية والمجموعاتية

أما المجموعاتية فهي عدد عناصر مجموعة وأما العددية فخاصية متعلقة بعدم المحدودية.

السؤال الذي يطرح أي منهما موجود في الواقع ؟

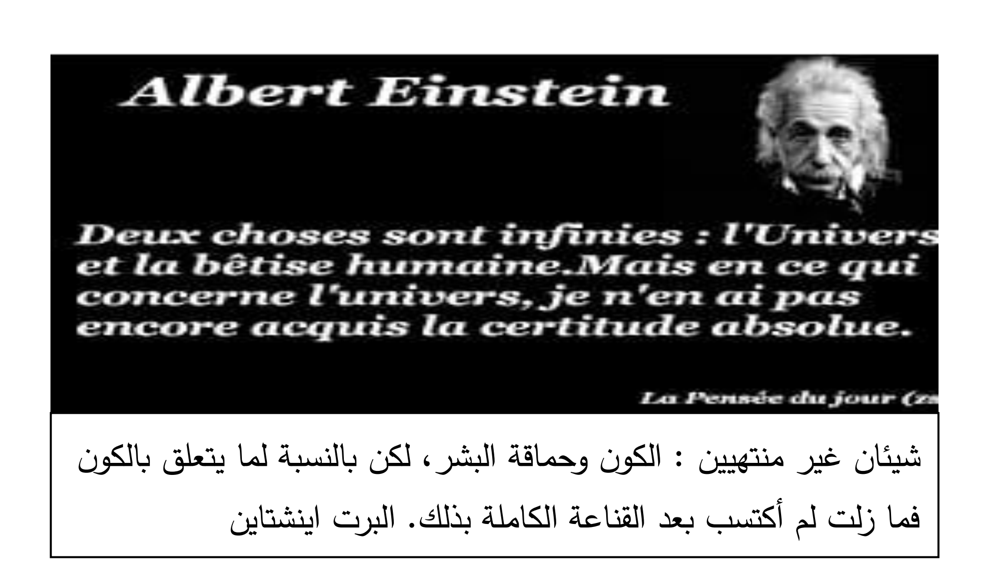
للوهلة الأولى ينقدح في اذهاننا عدم وجود المالانهاية المجموعاتية ذلك أن المادة منتهية في الكون أما المالانهاية العددية فنربطها بالزمن ذلك أن الزمن في تصورنا غير محدود.

لكن المشكل أن هناك نظريات فيزيائية تذهب لعدم وجود الزمن بل حتى النظرية النسبية تلغي الزمن وتبقي على السببية فالزمن محلي متعلق بالسببية أي تتابع الحوادث.

أما المادة فنتعامل معها كانها مستمرة فنقسمها لعدد غير منته من الاجزاء وندرس الظواهر عبر دوال غير متقطعة بل نستعمل التفاضل والإشتقاق لأنه بحكم العدد الهائل للجسيمات في الكون لا يمكننا الإحاطة بها فندرسها تحت مفهوم جديد يسمى النهاية والتي تتطلب المالانهاية سواء من حيث العدد كمتتالية أو من حيث عدم المحدودية بأيلانها نحو المالانهاية.

فما هو العدد pi مثلا ؟ هو مجرد نهاية في العقل لكن في الواقع لا وجود له إذ لا يمكننا رسم دائرة مستمرة النقاط ومرتبة بمسافة معينة عن المركز فالواقع يخبرنا أن المادة متقطعة ولا يمكننا رسم خط دائرة بالمادة بل هي أجزاء ثلاثية الأبعاد تختلف في مسافتها عن المركز لكن بحكم إهمالنا لهذه الإختلافات لصغير قيمها بحيث لا نلاحظها بالعين المجردة نقربها عبر مفهوم المالانهاية من نهاية نسميها 2pi أي محيط دائرة الوحدة.

لو تأملنا جيدا مفهوم تتابع الحوادث الذي يعطينا الزمن ونظرتنا للمادة والظواهر الكونية لفهمنا أن المالانهاية الوحيدة الموجودة في الواقع هو جهلنا بالواقع، إذ متى لم يمكننا الإحاطة بكم هائل من المعلومات عبرنا عليه بالمالانهاية وأدخلناها تحت مفهوم النهاية.



شيئان غير منتهيين : الكون وحماقة البشر، لكن بالنسبة لما يتعلق بالكون فما زلت لم أكتسب بعد القناعة الكاملة بذلك. البرت اينشتاين

كيف أصبح قويا في الرياضيات ؟

الكثير يسأل عن الكتب التي يمكن قراءتها ليصبح قويا في الرياضيات:

العقل عضلة مثله مثل باقي العضلات الجسدية فلا يوجد دواء تأكله فتصبح سوبرمان من الغد، إنما العضلة تدرب بمنهجية وعلى فترات طويلة حتى تكبر فكذلك مع العقل.

أهم الأشياء هي:

الفهم :

لابد من فهم الدرس وليس حفظه وحفظ حلول التمارين بل لابد من فهم الفكرة التي بني عليها الدرس حتى كأنك تراها على الواقع ويمكنك تبسيطها لزملائك فما لم يمكنك إعادة صياغته – وأركز إعادة صياغة وليس إعادة كتابة – بشكل مفهوم لغيرك فأنت لم تفهمه إنما حفظته.

يمكنك أخذ ورقة وإعادة كتابة ما فهمته بصيغة مختلفة فان استطعت فقد فهمت الدرس وإن لم تستطع فانظر النقاط التي لم تستطع إعادة صياغتها لتفهمها.

ثم طبق ما فهمته على تمارين دون النظر إلى الحل مسبقا.

الضبط :

يتم الضبط أولا بحفظ العلاقات

كتابة المعطيات بشكل رياضي أي باستعمال المكممات والترامیز

كتابة المطلوب بشكل رياضي أي باستعمال المكممات والترامیز

الانتقال من المعطيات إلى المطلوب بشكل رياضي عبر الاستلزامات والتكافؤات وبتحويل المعطيات، ويمكن استبدال رمز الاستلزام بما يكافؤه كلفظ "منه" و"نستنتج" و"إذن" لكن الافضل الترميز.

استخدام طرق البراهين الرياضية كالبرهان المباشر أو بالخلف أو فصل الحالات أو التراجع...

تجربة الحل إن كان ممكنا والاستعانة بالبرامج المعلوماتية للتأكد وللفهم كرسم الدالة وحساب النهاية.

والمسألة تحتاج صبرا ووقتا لذلك يجب سد كل ثغرة متى اكتشفت وجودها عندك، كعدم الاستخدام الجيد للمميز وعدم ضبط العلاقات الشهيرة وحساب الكسور فمتى رأيت ثغرة أعد قراءة درسها وفهمه وحل التمارين حتى تسدها. (المقصود بالثغرة شيء لم تفهمه من الدروس السابقة) .

كما يجب اجتناب حفظ الحلول وذلك بمحاولة حل التمرين بأكثر من طريقة.

أما الكتب فهذا راجع لك فاختر منها ما تراه سهلا لك ولا تكثر من كتب الدروس كتاب أو أثنين يكفياك.

أما التمارين فهي كثيرة لكن لا تضيع وقتك في حل نفس النوع من التمارين مادمت أتقنت الحل فمتى أتقنته مر لغيرها من الأنواع والشبكة مليئة بالتمارين.

ولا تنسى قبل كل هذا التوكل على الله وإخلاص النية



طرق التدريس



يا أستاذ كيف تشرح فكرة حل للتلميذ ؟

الرياضيات علم تطور على مدى عشرات القرون وما نراه اليوم من مفاهيم مألوفة قد استغرق فهمها مئات السنين.

دور الأستاذ لا يتوقف على شرح طريقة الحسابات للتلميذ فهذه لن تعوض هضم هذه المفاهيم.

لذلك لا بد أن يختصر الأستاذ للتلميذ تطور كل مفهوم في مراحل سهلة ابتداء معه بأبسطها وبالتمثيل ليصل به إلى طريقة الإستنتاج والحساب.

يجب أن يدرك الأستاذ ان مجرد صياغة حل مشكلة ليس هو الرياضيات إنما الرياضيات كيف توصل لهذه الأفكار التي خولت له صياغة الحل.

جاء في منشورات جمعية بورباكي نص قيم حول هذه المسألة :

فكل رياضي يعلم أن البرهنة ليست في الحقيقة مفهومة ما دمنا نتقيد بمجرد التأكد من صحة مراحل الإستنتاجات التي نراها خطوة خطوة، بدون التصور الواضح للأفكار التي قادتنا لبناء هذه السلسلة من الإستنتاجات دون غيرها. اه (Bourbaki 1948, p.37 note1)

لنضرب مثالا على هذه المسألة بسؤال تلميذ لأستاذه : لماذا لا تكتب الدالة الأسية كدالة كثير حدود ؟

فإذا اكتفى الأستاذ بقوله للتلميذ لا يمكن ذلك لأن الأسية أقوى من جميع كثيرات الحدود فالنهاية في جوار زائد مالانهاية $\text{Lim } e^x/x^n$ تساوي زائد مالانهاية،

فالأستاذ لم يجب على سؤال التلميذ من عدة نواحي:

الأولى : ان الأستاذ لم يعالج السبب الأساسي للسؤال وهو ظن التلميذ أن جميع الدوال يمكن كتابتها ككثير حدود فالتلميذ كالمريض إذا سأل الطبيب فلابد أن ينظر الطبيب لسبب السؤال ليكتشف أعراض المرض.

الناحية الثانية : الأستاذ لم يعطى تفسيرا واضحا لسبب عدم كتابة دالة كيفية ككثير حدود فإن كانت طريقة الأسية أقوى من جميع كثيرات الحدود تصلح هنا فهي لا تصلح مع دوال أخرى كالدوال المثلثية.

فالتلميذ لم يتحصل على جواب واضح أو طريقة حل تصلح لجميع الحالات.

الناحية الثالثة : أنه لم يجب على صلب سؤال التلميذ : ما الذي أعطى الأسية هذه القوة ومن أين جاءت الأستاذ فكرة القسمة وحساب النهاية ؟

سنقترح هنا طريقة جواب للتلميذ تعالج هذه النواحي.

لابد للأستاذ أن يبدأ بعلاج المشكل الأساسي وهو هل كل دالة يمكن كتابتها ككثير حدود وللجواب على هذا يضرب للتلميذ أمثلة يستوعبها ومع كل مثال يرتقي معه في مفهوم الدالة العددية ليصل لمفهومها العام الذي يدرسه التلميذ:

فيلفت انتباهه إلى ن دالة القيمة المطلقة مثلا $|x|$



لا تكتب ككثير حدود لكن قد نظن أنها تكتب ككثيرات حدود على مجالات لأن

$$|x| = x , x >=0$$
$$|x| = - x , x < 0$$

فيمكن أن نتصور الكثير من الدوال معرفة على مجالات، مثال ذلك:

$$f(x) = x^2 +1 , x >=1$$
$$f(x) = x^2 -1 , -1 < x < 1$$
$$f(x) = x^3+2x-1 , x < -1$$

فهنا يرتقي الأستاذ لتمثيل آخر يبين وجود دوال لا تكتب ككثيرات حدود على مجال بضرب مثال بالدالة $f(x) = 1/x$ وعموما دوال كسور كثيرات الحدود $f(x) = (x^5+x^2-10)/(x^2-4)$ فهذه دوال أعم من كثيرات الحدود ثم يرتقي الأستاذ بتوسيع تفكير التلميذ لدوال مختلفة على هذه بضرب مثال بالدوال الجذرية $f(x) = (x^2+1)^{1/2}$ فنلاحظ أن هناك كثير من الدوال لا تكتب ككثيرات حدود بل يمكن تصور دوال بصيغ جبرية من جمع وقسمة وجذور وعلى مجالات بالقيمة المطلقة وغير ذلك.

الآن بعد أن وضح الاستاذ للتلميذ أن الدوال العددية أعم من كثيرات الحدود ينطلق ليشرح له كيفية الجواب على سؤاله بالرجوع لكثيرات الحدود ومقارنة غيرها من الدوال بها:

فيدعوا الأستاذ التلميذ أن يتأمل في خصائص كثيرات الحدود:

مثلا أن عدد جذورها لا يتجاوز رتبتها

أن كل كثير حدود غير ثابت يؤول للمالانهاية بجوار المالانهاية

أن كل كثير حدود من الدرجة n : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1}+ .... + a_0$

إذا حسبت نهايته $Lim\ f(x)/x^n = a_n$ شيء آخر كذلك نلاحظه في كثير الحدود فلو أخذنا كمثال

$$f(x) = x^2+2x -5$$

فمشتقته كثير حدود من درجة أقل بواحد من درجته $f'(x) = 2 x + 2$ ولو واصلنا الإشتقاق

$$f''(x) = 2$$
$$f'''(x) = 0$$

وهذا صالح لأي كثير حدود آذ يكفي إشتقاقه بـ $n+1$ مرة حيث n رتبته للوصول للصفر.

الآن لنتأمل في الأسية ونطبق عليها الخصائص السابقة:

كون الأسية لا تقبل أصفارا لا يبين لنا وجود خلاف فاصل بينها وبين كثيرات الحدود فهناك كثيرات حدود لا تقبل جذورا.

لكن من ناحية النهاية نلاحظ أن نهاية الأسية في جوار ناقص مالانهاية هي الصفر بعكس كثير الحدود غير الثابت الذي يؤول للمالانهاية فهذا خلاف جوهري

نلاحظ كذلك أنه مهما اخترنا n كعدد طبيعي فنهاية $Lim\ e^x/x^n$ في جوار زائد مالانهاية هي زائد مالانهاية فالأسية أقوى من كل كثير حدود مهما كانت درجته وهذا مخالف لكثيرات الحدود.

نلاحظ كذلك أن مشتقة الأسية $(e^x)' = e^x$ تبقى نفسها، فهي لا تسلك سلوك كثير الحدود الذي يضعف بدرجة عند الإشتقاق فهي تبقى بنفس القوة ولو إشتققناها آلاف المرات فلن نصل إلى الصفر.
فكل هذه الإختلافات تبين أن الأسية لا يمكن أن تكتب ككثير حدود.
الآن ينتقل الأستاذ بفكر التلميذ فيرتقي به ليبين له سبب قوة الأسية وذلك بضرب مثال يألفه التلميذ وهي النهاية $\text{Lim } (1+x/n)^n = e^x$ فنلاحظ أن الأسية هي نهاية الصيغة $(1+x/n)^n$
وهي كثير حدود من الدرجة n و n يؤول لزائد مالانهاية لذلك الأسية تتفوق على جميع كثيرات الحدود بجوار زائد مالانهاية.
الآن ينتقل الأستاذ بالتلميذ للتعميم والتطبيق فيضرب مثلا بالدوال الجيبية فلو أخذنا $\sin(x)$
نلاحظ أنه يختلف عن كثير الحدود بأن عدد القيم التي ينعدم فيها لا نهائي بعكس جذور كثير الحدود فعددها منته. نلاحظ كذلك أنه لا يؤول لمالانهاية عند مالانهاية بعكس كثير الحدود غير الثابت.
نلاحظ كذلك أن $\text{Lim } \sin(x)/x = 0$ بجوار المالانهاية بعكس كثيرات الحدود غير الثابتة.
ونلاحظ كذلك أن

$$\text{Sin}(x)' = \cos(x)$$

$$\text{Sin}(x)'' = \cos(x)' = -\sin(x)$$

فنعود ل $\sin$ بعكس كثير الحدود الذي إذا إشتققناه عدة مرات نصل للصفر.
ف $\sin$ كذلك يختلف عن كثيرات الحدود في كثير من الخصائص.
وهنا نكون قد اعطينا للتلميذ نظرة عامة لخصائص الدوال ونبهناه للتأمل فيها وكيفية معرفة خصائصها ومقارنتها ببعضها عن طريق ما تعلمه من خصائص جبرية وخصائص تحليلية.
فنختم له كخلاصة أن الدالة في الأصل تطبيق من مجموعة لأخرى فمفهومها أعم من مجرد كثيرات حدود وكسور ودوال جذرية وأسية ولوغارتمية وجيبية فيمكننا صناعة الكثير من الدوال بطرق مختلفة.
فمثلا دالة الجزء الصحيح $f(x) = [x]$ هي دالة درجية غير مستمرة عند كل عدد صحيح فليس كل الدوال قابلة للإشتقاق. لكن هذه الدوال المألوفة نتجت من العمليات الجبرية والتأمل في الهندسة وبالنهايات فهي مألوفة مستوحاة من الواقع ولها خصائص جيدة لأننا أنتجناها بطرق بسيطة ونجدها عادة في الواقع.
ثم يذكر الأستاذ للتلميذ أنه سيرى في دراسته المتقدمة أنواعا اخرى كثيرة من الدوال العددية تختلف عن هذه وأكثر تعقيدا .الغرض من هذا المثال أن يحاول الأستاذ الارتقاء بفكر التلميذ بضرب أمثلة مما يعرفه لتعميمه على ما لا يعرفه وذلك بالتجريد رويدا رويدا فيتعامل مع الكائنات الرياضية بخصائصها بعد تجريدها منها دون أن يخرجه من برنامجه ويحمله أكثر من طاقته.





الأستاذ بين الرياضيات وبيداغوجية الرياضيات

يجب أن يضبط أستاذ الرياضيات مجالين :

الرياضيات

بيداغوجية الرياضيات

فلو تأملنا الكتاب المدرسي سنجده مضبوط الألفاظ فهو لا يمنع الاستمرار على غير مجال ولا يقول أن هناك تكافؤا بين تغير المشتقة الثانية لإشارتها وإنعدامها ووجود نقطة الإنعطاف.

بل يكتفي بتقييد الشروط لوضع النتائج وهذه من الدقة الرياضية والبيداغوجية فهو يعرف النهايات على دوال معرفة على مجال لكنه لا ينفي ما يعمم ذلك.

وإنما يكتفي بالاقتصار على المجالات للجانب البيداغوجي فهو يصيغ التعاريف لتوافق قدرة التلميذ على الاستيعاب.

المشكل عندما لا يضبط الأستاذ هذين البعدين فسيحمل التعاريف على غير معناها وينفي ما لا يجب نفيه.

وهذا يُنتج عدم فهم للتعاريف وكيفية صياغتها ومن لا يفهم هذا لا يمكنه شرح المفهوم للتلميذ ففاقد الشيء لا يعطيه.

الأصل أن الأستاذ عبر الدراسة الجامعية يعيد دراسة هذه المفاهيم بشكل أوسع وأدق لكن طريقة التدريس التي ربطت النجاح بالحفظ أكثر منه بالفهم جعلت الطلبة لا يلقون بالا للتعاريف ويعتبرون الكثير من النظريات كصروح مجردة من المعنى.

فمن ذا الذي ينتبه لطبولوجيا الأثر إن لم يتمعن فيها ؟

بل من منا درس نظرية المجموعات في الجامعة ؟

بل حتى المنطق لم يعد يدرس.

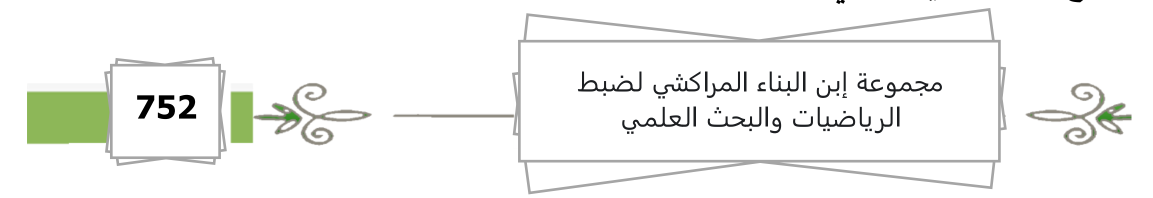
وهذين هما أساس الرياضيات فإذا لم يضبط الأساس فلا يمكن ضبط البناء وكل ما يبنى على أساس غير متين سيتهدم لاحقا.

نحن نحتاج لتوعية التلاميذ والطلبة والأساتذة إلى أن الرياضيات ليست مجرد حسابات بل هي مفاهيم فطرية موجودة في عقل كل واحد منا وأنها تبنى على قواعد متينة لابد من ضبطها ومتى ضبطت أصبحت مادة سهلة حلوة يتلذذ العقل بدراستها.

ولعل عدم ضبط التعاريف هو من ينفر التلميذ من هذه المادة، فالكائنات الرياضيات كلها تبدأ من الواقع فيجرد لخصائص ملموسة ثم تعمم الخصائص لخصائص غير ملموسة فتوضع لها تعاريف معممة.

فإذا لم يقم الاستاذ بهذا العمل التجريدي من الملموس إلى غير الملموس فلا يمكنه أن يبني الحدس الرياضي في عقل التلميذ.

برنامج التلاميذ وضع بهذه الطريقة ليبني لبنة لبنة تفكير الطفل على مدار سنوات.



فيبدأ معه منذ نعومة أظفاره مع نظرية المجموعات عبر القريصات والخشيبات والمقارنة بين الكل والجزء.
ثم يجردها لتصبح أعداد طبيعية وكسورا وجداول ضرب فتتحول لترميزات يمكنه إجراء عمليات حسابية عليها.
ثم يمر للهندسة فيعلمه عبر المثلثات حساب الأطوال والبرهنة من الرسم.
ثم يعلمه من ذلك وعبر مبرهنة فيثاغورث وجود الأعداد الجبرية كالجذور ويعلمه وجود المبرهنات والاستدلال.
ثم يعلمه عبر المعالم الأشعة والمعادلات فيعلمه الترميزات.
ثم في الثانوي يقتحم معه كثيرات الحدود فيعلمه الدوال ورسمها.
ثم عبر المثلثات الدوال الجيبية دائما بنفس الطريقة عبر المرور من الرسم إلى الترميز.
ثم يبدأ بنزع الرسم شيئا فشيئا فيعلمه الدوال والاستمرار والاشتقاق على مجال إنطلاقا من الصيغ الجبرية.
ثم يمر به لدوال أكثر تعقيدا ليس لها صيغة مألوفة لا جبريا ولا هندسيا كالأسية واللوغارتمية.
ثم يعلمه التكامل على هذه الدوال.
ثم يمر به للأعداد المركبة وهي مجموعة تجريدية فهنا يصل التلميذ لقمة التجريد فالأعداد المركبة صرح جبري.
ثم يربط الأعداد بالتمثيل الهندسي عبر الأسية ثم التحويلات الخطية فتصبح دراسته للترميزات مجردة وعنا يعلمه تحويل مسائل ملموسة إلى مسائل غير ملموسة مجردة عبر صيغ رياضية.
ثم في الجامعة يعيد بناء كل ما سبق على طريقة البناء المسلماتي فيدرس الرياضيات بشكل أعم عبر الطبولوجيا والقياس فيرى دوال أكثر تعقيدا مرورا بالنشر ثم الدوال المستمرة على طبولوجيا غير عددية ففضاءات هلبرتية.
ثم دوال غير مستمرة لكنها قابلة للمكاملة حسب لوبيغ.
هذا التدرج لابد للأستاذ أن يعيه جيدا فهو سيقوم به عند شرحه للدرس للتلميذ حتى يوصل له المعلومة كما ينبغي.
أما إذا نظر للتعاريف كصياغة لغوية فاقدة المغزى مجردة عن الواقع ولا يربط بينها وبين ما درس سابقا وما سيدرس لاحقا فهو لا يعلم التلميذ إنما يحفظه ما لا يفهمه.
لابد من إخلاص النية ومحاولة فهم ما ندرسه قبل تدريسه حتى نكون جيلا متعلما يمكنه تطوير علوم أمتنا.



كيف تعالج التلميذ الذي يقع في هذا الخطأ الشائع في الصورة يا أستاذ ؟

$$\frac{x^2+x+2}{x+2}=x^2$$

نعم هذه مشكلة منتشرة، عدم اتقان التلاميذ للعمليات الحسابية حتى يقعوا في مثل هذه الأخطاء في الاختزال. المشكلة تحتاج علاجا لكن العلاج يبدأ بتشخيص المرض و ذلك بطرح سؤال على التلميذ: لماذا ؟

أغلب التلاميذ يتعلمون العمليات الحسابية كخوارزمية كتابية تحفظ، لا كمراحل لعمليات جبرية فأول شيء يجب أن يفهمه التلميذ:

أن هذه ليست خوارزميات كتابية فقط بل تقابلها عمليات رياضية معرفة.

أن الخوارزميات الكتابية غير قياسية وأنه لا يوجد قياس بالتشبيه في الرياضيات إنما الرياضيات علم منطق وقضايا فكون الكرة مستديرة مثل البطيخة لا يعني أنها حمراء من الداخل.

ولفهم هاذين **الأمرين** يطرح على التلميذ سؤال : لماذا ؟

حتى نضطره لتفسير طريقة تفكيره فإن قال تعلمنا هكذا فيعطى مثالا مضادا لتحطيم طريقة تفكيره الخاطئة.

لكن لماذا لا نشرح له مباشرة طريقة الحساب ؟

لا نفعل ذلك لأنه لا يمكنك ترميم جدار مائل بل يجب هدمه ثم بناؤه من جديد.

وعملية الهدم تتم عبر مثال مضاد بسبط يقوم به التلميذ فبعد أن يفسر لماذا فنخبره له أن طريقته غير صحيحة بدلالة التعويض فنطلب منه التعويض بـ 2 في الطرفين ليجد: $(2^2+2+2)/(0+2) = 2^2$

وهذا يعني $4 = 8$ وهذا غير معقول فأين الخطأ ؟

ثم يقدم إليه مثال صحيح $(2x^2)/x = 2x$ فبالتعويض بـ 2 نحصل على $2 \times 2^2 / 2 = 4$

ثم يشرح سبب صحة هذا وخطأ السابق بالمرور من التخصيص إلى التعميم عن طريق تقعيد القاعدة أن الاختزال:

مجرد قسمة للبسط والمقام على نفس القيمة

و أن القسمة تطبق على جميع أطراف الجمع والطرح لا بعضها لأنها تمثل عددا واحدا يقسم عليه

لأن القسمة ضرب في النظير والضرب توزيعي على الجمع.

ثم نمثل له بحالات تصلح وحالات لا تصلح من التعليل بالقاعدة السابقة.

فمتى قعدنا القاعدة وبينا الأمثلة نمر معه للتطبيق عبر حالات مختلفة مع طلب الاختزال ومن بينها حالات مشابهة للحالة الأولى لنرى هل استوعب أو لا ؟ ونطلب منه أن يعلل كل حل.

فمتى نجح في حلها وعلل الفرق بين الحالات فقد استوعب الدرس وهضمه أيما هضم.

الدوال العددية في المناهج التدريسية.

مفهوم الدالة الحقيقية يدرس عبر مراحل بداية من مرحلة الثانوية عن طريق تدريس:

دالة كثير حدود من الدرجة الأولى والثانية والقيمة المطلقة

ثم دالة كثير حدود عموما ثم كسور كثيرات الحدود ثم الدوال الصماء ثم الدوال المثلثية والتقريب التآلفي

وفي الباكالوريا يتم التلميذ دراسته للدوال بدراسة الدالة اللوغارتمية والدالة الأسية.

في الجامعة يتطرق طالب السنة الأولى:

للدوال الحقيقية المعرفة عن طريق تكامل ريمان ويدرس كذلك النشر المحدود.

ثم السنة الثانية يتطرق لدوال السلاسل العددية وسلسلة فورييه.

ثم السنة الثالثة الدوال القابلة للقياس والدوال العقدية.

لكن مفهوم الدالة الجامع بين كل هذه الأنواع وحالتها من إستمرار مع عدم إشتقاق لا يتطرق إليه كما ينبغي.

ففي الثانوي : لا يشرح للتلميذ فائدة التقريب التآلفي والفرق بين الدوال الجيبية والدوال الجبرية.

فيبقى التلميذ يظن في ذهنه أن كل الدوال صيغ جبرية لذلك يجد صعوبة مع الدوال المثلثية بل في تفكيره لا يعتبرها دوالا فهي عنده مجرد جداول حسابية ولا يستطيع الربط بينها وبين الصيغ الجبرية.

التلميذ كذلك لا يفرق بين كثير الحدود بمفهومه الجبري ودالة كثير الحدود ومعادلة من الدرجة الثانية فكلها في ذهنه شيء واحد.

التلميذ كذلك لا يفرق بين الدالة ورسمها البياني.

أما في الجامعة فالطالب لا يدرك الفرق بين وجود دالة أصلية وكتابة دالة أصلية بصيغ مألوفة.

ولا يستطيع تصور دالة مستمرة لكنها غير قابلة للإشتقاق عند أي نقطة كدوال ويستراس.

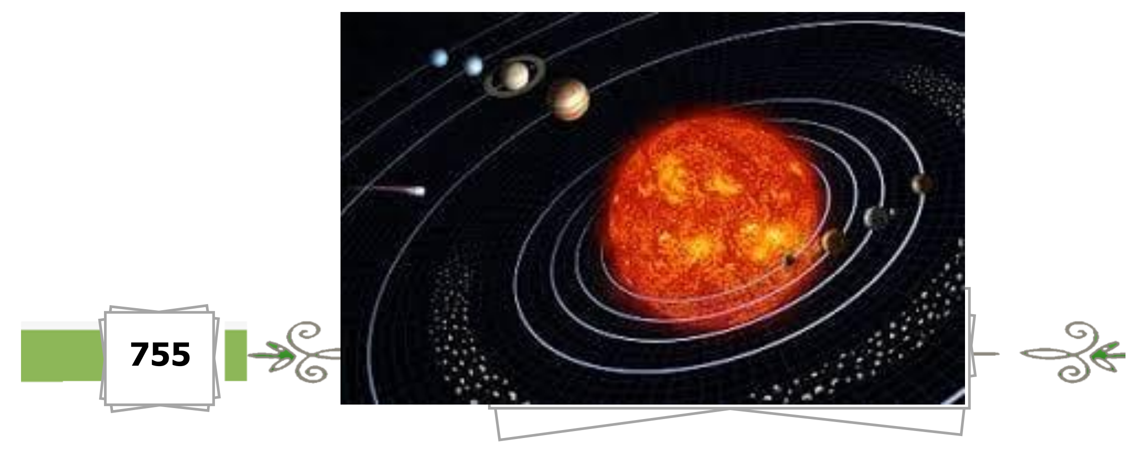
ولا يكاد يربط بين مفهوم الدالة والسلاسل العددية.

كل هذا سببه واحد أن التدريس يتم عبر مراحل ومقسم لكنه غير مترابط فهو كلبنات بناء تبنى بها المفاهيم لكنها في النهاية تحتاج ربطا وصقلا.

فالربط بين المفاهيم وتبيين الفروق لا يتم في المنهج الدراسي إنما تترك المفاهيم مشتتة بين الدروس والسنوات.

فإن لم يقم الطالب بعمل شخصي لإعادة النظر فيما درسه حول الدوال فهو لا يستطيع هضم كل هذا.

إن الذي ينقص في المناهج التعليمية الربط بين المعارف وتوضيح الفروق فبهذا تضبط المفاهيم وتهضم بشكل صحيح.



المشاغب المجنون

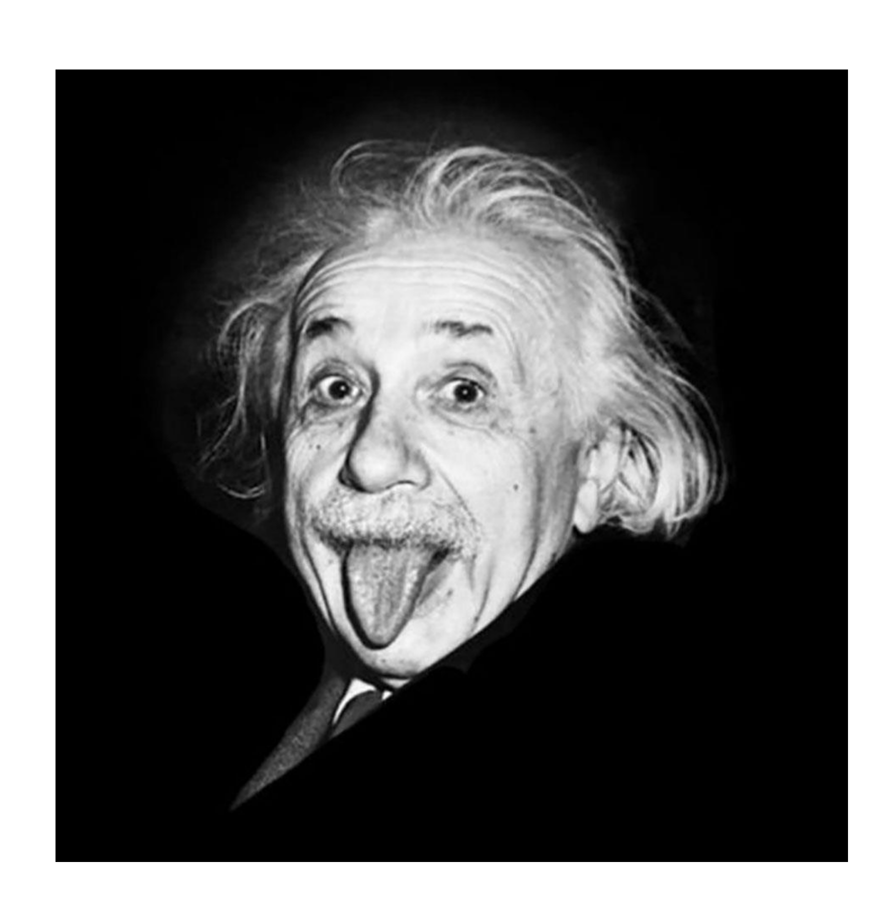
نحن نعلم وأنت لا تعلم.

نعم أهل العلم مجانين فالمجنون من غاب عقله والعوام لا يرون عقلا في كثير مما يقوله العلماء.

فمن يصدق أن النجوم التي يراها بأم عينيه ليست في المكان الذي يراها فيه وأن المالانهاية التي لا يراها في ظاهر الواقع يسير عليها باطنه وأن وراء العشوائية لا عشوائية وأن الفراغ نصنع منه مجموعة غير قابلة للعد فأي جنون هذا يجمع بين الصناعة من الفراغ وعدم قابلية العد وينتج عنه تشوه الفضاء الزمكاني بالكتلة!!!

فليس من شيء رفض تصديق كبار المسؤولين من الحيش الامريكي للعلماء عند التحضير للأقمار الصناعية لنظام الجي بي أس إذ أخبروهم أنهم عليهم الأخذ بتأثير الجاذبية على الزمن التي تنبأت به النسبية العامة فرموا ذلك ظهريا إذ كيف يصدقون أن الزمن يتمدد فكانت المفاجأة فساعات الأقمار الصناعية تخالفت مع الأرضية فما كان على الجيش إلا الإذعان للعلماء.

ليس للعوام إلا التسليم لعلم العلماء لا تصديقا لهم إنما ذلك أنهم أول منتفع بعلمهم فيتركون الشقاء للعلماء والرفاهية لهم وليس ذلك إلا لنبل نفوس العلماء ذلك أنهم يتورعون عن قول نحن نعلم وأنت لا تعلم لكنهم يقولون نحن نجهل وأنت تقول أنا لا أجهل فيميل العوام لمن يزعم أنه لا يجهل فيحكمونهم عليهم فزادوهم جهلا على جهل.



عندما يشارك الإعلام في صناعة الحضارة، لا تستهينوا بالقدوة فأطفال اليوم رجال الغد...

سنة 1919 قام آرثر إدينجتون بتنظيم حملة لأحد الجزر لقياس مواقع بعض النجوم بجانب الشمس عند كسوفها وذلك للتحقق من تأثير عدسة الجادبية التي تنبأت بها النظرية النسبية العامة، ذلك أن ضوء النجوم ينحرف عند المرور بجانب الشمس بسبب تشويه كتلة الشمس للفضاء الزمكاني فهو يتبع خطوط الجاذبية.

قياسات آرثر وإن كانت غير دقيقة أكدت الحسابات المتوقعة من النظرية النسبية.

نزل الخبر حينها على كل الصفحات الأولى من الصحف وكان حديث المتخصص والعامي، حيث أنهى نهائيا كل إعتراضات معارضي النسبية.

بضع سنوات بعدها بداية من العشرينات نشر حوالي إثنين وعشرين فيزيائي أغلبهم من الشباب من دول مختلفة وبدون توافق بينهم أبحاثا علمية مما أحدث نهضة سميت بميكانيك الكم.

من الإثنين والعشرين تحصل ستة عشر واحد منهم على جائزة نوبل....

بعض الشخصيات وسنها سنة 1919

Niels Henrik David Bohr 34 ans prix nobel 1922, Danois

Werner Karl Heisenberg 18 ans prix nobel 1932 , Allemand

Erwin Schrödinger 32 ans prix nobel 1933, Autrichien

Louis Victor de Broglie 27 ans prix nobel 1929, Français

Paul Adrien Dirac 17 ans prix nobel 1933, Britannique

Max Born 37 ans prix nobel 1954, Allemand

PAULI Wolfgang 19 ans prix nobel 1945, Autriche/Suisse

JORDAN Pascual 17 ans Médaille Max-Planck 1942, Allemand

Robert Mulliken 23 ans Prix nobel 1966, USA

BOSE Satyendranath 25 ans

Padma Vibhushan in literature & education

Padma Vibhushan 1954, Indien

James Chadwick 28 ans prix nobel 1935, Angleterre

Enrico Fermi 18 ans peix nobel 1938 , Italien

Linus Pauling 18 ans prix nobel 1954, USA

قد يقال وأين نحن اليوم من الإعلام ؟

فالجواب أن الإعلام اليوم لم يعد يقتصر على قنوات تلفزيونية أوفضائية بل تعداه لوسائل كثيرة، على أننا نمتلك كمسلمين وسائل إعلامية تاريخية، ودينية



فالمسجد يعتبر المنبر الأول للإعلام ينشر فيه العلم ويعود فيه الناس على طلبه،
والمدارس القرآنية منبر للإعلام يمكن لكل منا مساندتها ماديا ومعنويا ويستفيد منها بتسجيل أبنائه فيها ليحفظوا القرآن ويتعلموا دينهم،
والفايسبوك منبر للإعلام فيمكن لكل منا توعية من حوله والمشاركة في بناء المجتمع،
والوالدان منابر للإعلام في منازلهم فعلم ولدك حب العلم وقراءة الكتب وابنك ينبت على ما يراه في المنزل،
ومجالسنا منبر للإعلام يمكن لكل منا نصح صاحبه.
إن الشرع قد لخص مبدأ القدوة من قرون في نصوص عدة منها ما أخرجه البخاري في "صحيحه" (1385)، ومسلم في "صحيحه" (2658) ، من حديث أَبِي هُرَيْرَةَ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُ، قَالَ: قَالَ النَّبِيُّ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ : كُلُّ مَوْلُودٍ يُولَدُ عَلَى الفِطْرَةِ ، فَأَبَوَاهُ يُهَوِّدَانِهِ ، أَوْ يُنَصِّرَانِهِ ، أَوْ يُمَجِّسَانِهِ ، كَمَثَلِ البَهِيمَةِ تُنْتَجُ البَهِيمَةَ هَلْ تَرَى فِيهَا جَدْعَاء . أه
ومنها قوله تعالى : وَلْتَكُن مِّنكُمْ أُمَّةٌ يَدْعُونَ إِلَى الْخَيْرِ وَيَأْمُرُونَ بِالْمَعْرُوفِ وَيَنْهَوْنَ عَنِ الْمُنكَرِ ۚ وَأُولَٰئِكَ هُمُ الْمُفْلِحُونَ (104). آل عمران
فكونوا قدوة حسنة لألنائكم وأبناء غيركم.

إن الحضارة تصنع في مهود الأطفال

ما زلنا نقرأ في كتب التاريخ والسير قصصا عن أبطال من الصحابة رضوان الله عليهم ومن عظماء المسلمين ولولا أنها وصلت إلينا بطرق صحيحة لظننا أنها خرافية ذلك أننا لا نكاد نرى لها مثيلا في مجتمعنا المعاصر ونتعجب من كثرتها في مجتمعات اجدادنا.

لكن لو رجعنا لطبيعة المجتمع في زمانهم لأدركنا أن المسألة مسألة ثقافة مجتمع، فالمجتمع الذي يميل إلى صناعة الرجال في تفكيره وإهتماماته سيصنع في المستقبل رجالا والمجتمع الذي يفضل الملاهي والتفاهات على حساب الأولويات سيصنع بهلوانات وصبيانا.

إن الأب الذي لا يقرأ ويمضي جل وقته في المقاهي أو مشاهدة المباريات ويكتفي بالعمل للأكل والشرب لا يدرك أنه يعلم ابنه ليسير على خطاه فلا ريب أن أزمتنا اليوم أزمة فكرية.

كيف نريد صناعة جيل ينهض بالأمة إن كانت غاية أحلامنا هي أكل وشرب ولهو.

قال الشاعر :

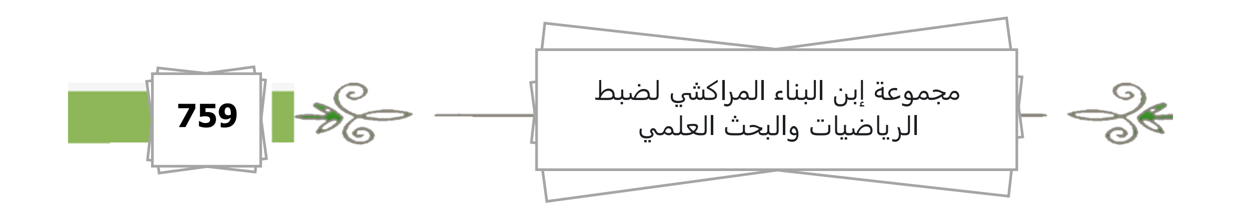
وَإِنَّمَا الأُمَمُ الأَخْلَاقُ مَا بَقِيَتْ *** فَإِنْ هُمُ ذَهَبَتْ أَخْلَاقُهُمْ ذَهَبُوا

الفرق بين مجتمعنا وبين مجتمع أجدادنا واضح المعالم ثقافة وعلما وأهدافا، فمجتمع أجدادنا كان يهتم بالعلم أيما إهتمام حتى أصبح ثقافة عوام فقد روى ابن العربي في أحكام القرآن أن أبا الفضل المراغي كان يقرأ بمدينة السلام ، فكانت الكتب تأتي إليه من بلده ، فيضعها في صندوق ، ولا يقرأ منها واحدا مخافة أن يطلع فيها على ما يزعجه أو يقطع به عن طلبه.

فلما كان بعد خمسة أعوام ، وقضى غرضا من الطلب ، وعزم على الرحيل شد رحله ، وأبرز كتبه ، وأخرج تلك الرسائل وقرأ منها ما لو أن واحدة منها قرأها في وقت وصولها ما تمكن بعدها من تحصيل حرف من العلم ، فحمد الله تعالى ، ورحل على دابته قاشه ، وخرج إلى باب الحلبة طريق خراسان ، وتقدمه الكري بالدابة ، وأقام هو على فامي يبتاع منه سفرته.

فبينما هو يحاول ذلك معه إذ سمعه يقول لفامي آخر : أي فل ، أما سمعت العالم يقول يعني الواعظ : إن ابن عباس يجوز الاستثناء ولو بعد سنة ، لقد اشتغل بالي بذلك منه منذ سمعته يقوله : وظللت فيه متفكرا ; ولو كان ذلك صحيحا لما قال الله تعالى لأيوب : { وخذ بيدك ضغثا فاضرب به ولا تحنث } . وما الذي كان يمنعه من أن يقول حينئذ : قل إن شاء الله ؟ فلما سمعته يقول ذلك قلت : بلد يكون الفاميون به من العلم في هذه المرتبة أخرج عنه إلى المراغة ؟ لا أفعله أبدا ; واقتفى أثر الكري ، وحلله من الكراء ، وصرف رحله . وأقام بها حتى مات رحمه الله . اه

فانظروا رحمكم الله كيف كان المستوى الثقافي لأجدادنا حتى جعل الحماليين ينتبهون لنكت لا ينتبه لها كبار علماء زماننا.



إن الله عز وجل قرن إنحطاط الأمم بالإشتغال بحب الدنيا والملاهي واستحلال المحرمات فقال تعالى :(وَإِذَا أَرَدْنَا أَن نُّهْلِكَ قَرْيَةً أَمَرْنَا مُتْرَفِيهَا فَفَسَقُوا فِيهَا فَحَقَّ عَلَيْهَا الْقَوْلُ فَدَمَّرْنَاهَا تَدْمِيرًا (16)). الإسراء 16

وجاء في الحديث :عن ثوبان رضي الله عنه قال: قال رسول الله صلى الله عليه وسلم: ((يوشك الأمم أن تداعى عليكم، كما تداعى الأكلة إلى قصعتها. فقال قائل: ومِن قلَّةٍ نحن يومئذ؟ قال: بل أنتم يومئذٍ كثير، ولكنكم غثاء كغثاء السَّيل، ولينزعنَّ الله مِن صدور عدوِّكم المهابة منكم، وليقذفنَّ الله في قلوبكم الوَهَن. فقال قائل: يا رسول الله، وما الوَهْن؟ قال: حبُّ الدُّنيا، وكراهية الموت)) أبو داود وأحمد وصححه الالباني

ولو نظرنا إلى المجتمع الغربي اليوم رغم المفاسد التي يعيشها إلا أن ثقافة العلوم مازالت متغلغلة في نفوس أفراده وإن كانت تتلاشى يوما بعد يوم.

هذه الثقافة التي كانت حاضرة بقوة من قرن.

في سنة 1919 قام آرثر إدينجتون بتنظيم حملة لأحد الجزر لقياس مواقع بعض النجوم بجانب الشمس عند كسوفها وذلك للتحقق من تأثير عدسة الجاذبية التي تنبأت بها النظرية النسبية العامة، ذلك أن ضوء النجوم ينحرف عند المرور بجانب الشمس بسبب تشويه كتلة الشمس للفضاء الزمكاني فهو يتبع خطوط الجاذبية.

قياسات آرثر وإن كانت غير دقيقة أكدت الحسابات المتوقعة من النظرية النسبية.

نزل الخبر حينها على كل الصفحات الأولى من الصحف وكان حديث المتخصص والعامي، حيث أنهى نهائيا كل إعتراضات معارضي النسبية.

بضع سنوات بعدها بداية من العشرينات نشر حوالي إثنين وعشرين فيزيائي أغلبهم من الشباب من دول مختلفة وبدون توافق بينهم أبحاثا علمية مما أحدث نهضة سميت بميكانيك الكم.

من الإثنين والعشرين تحصل ستة عشر واحد منهم على جائزة نوبل.

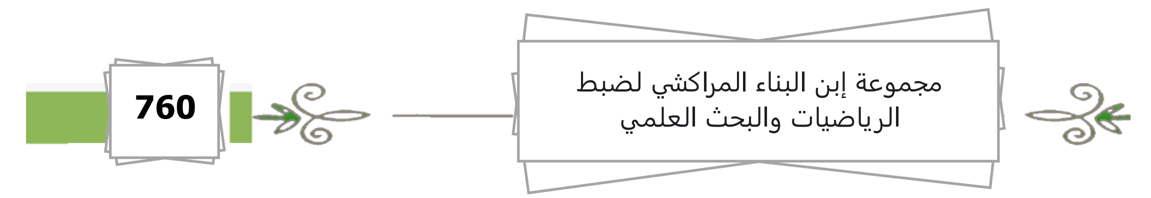
المجتمع الغربي من قرن كان المشهورين زمانهم هم العلماء كأينشتاين وماري كوري فلا نتعجب من صناعتهم لأجيال من العلماء وتفوقهم في المجال العلمي.

ولا نتعجب اليوم من بداية إنحطاطهم ولحاق أمم أخرى بهم كالصين، فالمجتمع الغربي قد ترك مسار العلم ليتبع مسار الملاهي فانغمس في أزمات متتابعة وكذلك كانت سنة الله في خلقه ما إرتفعت حضارة إلا إنحطت.

الذي يجب علينا اليوم تجاه أمتنا هو تربية جيل جديد يعطى للأولويات أهميتها فيكون همه طلب العلم وما يفيد لا الرقص على النغمات الصاخبة ولبس السراويل الممزقة والإهتمام بقصات الشعر والجري وراء كرة جلدية.

نعم الترفيه لابد منه على أن يكون مباحا، لكن عندما يصبح الترفيه من الأولويات والعلم والتطور من الكماليات فابشر بالإنحطاط.

إن الدنيا موازين متى قلبت إنقلبت .



ملحق : بعض الشخصيات المشاركة في صياغة ميكانيك الكم وسنها سنة 1919

Niels Henrik David Bohr 34 ans prix nobel 1922, Danois

Werner Karl Heisenberg 18 ans prix nobel 1932 , Allemand

Erwin Schrödinger 32 ans prix nobel 1933, Autrichien

Louis Victor de Broglie 27 ans prix nobel 1929, Français

Paul Adrien Dirac 17 ans prix nobel 1933, Britannique

Max Born 37 ans prix nobel 1954, Allemand

PAULI Wolfgang 19 ans prix nobel 1945, Autriche/Suisse

JORDAN Pascual 17 ans Médaille Max-Planck 1942, Allemand

Robert Mulliken 23 ans Prix nobel 1966, USA

BOSE Satyendranath 25 ans

Padma Vibhushan in literature & education

Padma Vibhushan 1954, Indien

James Chadwick 28 ans prix nobel 1935, Angleterre

Enrico Fermi 18 ans peix nobel 1938 , Italien

Linus Pauling 18 ans prix nobel 1954, USA





قلة الضبط مشكل ثقافي.

قلة الضبط مشكلة لا تتعلق بالرياضيات فقط بل هي عامة في جميع الميادين عند شعوب دول العالم الثالث إذ يعتمدون على القيل والقال في أي شيء : طب ، شرع، تجارة.....

فتراهم يتحدثون في كل شيء بدون الرجوع لأهله.

أما الدارس في الجامعة فهو يدرس علمه على أسس مضبوطة عادة لكن الطبع يغلب التطبع فمتى تخرج من الجامعة عاد لعادته من تتبع القيل والقال إلا إن تدارك نفسه بترويضها على الضبط.

لذلك على الأستاذ أن لا يتوقف على المطالعة وأن يديم البحث والنظر في الكتب والمراجع والتحسين من مستواه ولذلك فوائد كثيرة منها لشخصه وللمجتمع:

أما لشخصه:

تجنب الملل بتقديم الجديد

الراحة النفسية لأنه بذل جهده

تنشيط العقل فلا يخمل عند الوصول للشيخوخة ولا يشيخ مبكرا

وبعد التقاعد تبقى له هواية فيطالع فلا يمل ولا يضيع وقته بل يمكنه مواصلة العطاء.

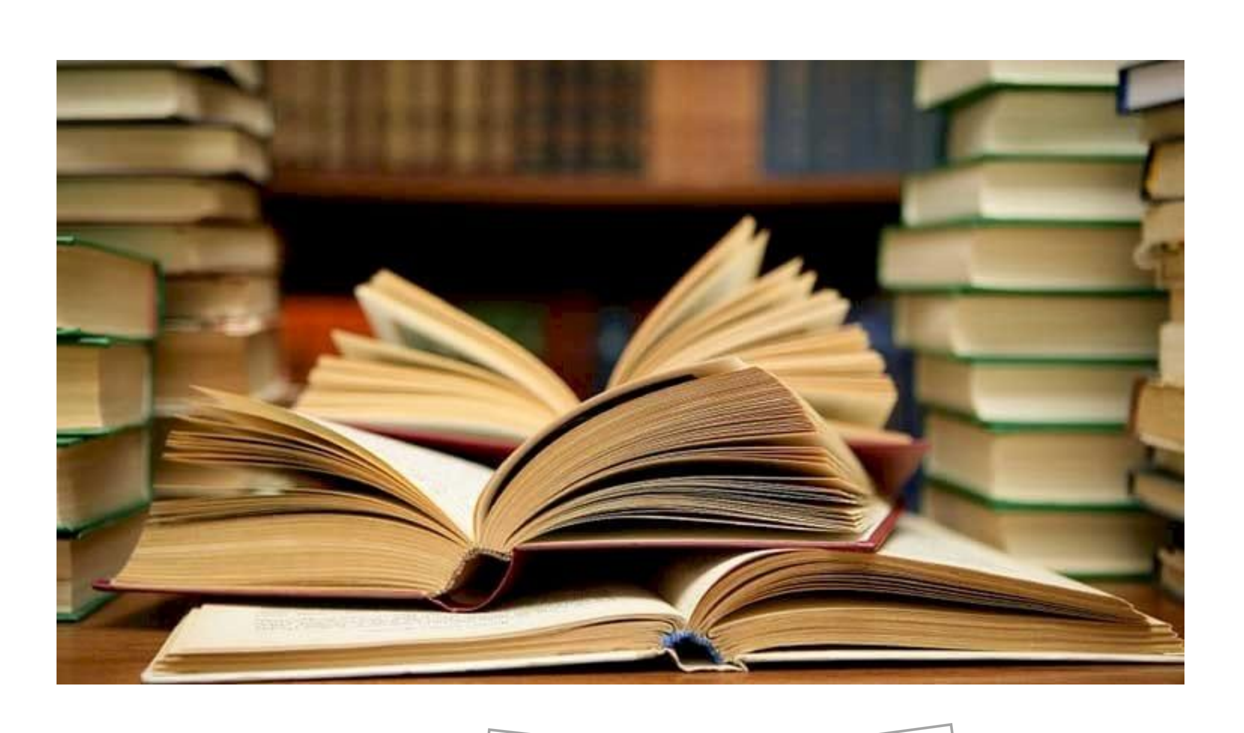
أما للمجتمع:

تحسين الآداء وإفادة التلاميذ وصناعة جيل للمستقبل.

اختصار الوقت على نفسه وعلى الناس إذ البناء المتين لا يحتاج لكثرة ترميم.

العطاء بعد التقاعد فيمكنه تقديم دروس خصوصية أو توجيه الجيل القادم.

العقل متى واصلنا تغذيته فإنه ينمو ويحسن من حالة صاحبه.



عندما يقيس النحويون ... يا استاذ لا تتوقف عن المطالعة.

من حوالي ثلاثين سنة وضع لنا أستاذ اللغة جملة إسمية للإعراب من نوع : خالد يذهب إلى المدرسة.

فرفعت أصبعي للإجابة وبعد الإذن قلت : فاعل مقدم على الفعل.

فضحك الاستاذ وقال : يا سلام منذ متى يسمى المبتدأ فاعلا....

بالطبع ما قمت به هو قياس عقلي فمن الواضح أن خالد فاعل وكيف لا يكون كذلك وهو من يذهب...

بعد أكثر من عشرين سنة كنت أطالع بعض المواقع في اللغة فإذا هم يتكلمون عن هذا النوع من الجمل وأن هناك خلافا بين مدرستي البصرة والكوفة بين من يجعل الإسم مبتدأ في الجملة الإسمية وبين من يجعله فاعلا مقدما على الفعل إذا تقدم عن فعله.... وقبل ذكر من هو صاحب كل قول منهما أعطيكم بعض المعلومات: البصريون لا يتوسعون في قياس اللغة بل يشترطون جريه على الألسن العربية ممن لم تختلط لغتهم بعكس الكوفيين فهم يتوسعون فيه وقد يقيسون على الشاذ.

الكوفة بلد أبي حنيفة النعمان إمام مذهب الاحناف وقد توسعوا في الرأي. أما البصرة فبلد الإمام الحسن البصري ومذهبه قريب من مذهب الظاهرية

اظنكم عرفتم من نظر لخالد هنا بالفهم فجعله فاعلا ومن نظر للشكل فجعله مبتدأ فحتى عند أهل اللغة هناك من يقيسها بعقله.

وإليكم هذه الفتوى اللغوية.

الفتوى (1749) : وعليكم السلام ورحمة الله وبركاته، وبعد: فما عليه البصريون وجوب تأخّر الفاعل عن فعله، وما كان ظاهره تقدم الفاعل وجب تقديرُ الفاعل ضميرًا مستترًا متأخرًا، وكان المقَدَّم إما مبتدأ نحو (محمدٌ قام) أي قام (هو)، وإما فاعل لفعل محذوف يفسّره المذكور كما في نحو قوله تعالى: {وَإِنْ أَحَدٌ مِنَ الْمُشْرِكِيَن اسْتَجَارَك}؛ لأن (إنْ) الشرطية مختصة بالدخول على الجمل الفعلية، فالتقدير: (وإن استجارك أحد من المشركين استجارك). ويرى الكوفيون جوازُ تقديم الفاعل تَمَسُّكاً بقول الزَّبَّاء: مَا لِلْجِمَالِ مَشْيُهَا وَئِيدَا فقالوا لا يجوز أن يكون (مشيها) مبتدأ؛ لأنه يكون بلا خبر، لأن (وئيدًا) حال منصوبة، فوجب أن يكون (مشيها) فاعلًا لـ(وئيدًا) مقدمًا عليه، واحتجوا كذلك بقول القائل: صَدَدْتِ فأَطْوَلْتِ الصُّدودَ وقَلَّما ** وِصالٌ على طُول الصُّدُودِ يَدُومُ وهذا كله عند البصريين ضرورة فـ(مَشْيُهَا) مبتدأ حُذِف خبره أي (يَظْهر وَئِيدًا)، وكذلك (وصال) فاعل بفعل محذوف قبله تقديره (يدوم) فسّره المذكور. وأميل إلى قول البصريين؛ لقلة ورود ما كان ظاهره تقدم الفاعل، ولأن الفاعل يظهر في حالة التثنية والجمع، فنقول: (الرجلان قاما) و(الرجال قاموا). اللجنة المعنية بالفتوى: المجيب: أ.د. محروس بُريّك أستاذ النحو والصرف والعروض المشارك بكليتي دار العلوم جامعة القاهرة، والآداب جامعة قطر راجعه: أ.د. محمد جمال صقر (عضو المجمع) رئيس اللجنة: أ.د. عبد العزيز بن علي الحربي (رئيس المجمع)



المشاغب

عندما يتحول الأستاذ إلى عامل في الماكدونالد

إن أكبر خطأ قامت به المنظومة الأكاديمية هو تحويل الأستاذ من غارس للمفاهيم الإبداعية في قلوب التلاميذ ومنير لطريقهم حتى يتلقوها كما صنعها مبتكروها إلى مجرد موزع لدروس برامج حددت طريقة توزيعه مسبقا في علب مغلقة لا تتوافق مع ميول التلاميذ.

إن الرياضيات لا توزع كما يوزع الأكل في الصحون إنما تطهى وكل أستاذ يطهيها بنكهة يشتهيها كل تلميذ عنده.



المشاغب

لنفكر كما يفكر الرياضياتيون فإن الإنسان يولد في أربع أبعاد ثم تسجنه المدرسة في بعدين ...

إن الرياضياتي إذا عجز عن حل مسألة كسر جدرانها ليصنع لها عالما أكبر !!! لكن كيف ذلك ؟

لننظر إلى طريقة تفكير الرياضياتيين عبر الزمن ولنبدأ بهذا السؤال:

ما هو قياس مجموعة الأعداد الحقيقية بين الصفر والواحد والتي لا يظهر في كتابتها العشرية الرقم 1 ؟

لو ذهبنا نحاول حصر هذه المجموعة بإستعمال تقاطع مجموعات أو إتحادها، وحساب قياسها فسنكتب صفحات وصفحات تكاد تكون خالية من المعنى.

لكن الرياضياتي يرى بحدسه أن هذا السؤال له مفهوم إحتمالي فهو يرجع لطرح السؤال التالي:

ما إحتمال إختيار عدد بين الصفر والواحد لا يظهر في كتابته العشرية الرقم واحد ؟

ذلك أن نظرية الإحتمالات تلتقي بنظرية القياس عندما يكون منتهيا.

من هذه الناحية يكفي أن نلاحظ أن إحتمال عدم ظهور الواحد في الرتبة الأولى من الكتابة العشرية للعدد هي 9/10 وكذلك الرتبة الثانية والثالثة...

فإحتمال عدم ظهوره كليا هو نهاية الجداء الإحتمالي $(9/10)^n$ والتي تساوي الصفر.

ومنه قياس المجموعة معدوم.

قد يستغرب البعض كيف فكرنا في المرور من مفهوم لآخر ؟

هذا الإستغراب ناتج عن عدم التأمل في طريقة الرياضياتيين في حل المسائل خاصة وعن طريقة التدريس عامة والتي لا تلقي الضوء على الروابط بين المسائل.

فمن منا من لم يدرس تزايد متتالة عبر دراسة صيغتها في مجموعة الأعداد الحقيقية ؟

فبالمرور من مجموعة الأعداد الطبيعية إلى الحقيقية ابتكر الرياضياتيون آليات جديدة لحل المسائل كالإستمرار والإشتقاق.

وكذلك فعل كاردان عند ابتكار العدد التخيلي i فخرج من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى المركبة لحل مسائل تبدو مستحيلة الحل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

وكذلك فعل غالوا بابتكار الزمر.

وكذلك فعل ريمان عندما ابتكر الدالة زيتا فقد صنع جسرا بين عالم الأعداد الأولية الذي يبدوا متقطعا لا تحكمه قاعدة مع عالم التحليل العقدي عبر الدالة زيتا والتي يمكن دراستها تحليليا.

وكذلك فعل لوبيغ بابتكار التكامل عبر القياس فقد أجاب عن السؤال المطروح ما هي الدوال القابلة للمكاملة عبر مفهوم ريمان.

وكذلك فعل غودل في مبرهنة عدم الإكتمال عندما ربط بين المنطق والخوارزميات العددية.

وكذلك فعل بول كوهين عندما ابتكر طريقة الإجبار والتي توسع نظاما مسلماتيا لنظام أكبر



وما فعله من قريب أندري ويلز عندما برهن على فرضية فيرما الأخيرة عبر آليات هائلة من التحليل المعاصر.

فكما نرى لا يتورع الرياضياتيون عن إختراع آليات توسع المفاهيم إلى مفاهيم أكبر بل وصل بهم الأمر إلى دراسة توسيعات النظام المسلماتي نفسه.

والأمر لا يتعلق فقط بالرياضيات فقد نحت الفيزياء المعاصرة هذا المنحى.

عندما وضع نيوتن قواعد الميكانيك بناها على مفهوم جامد للفضاء والزمان فكانا مجرد إطار حسابي.

لكن كيف نستطيع المرور من الواقع والذي هو متقطع فالمادة مكونة من ذرات نحو عالم الرياضيات المستمر ؟

الذي قام به نيوتن والفيزيائيون بعده هو تجريد الواقع عبر تشويهه من متقطع إلى مستمر فإن كانت الدائرة التي نرسمها في الواقع هي مجرد جزيئات أقرب منها لرؤوس المضلع منها لخط مستمر فهي في نظرنا مستمرة يمكننا تقريبها بذلك لحساب طولها وهذا كاف في التقريبات الذي يتقبلها البشر، على الأقل في تلك القرون.

فالفيزياء تقوم بتشويهين تشويه الأعداد الكبيرة بنقلها للمالانهاية ثم تشويه الرياضيات عند التطبيق بتقريب المهمل إلى صفر.

هذه الطريقة كانت ناجعة إلى أن ظهرت القوانين الكهرومغناطيسية لماكسويل.

وهنا أدرك الفيزيائيون أن طريقتهم التي يقربون بها الواقع لم تعد ناجعة خاصة مع تحسين طرق الحسابات وتطور دقتها.

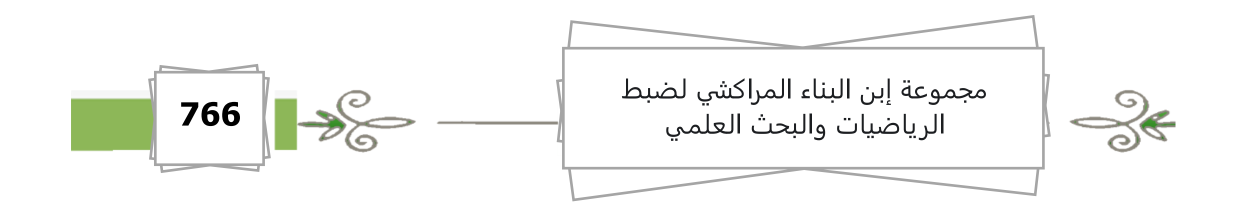
وهنا نذكر عبقرية أينشتاين فالذي جاء به مختلف عن الفيزياء التي كانت قبله إذ نحنى منحى الرياضياتيين في التفكير، فلما لا يصبح الفضاء الزمكاني نفسه كائنا يتغير مع القوانين الفيزيائية ؟

النظرية النسبية العامة وسعت مفهوم الفضاء الجامد الذي كان في نظرية نيوتن فبعد أن كانت الكتلة تسير في إطار حسابي رياضياتي أصبحت تؤثر في الفضاء الزمكاني ككائن فيزيائي.

إن نحت النسبية هذا المنحني فقد نحت فيزياء الكم المنحى الآخر إذ حادت عن تشويه الواقع المتقطع نحو الإستمرار لدراسته كواقع متقطع وهذا ما نسميه بالكوانتا.

فبعد أن كانت الفيزياء تعتبر القوى الكهرومغناطسية تأثير حقل مستمر، اعتبرتها ميكانيك الكم تبادل جسيمات تدعى بوزن جوج Boson de jauge

لم تتوقف الفيزياء عند هذا الحد بل في محاولة الجمع بين النظرية النسبية وميكانيك الكم ظهرت نظريتان أحدهما نظرية الحبال والتي نحت منحى الرياضياتيين فوسعت الفضاء من أربعة أبعاد إلى إثنى عشر في محاولة للجمع بين القوى الأربعة لكنها أبقت على النظرة المتقطعة لتأثير الجسيمات.



أما النظرية الثانية فنظرية الجاذبية الكمية بالحلقات والتي سعت إلى تكميم النظرية النسبية عبر إعتبار الفضاء الزمكان متقطعا لا مستمرا.

فكما نرى طريقة الرياضياتيين في التفكير طغت على جميع العلوم حتى في ميدان البورصة والمالية فالرياضياتيون لا يتوقفون عن توسيع آلياتهم بالمرور من مفاهيم إلى مفاهيم أكبر لحل المسائل المستعصية.

ولعل هذا الذي ننتظره منهم لحل مسائل مثل فرضية ريمان أو فرضية سيراكيس.

Conjecture de Syracuse

الذي علينا تغييره اليوم هو الطريقة الكلاسيكية في التدريس والتي تسجن فكر التلميذ في طرق ضيقة للحلول فتجعله غير قابل للإبداع.

إنما الرياضيات علم إبداع لا علم جمود.





المشاغب

عندما يأكل القط الدلاع. التلميذ بين الذكاء الفطري والجمود البشري.

ما زلت أذكر تلك الأيام في الثانوي، وشغفي بالرياضيات فيها وقراءة كل ما أجده حولها.

وجدت يوما كتابا جامعيا يتكلم عن الاشتقاق الجزئي فربطت بين مفهومه وبين النقاط الصامدة في منحنيات الدوال الوسيطية التي كنا ندرسها فذهبت إلى أستاذي في الرياضيات فقلت له:

لماذا لا نشتق جزئيا الدالة الوسيطية بالنسبة للوسيط فبما أنها صامدة بالنسبة للمتغير عند النقطة الصامدة فمشتقها الجزئي بالنسبة للوسيط سيكون معدوما.

نظر إلى أستاذي ثم قال : عندما تذهب للجامعة وتدخل ميدان البحث العلمي سنجري البحوث معا.

سنواتها رزقنا الله بأستاذ متمكن من مادته حفظه الله وجازاه عنا كل خير.

لكن ليس هذا حال الجميع فكم من تلميذ رفضت أفكاره لخروجها عن المعتاد.

عندما يأكل القط الدلاع ؟ لماذا هذا العنوان ؟

لشد الانتباه إلى التناقض الصارخ الموجود في المنظومة التعليمية عالميا ذلك أنها صنفت التلاميذ في خانات لا يحق لهم الخروج منها فلو قمت بالاشتقاق الجزئي في الباكالوريا لحساب النقطة الصامدة لوجدت الصفر ينتظرني بدعوى الخروج من البرنامج ؟

وما هو برنامج دراسة المشتقة إن لم يفهم التلميذ أن الأمر لا يتعلق بالمجهول x إنما بتغير صورة الدالة مقارنة بسابقتها كيفما كانت، ألا يستعمل التلميذ الاشتقاق لحساب السرعة مع المتغير t ؟

ما هو البرنامج ؟ فإن كان المقصود سلوك مواضيع مقررة بدل أخرى لضبطها فهذا صحيح من الناحية المنهجية لكن أن يختزل البرنامج في طرق حل معينة فهذا ما حطم مستوى التلاميذ.

فكم هي الأفكار النيرة التي يكتشفها بعض التلاميذ لكن تشطب بدعوى مخالفتها للبرنامج ولو تأمنا فيها جيدا لوجدنا الأمر غير ذلك بل هي لب مفاهيمه لكن خالفت في طريقتها المعتاد في الميدان.

يولد الطفل في أربعة أبعاد ثم تسجنه المدرسة في بعدين....

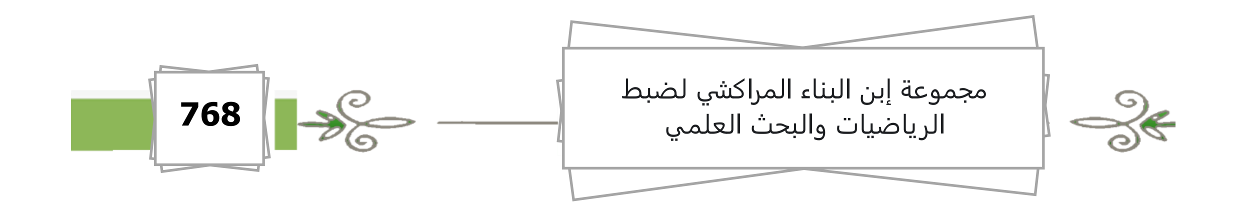
إن الذكاء الفطري للطفل أكبر مما نتصور لكنه يحجر بين مفاهيم سائدة منذ السنوات الأولى من طفولته.

ويستمر الأمر كذلك إلى الجامعة بل في ميدان البحث العلمي فكل من يخرج عن المألوف يقصى من المنظومة فالمنظومة تحمي نفسها وفي حمايتها جمود للعلم.

التقدم العلمي يحتاج لحرية التفكير بل لبعض من الجنون أحيانا.

لو رجعنا إلى التاريخ ونظرنا في حال عباقرة العلوم لوجدناهم أشخاصا خرجت من المعتاد حتى أتهمت بالجنون.

فليس من شيء أن يكون أينشتاين مكتشف النسبة والبعض يظن أن ذلك راجع لعبقريته لكن الأمر غير ذلك.



مكونات النسبية كانت متاحة أمام الجميع زمن أينشتاين بل اقترب منها الرياضي بوان كاري لكن ميزة أينشتان أنه كان خارج الميدان الأكاديمي إذ كان يعمل في مكتب تدوين حقوق الإبتكارات.

فمن طبيعة عمله، لم يكن لديه ما يخسره عندما نادى بخطأ ميكانيك نيوتن ومن يجرءٌ على ذلك بين الأكاديمين وسيف الإقصاء ينتظره!!

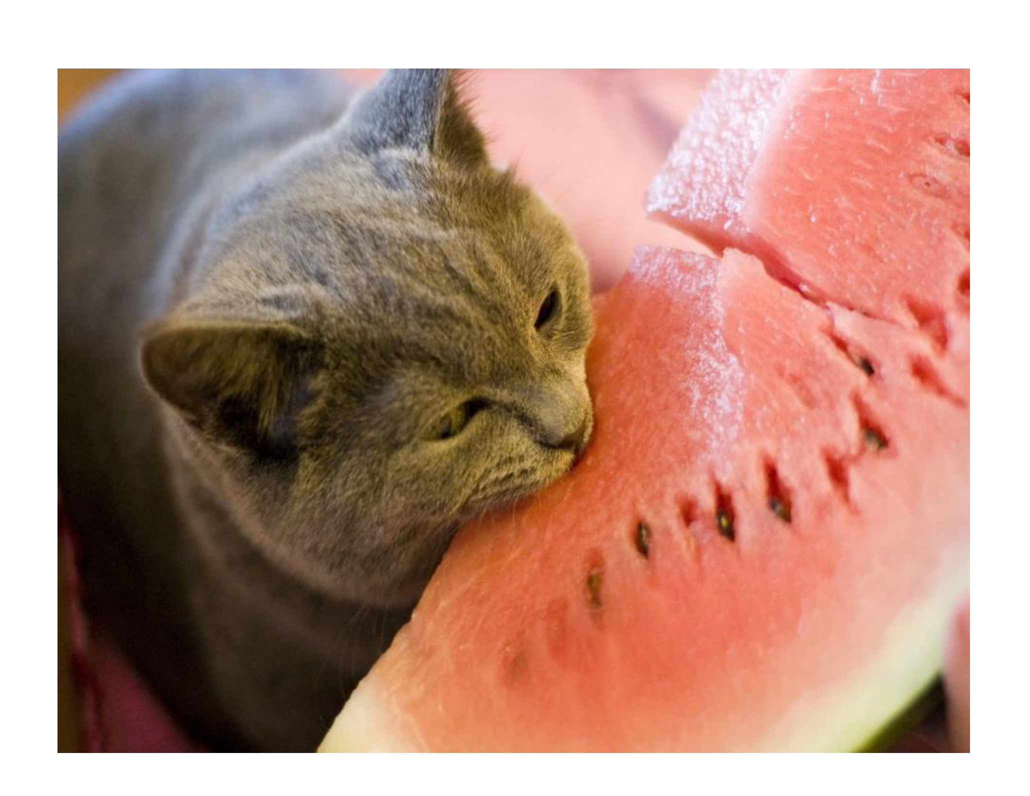
وما حال كنتور قبله ببعيد فقد أقصي بسبب خوضه ميدان المالانهاية.

بل أينشتاين نفسه كاد أن لا يقبل كأستاذ جامعي سنة 1911 لأن المجلس العلمي كان يعتبر مقاله في طبيعة الضوء الفوتونية خطأ شنيع ، مقال أخذ عليه أينشتاين جائزة نوبل سنوات بعدها (1921) بعد ظهور ميكانيك الكم....

إن التقليد عدو التجديد لكن المجتمع بطبيعته محارب للتجديد وإن كان العوام يعذرون في ذلك بجهلهم فإن المنتسبين للعلم لا يعذرون.

بجب أن لا يحجر الأستاذ على فكر التلميذ إنما يكتفي بتوجيهه لضبط التفكير لا في ماذا يفكر وكيف يفكر إن أكثر السنوات عطاء فكريا هي سنوات الشباب ذلك أن الفكر الشاب لم يغلغل بسلاسل المعتاد.

فاتركوا أولادكم يعيشون في أربعة أبعاد بل فيما هو أكثر.



نحو تنقيط أفضل لإمتحان التلميذ، لما لا ننقط بالأعداد المركبة في تصحيح الإمتحان ؟

لما علامة الإمتحان حقيقية ؟ لما لا تكون علامة التلميذ قيمة متعددة الأبعاد ؟

قد تبدو الفكرة مجنونة أو لمسة إرهاف رياضي لكن لندقق في الأمر معا :

الإمتحان يهدف إلى تقييم مجموعة من القدرات والمعارف المختلفة النوع، فمنها من يعتمد على حفظ المبرهنات و كيفية تطبيقها ومنها نوع يتعلق بالبرهنة الرياضية والمفاهيم وغيرها...

فالتلميذ الذي يحفظ الحلول كما هو مشاهد اليوم يتحصل على علامة جيدة رغم أنه غير قادر عمليا على حل تمارين في نفس المبرهنات متى خرجت عن المألوف ولعله لم يفهم نصف مفاهيم المقرر.

العلامة الأحادية البعد لا تعطي نظرة صحيحة لمستوى التلميذ إنما هو تقييم عام يكاد يكون ميكانيكيا يدفع التلاميذ إلى جعل هدفهم الاول ليس استيعاب الدروس وإنما مخادعة ميكانيكية التنقيط للحصول على علامة أفضل.

لقد بنينا نظاما يهدف إلى تدريس التلاميذ باستعمال وسيرناه بوسلية التنقيط، وسيلة أحادية النظرة فأنقلبت اليوم موازين هذا النظام لتتحول هذه القيم الاحادية هدفا بدل أن تكون مجرد وسيلة .

نظام اليوم أصبح عمليا يهدف إلى تحصل التلميذ على افضل العلامات لا على استيعاب المقررات فتحولت الوسيلة إلى غاية بل عادت على غايتها بالبطلان.

ولا يشفع لذلك التقييمات المتعددة التي يضعها الأستاذ له لأنه في النهاية كل ما يهم هو المعدل ويبقى المعدل أحادي النظرة. بل هذه النظرة الأحادية تدفع إلى ترتيب التلاميذ في سلم واحد وكأنه يطلب من الجميع الدخول في قالب واحد فنلغي بذلك القدرات المختلفة التي يتمتع بها كل تلميذ اليوم والفرد في المجتمع غدا بل نلغي بذلك القدرات الإبداعية عند الأفراد لأنها غائبة من المنهج الدراسي.

لكن الأصل أن المجتمع مبني على التكامل والتعاضد بين الأفراد لا التنافس وأن الفرد يثبت وجوده بما يقدمه من إبداع فردي لا ما يقلد فيه غيره. هذه النظرة الأحادية في التقييم أصبحت اليوم في ظل المعلوماتية نظرة بدائية لابد من تغييرها لإيجاد وسائل أنجع لتقييم معارف التلميذ وتكوينهم بشكل أفضل.

فلما لا نعيد تفكير نظام التنقيط ؟ فبدل التقييم بقيم أحادية توضع علامات مركبة تعبر كل إحداثية منها عن مستوى التلميذ من ناحية معينة فهذا سيساعد على تحديد النواحي التي يجب على الأستاذ والتلميذ العمل عليها لتحسين المستوى بل تدفع التلميذ إلى مزيد من الإبداع.

بدل حساب معدل أحادي البعد لتكن هناك معدلات متعددة الأبعاد لتعطي نظرة أفضل لمستوى التلميذ فتدفعه للعمل على جميع الميادين والتوجه في المستقبل نحو أفضل ميادينه إنتاجا.



لكل أستاذ يدرس لسنوات فيصاب بالإحباط لأن التلاميذ لا يتابعون....

من قرابة ثلاثين سنة، كان هناك أستاذ رياضيات في الثانوي يشرح برهانا معقدا لتلامذته لكن أغلبهم لا يكترث، فلا البرهان سيطلب في الإمتحان ولا هو سيفيدهم في الباكالوريا!!!

ثم توقف الأستاذ للحظة فقال : أنا أعلم أن هذا البرهان لا يهمكم وقد لا يفيد الكثيرين منكم ، لكن لعله بينكم من سيواصل في ميدان الرياضيات مستقبلا ويتخصص فيه فلا يمكن حرمانه من حقه فهذا البرهان أشرحه له.

الذي لم يكن يعلمه الأستاذ أن هناك من تلامذته من واصل الدراسة الجامعية في الرياضيات وما بعد التدرج ومازال سنوات بعدها يشرح ويشرح الرياضيات بل يشرح ما تعلمه من استاذه لآلاف المهتمين بالبراهين الرياضياتية وبدورهم يشرحونها لتلامذتهم فالله أعلم ما كسبه من ثواب صدقة جارية بسبب إخلاص نية في العمل وإني لأرجو له ذلك....



بين الخبز والفرماج (الجبن) : التدريس الأكاديمي والتدريس الإبداعي

أطفالنا خيالهم واسع يرون ما لا نراه يراقبون يتساءلون أذكياء بالفطرة ...

مرّ أخي مع ابنه بجانب منزل الوالي فسأله ابنه الصغير بعفوية : لماذا منزل الوالي كبير وهو يسكن فيه لوحده!!!!

يحبون الإطلاع لكن .... يدخلون المدرسة فندرسهم فنمسح إبداعهم رويدا رويدا ... يحفظون بلا فهم ويقلدون بلا تساؤل .... ثم نتساءل لما مستوى التلاميذ آيل للانحطاط...

حدثني أستاذ مستخلف في سنوات التسعينات أنه كان يعمل في بلدة صغيرة وكان يدرس التلاميذ درس الكسور، فكان يمثل لهم ذلك بالخبزة وقطعها.

فقال له المفتش البرنامج أن تعلم بمثلثات الجبن وكان زمانها الجبن غير منتشر بين الناس لقلة الدخل وغلائه.

فقال له الأستاذ : يا مفتش هؤلاء التلاميذ حياتهم كلها يشترون الخبز ويعدون الخبز و ياكلون الخبز ويقتسمون الخبز بينهم ولا يعرفون الفرماج (الجبن) ولا يشترونه ولا يشمون رائحته فكيف تريدهم أن يتصورونه ؟ لقد تعلمنا بالخبز ونحن أهل خبز فدعهم يفهمون بما هم معتادون عليه.

ومن قبيلها ما حدث مؤخرا لابن أختي فقد طلبت منهم المعلمة كتابة تعبير عن الربيع ونحن أهل صحراء الربيع موسم رياح وتغير في الجو فكتب ابن أختي تعبيرا يقول فيه عندما يحل الربيع نذهب للمحلات لشراء الملابس...

بالطبع المعلمة أعطته صفرا فلما استفسرته أمه قائلة لماذا لم تكتب عن الزهور والإخضرار ؟

فأجابها انا لم أرى زهورا في الربيع ولا إخضرار أشجار .... كيف في بلد قلت أشجاره واندثرت حدائقه أن تقنع أطفاله بوجود الربيع....

هكذا نقتل الإبداع لدى أطفالنا فدعوا للأطفال خيالهم فإنه مثمر ولولاه لما تقدمت البشرية.

بن شعبانة عبد الحكيم



هل يحب إعادة بربكة الرياضيات المدرسية ؟

في أواخر الخمسينيات استيقظ العالم الغربي على خبر كالصاعقة، لقد استطاع الإتحاد السوفياتي ارسال أول قمر صناعي نحو الفضاء معلنا بذلك تفوق المهندسين الروس على غيرهم والذين كانوا يشتهرون بقوتهم في الرياضيات.

دفعت الحرب الباردة الدول الغربية إلى إعادة النظر في طرق تدريسها للرياضيات فقد بات واضحا أن مناهجها لا تواكب العصر.

هذه الفترة واكبت سيطرة مجموعة بورباكي على الرياضيات التي كانت منشوراتها تهدف إلى إعادة بناء الرياضيات على أسس صحيحة اعتمادا على نظرية المجموعات والفئات .

مما دفع ذلك الكثير من المدرسين إلى دق ناقوص الخطر للفرق الشاسع بين الرياضيات المدرسة في المدارس والتي تعتمد على الهندسة وبين رياضيات البحث والتي كانت بزعامة مجموعة بورباكي.

فقامت العديد من الدول وعلى راسها الولايات المتحدة الامريكية وفرنسا في بداية السبعينيات بتغيير مناهجها لوضع مكانن أكبر للبنى الجبرية ونظرية المجموعات.

كان لهذا الإختيار بعض المساوئ إذ كثرة التجريد في البرامج الجديدة أظهرت فروقات بين استيعاب التلاميذ كما ان الاساتذة واجهوا صعوبات للتأقلم بسبب سرعة تطبيقها .

في بداية الثمانينيات صححت بعض أخطاء البرامج الجديدة بإعادة إدخال الهندسة الإقليدية مما سمح هذه للدول الغربية باللحاق بالمهندسين الروس.

لكن ما كان يطرح في الستينيات يعاد طرحه اليوم فالفرق بات شاسعا بين الرياضيات البحثية والرياضيات المدرسية فمازالت الرياضيات المدرسية تعتمد على الهندسة الإقليدية أما البحثية فعلى الطبولوجيا و القياس والإحتمالات ودخلت في عالم الحواسيب، بل حتى الفيزياء وباقي العلوم نحت منحى الرياضيات في طريقة صناعاتها....

فهل يجب إعادة بربكة المدرسة ؟

يبقى التساؤل مطروحا....



عندما لا تشرح أهمية المفاهيم للتلميذ.

درسنا 12 سنة إلى الثانوي وكنا كثيرا ما نرى في بعض المواد الأستاذ يكتب:

التعريف اللغوي

ثم التعريف الإصطلاحي.

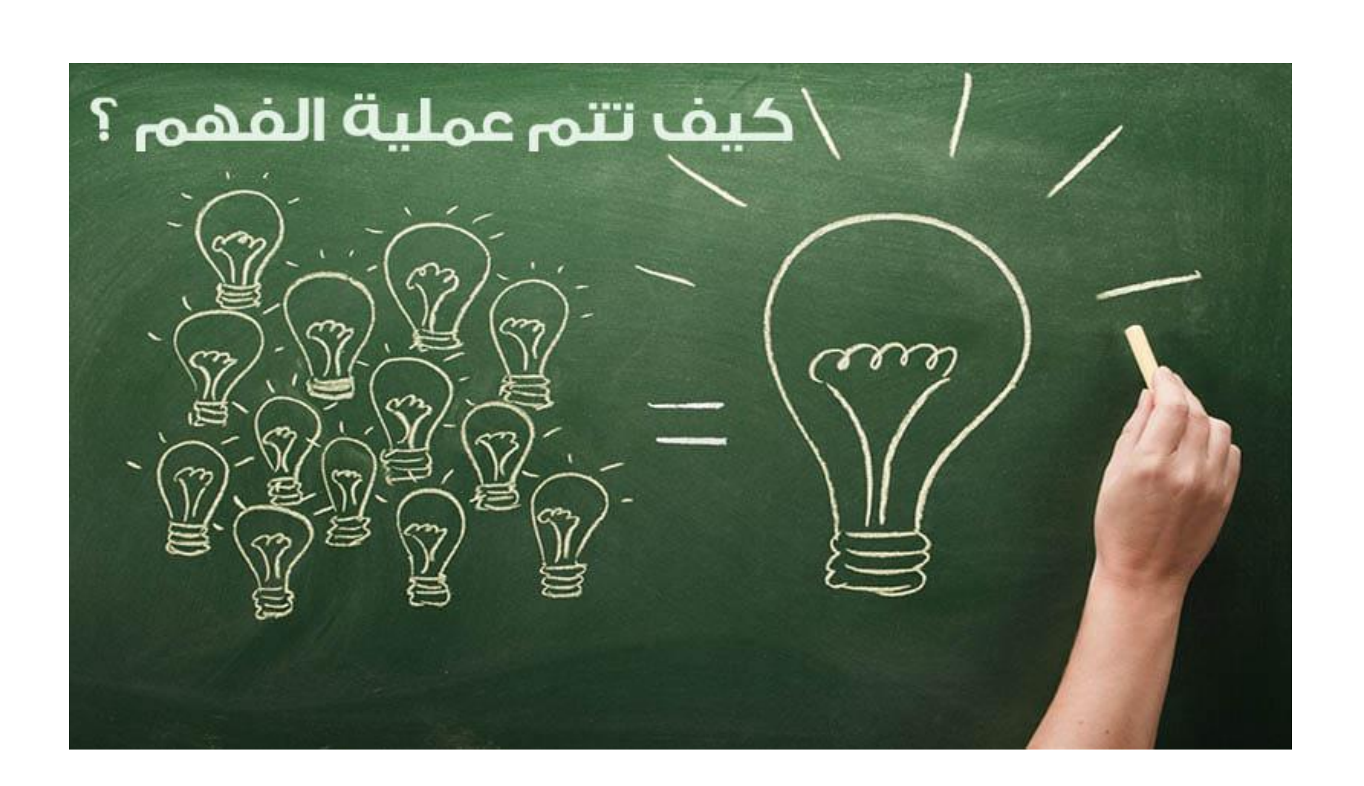
وكنا كتلاميذ نتساءل ما فائدة وضع التعريف اللغوي فكنا نمر عليه مرور الكرام ونكتفي بحفظ التعريف الإصطلاحي

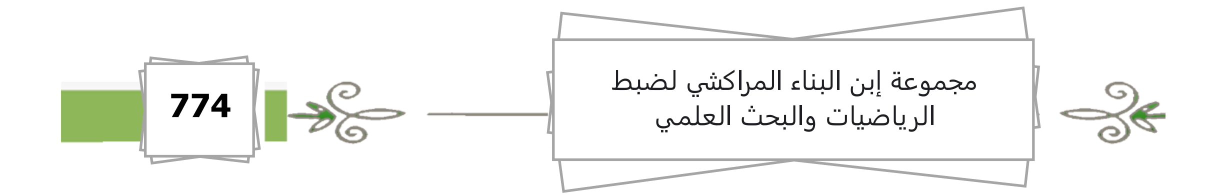
أما المواد العلمية فما كانت للغة مكان بل لا نلقي لها بالا ؟ لماذا سمي الجيب بالجيب والظل بالظل والجبر بالجبر والهندسة بالهندسة ؟

ولما وصلنا للجامعة زاد الأمر سوء فلا نعرج على معاني المصطلحات لغويا وكيف اشتقت منها المعاني الإصطلاحية.

في الحقيقة لم أعرف فائدة التعريف اللغوي إلا سنوات بعد التخرج بمطالعة علم أصول الفقه أين أدركت أنه لفهم مصطلح جيدا فلابد من فهم معناه اللغوي.

وعادت بي الذاكرة للماضي بسؤال يراودني : لماذا لم يقف أي من الأساتذة في فترة الطفولة قائلا : سأشرح لكم أهمية التعريف اللغوي ولماذا لابد أن نهتم باللغة لفهم المصطلحات وكيف يرتبط المفهوم الاصطلاحي باللغوي...





الأسئلة لا تطرح فقط من أجل نقل التعريف الرياضي، إنما المجموعة تهدف كذلك إلى امور عدة:

تعويد المشاركين وجلهم اللهم بارك أساتذة او اساتذة المستقبل على شرح التعريف بألفاظ شائعة سهلة الإستعمال للخروج من الجمود الرياضي والوصول إلى ذهن تلاميذهم

تفسير اسباب وضع التعريف وشرطه فكل شرط له مغزى وغيابه ينقص شيء وحضوره يضمن شيء

تقديم امثلة مبسطة

تجاوز التعريف الرياضي إلى المفهوم الذهني والذي يفسر طريقة تطبيق التعريف ومغزاه

إزالة اللبس مما قد يخطئ فيه الحدس وذلك بذكر المتشابهات والمفترقات لتجنب الخلط وزيادة الضبط كالتفريق بين القياس والطبولوجيا والكثافة وحيثما كان.

جمع المتشابهات وتعليم طريقة صناعة الرياضيات

ضبط البراهين في موضع الحاجة إلى الضبط

تصحيح المفاهيم

نشر التعاريف باللغة العربية

فلا يستغرب البعض إذا وجد تعقيبات على تعريف رياضي لان الغرض أن نتجاوز التعليم الاكاديمي بالحفظ والسرد إلى الفهم وترويض الحدس الرياضي



عندما أشعر بالفضول حيال شيء ما ، رياضياتي أو غير ذلك ، أسأله...

Alexandre Grothendieck :

عندما أشعر بالفضول حيال شيء ما ، رياضياتي أو غير ذلك ، أسأله...

أسأله ، دون الشعور بالقلق ما إذا كان سؤالي ربما يكون غبيا أو سيبدو كذلك،

غالبًا ما يأخذ السؤال شكلا تأكيديا، تأكيد الذي هو في الحقيقة مجرد محاولة تحقق من الصحة...

في كثير من الأحيان، خاصة في بداية البحث هذا التأكيد خاطئ، لكن يجب كتابة ذلك ليشاهد الخطأ بوضوح ، رغم أنه قبل كتابته كانت الرؤية مضببة وكأنه دوار حل محل مكان ذلك الوضوح.

لكن ذلك يسمح بالرجوع إلى جهل أقل وبنفي سؤال كان يظن مؤكدا لكنه مجانب للصواب.

المصدر :

https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/Boussy.pdf

https://fr.wikipedia.org/wiki/Alexandre_Grothendieck



التدريس بين الضبط العلمي والضبط المنهجي

يجب الإشارة إلى أن التدريس غير البحث العلمي فإن كان الأخير يخضع للضبط العلمي فالأول تتجاذبه القواعد العلمية ومنهجية التدرج في تصور العلوم فالمنهجية تغلب في المراحل الأولى إلى أن تختفي في الجامعة لذلك قد نجد تصورات خاطئة نسبيا في علم ما وتدرس رغم ذلك لأنه منهجيا لا يمكن للتلميذ المرور إلى التصور النهائي دون المرور بمراحل أبسط وإن كانت خاطئة كنظرية نيوتن في الفيزياء وربط الإستمرار بالمنحنى في الرياضيات.

لذلك ترتيب الدروس لا يخضع دائما للتسلسل المنطقي في صناعة العلوم ولا التسلسل التاريخي لأنه معقد لكن تراعى قابلية التلميذ لتقبل الدرس وتصوره فتسلسل الدروس من التصور الأبسط للأصعب مع التدرج في الضبط والله أعلم.



البعض يجد صعوبة في فهم الرياضيات وهذا ناتج من سببين:

الأول تراكم مفاهيم لسنوات غير مفهومة أو لم يدقق في فهمها

والثاني التعود على عدم فهم التعاريف وما بنيت عليه مع المسارعة في حل التمارين دون ربطها بالمبرهنات والتعاريف.

العلاج يكون على مرحلتين:

تعويد النفس على التدقيق في التعريفات وسبب كل شرط من شروطها والمبرهنات كذلك وكيف صنعت ولماذا صنعت بطريقة دون أخرى.

الثاني : بعض الإجتهاد في تدارك ما سبق فكل تعريف جديد او مبرهنة بنيا على مفاهيم سابقة فلابد على الطالب أن يرجع إليها إن أدرك أنه لم يفهمها بعد.

العلم والكتاب

منذ أن طور العرب صناعة الورق ارتبط العلم بالكتاب إلى أن جاءت الثورة الصناعية فأصبحت طباعة الكتب أمرا معتادا بل هي في عصرنا تجارة تذر الكثير من الأموال.

التلميذ في بداية مشواره يبدأ بالكتب المدرسية ذلك أن العلم يدرس على مراحل تدريجية منهجية وقد يشوه منهجيا ليوافق عقل الطفل الصغير فيستطيع إستيعابه فلا يكاد يخرج التلميذ من الكتاب المدرسي في مشواره الدراسي إلى الثانوية.

في المرحلة الثانوية تظهر الكتب التجارية بحكم احتياج التلميذ إلى المزيد من الشرح والتمارين لكن هي كسابقتها لا تخرج عن البرنامج الدراسي وإن كان التشويه فيه يقل سنة بعد سنة ليقترب من ميادين الإختصاص.

وبمجرد صعود التلميذ إلى الجامعة يدخل في ميدان التخصص فيجد الكثير من الكتب التي تهتم عادة بالدراسة الجامعية أو الإختصاص العملي.

لكن جميعها تتسم بكونها تجارية إذ لا يمكن طباعة كتاب اليوم إن لم يكن له زبائنه ومبيعاته.

الكتب الجامعية ثلاث انواع : كتب للمبتدئين، كتب متوسطة ، وكتب مفصلة.

وجميعها لا يكاد يخرج عن البرنامج الجامعي أو ما يهدف إليه من الدراسة للحصول على الشهادة.

وبمجرد أن يتخرج الطالب فيصعد إلى مرحلة ما بعد التدرج تصبح الكتب شحيحة جدا ذلك أن فروع الرياضيات كثيرة جدا فلا يمكن تخصيص كتاب معين ليتعمق في مسألة بعينها إذ ذلك غير مربح تجاريا.

كما أن الرياضيات تتقدم بسرعة عبر المنشورات فما أن يخرج منشور إلا واصبح قديما بعد أشهر مما يجعل تأليف كتاب يدرس آخر ما توصل إليه العلماء في موضوع ما، يكاد يكون شيئا شبه مستحيل.

عمدة الباحثين في هذه المرحلة هي رسالات التخرج والمقالات المنشورة فهي متخصصة جدا يمكن الرجوع إليها. أما اذا صعد الباحث إلى مرحلة النضوج الفكري فلا يكاد يجد كتابا يعالج المفاهيم بدقة تجمع بين جميع ميادين الرياضيات تاريخيا وفلسفيا و بنائيا، إنما هي مقالات متخصصة جدا ينشرها أصحابها عبر مواقعهم أو في محاضرات خاصة وقد يجد بين طيات بعض الكتب بعد الشوارد.

كما أن تطور الأنترنت فسيعصرنا جعل الوصول إلى مثل هذه المقالات أمرا سهلا يغني الباحث عن مؤونة شراء الكتب والبحث فيها عن ما قد يزيد من فهمه لهذا العلم.

لا يستغني المتعلم عن المطالعة إلا أن المطالعة أنواع تبدأ في بداية حياته بكتاب ثم تتحول إلى رسالات ومقالات متخصصة.



التلميذ بين التشويه والتجريد.

التشويه في المناهج الدراسية هي عملة تعديل تتم على المفاهيم ليتقبلها عقل التلميذ فنستعمل القريصات للتعبير عن الأعداد الطبيعية والمستقيم المدرج للتعبير عن الأعداد الحقيقية.

لو تأملنا المناهج الدراسية لوجدنا أنه لا يوجد عادة تشويه بمعنى الكلمة لغة إنما يقوم البرنامج بقصر المفاهيم على الحالات الخاصة دون نفي العموم ويربطها أحيانا بصور تمثيلية.

مثال ذاك دراسة الدوال فسيفرض المنهاج دائما وجود مجال لأن التلميذ لا يمكنه تصور دوال على غير مجالات.

وكذاك في الاستمرار سيربطه بالمنحنى رغم أن رسم المنحنى يلزم منه قابلية الاشتقاق ماعدا على نقاط منعزلة لكن الدوال التي يدرسها التلنيذ كلها من هدا النوع لذلك يشرح الاستمرار للتلميذ بعدم انقطاع المنحنى.

الخطأ الذي يقع فيه الكثير من الأساتذة هو نفي الحالات العامة وإيهام التلميذ أنه لا يوجد المفهوم المدروس في غير ما درس فترفض دراسة دوال على غير مجالات كالنهايات مثلا حتى رأينا من ينف الإستمرار لعدم التعريف عن اليمين أو اليسار.

والخطأ الشائع هنا هو عدم ضبط نظريو المجموعات وأنها أصل لا ينفك عن المفاهيم الرياضية عند دراستها.

يجب أن نعرف أن التلميذ في مرحلة اكتساب مستمر للمعرفة عن طريق التعميم وأن تؤخذ هذه النقطة عند الشرح لربط المفاهيم بالمكتسبات السابقة.

مثال ذلك تجد الأستاذ يعلم التلميذ أن المعادلة $X^2+1=0$ لا تقبل حلا لكنه لا يعوده أن لا يتكلم عن معادلة إلا على مجموعة فالأصل أن يعلمه.

$x^2+1=0$ لا تقبل حلا في R فالتركيز على المجموعة مهم جدا.

البناء على المجموعات مهمل جدا من الأساتذة ولا يركزون عليه فجلهم يركز على الخوارزميات الحسابية.

فلو تعلم التلميذ ذكر المجموعة دائما سيفهم بسهولة أن $x^2=2$ لا تقبل حلا في مجموعة الأعداد الناطقة لكنها تقبل حلا في مجموعة الأعداد الحقيقية لأن الجذر التربيعي ل 2 غير ناطق.

ويفهم أن $X^2+1=0$ لا تقبل حلا في R لكنها قد تقبل خلا في مجموعة أخرى مثلما حصل مع الجذر التربيعي ل 2 فيمكننا أن نتخيل حلا ونسميه i من اللفظ الفرنسي imaginaire والذي يعني تخيلي فيكون لدينا $i^2=-1$ ثم ننظر على ماذا نتحصل وما هي هذه المجموعة التي يمكن أن ينتمي إليها هذا العدد.

فهنا التلميذ لن يصطدم بالمكتسبات السابقة لأنها لا تمنعه من التعميم لتعوده عليه طوال مرحلته الدراسية.

من هذه الناحية التشويه هنا يعتبر تبسيطا لكنه تبسيط مرحلي يمهد للتجريد عن طريق التعميم فيدرس التلميذ الحالة الخاصة ثم الأعم ثم الأعم حتى يصل لمرحلة البناء المسلماتي وهي قمة التجريد.





ربط إستمرارية الدالة بالمنحنى خطأ رياضيا

ربط إستمرارية الدالة بالمنحنى خطأ رياضيا، لكنها طريقة منهجية لتقريب مفهوم الإستمرار إلى التلميذ في مرحلة الثانوية لأن الدوال المدروسة في هذه المرحلة قابلة للإشتقاق على مجموعة تعريفها ماعدا عند نقاط معزولة.

دالة ويرستراسس نموذجا : و هي دالة غير قابلة للرسم لأنها مستمرة لكنها غير قابلة للإشتقاق عند كل نقطة.

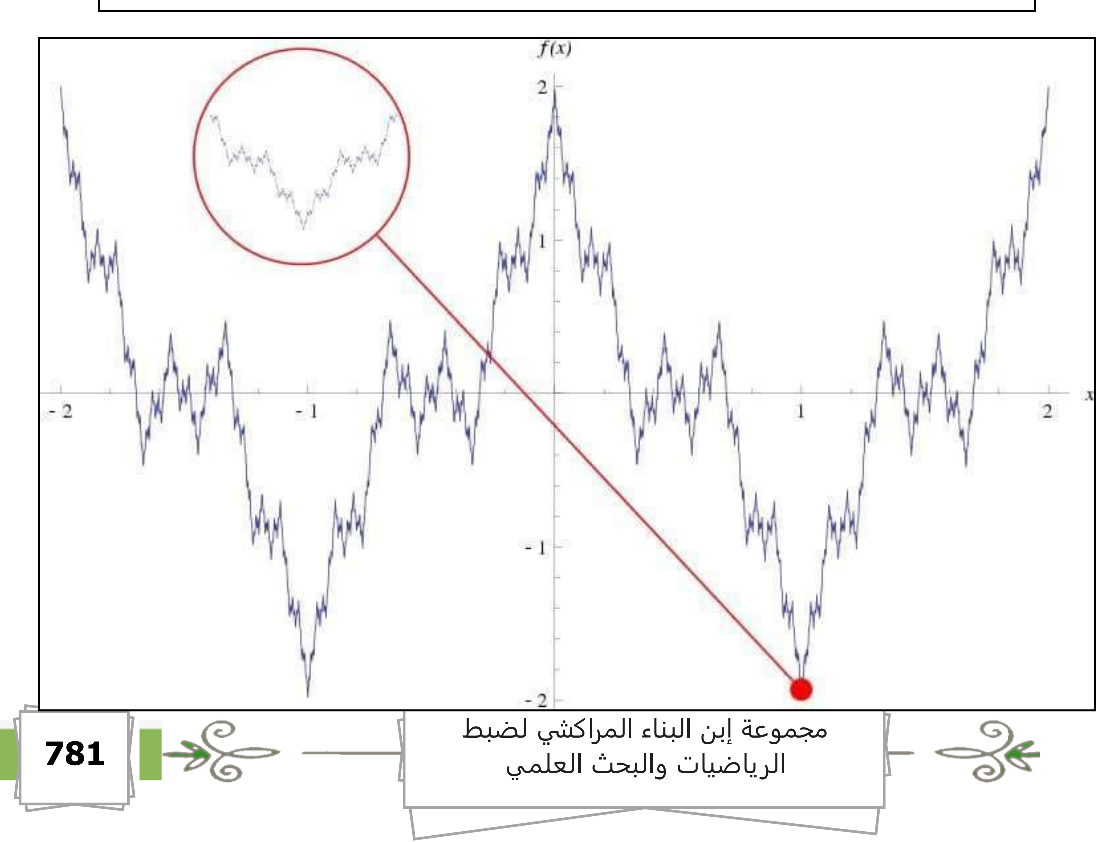
الدوال القابلة للرسم هي دوال قابلة للإشتقاق ماعدا في نقاط معزولة لأن رسم المنحنى يعني وجود المماس في أغلب نقاط المنحنى ووجود المماس يعني وجود العدد المشتق في أغلب الحالات.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_Weierstrass

$$f_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

où $0 < a < 1$ et

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$



من ذكريات الجامعة : إذا لم تستطع البرهنة على المطلوب لعقبة رياضية فابحث عن مثال مضاد

طرح علينا الدكتور يوسف عتيق حفظه الله وجازاه عنا كل خير، أستاذ وحدة القياس في المدرسة العليا للأساتذة زمانها، سلسلة تمارين في القياس، وكان من ضمنها تمرين مستعصي يطلب برهنة خاصية.

فلما وصلنا للتمرين المذكور سألنا الدكتور، هل منكم من استطاع حله ؟

فتطوعت وصعدت للسبورة فكتبت برهانا مطولا معقدا، فلما أنهيته تمعن فيه الدكتور جيدا ثم أشار إلى موضع فيه دور أي قيمة يفرض انها كيفية فإذا هي مرتبطة بالمتغير فيفسد ذلك البرهان.

فتأملنا ثم تأملنا فلا فكرة بدت لنا لحل المشكلة، فقال الدكتور يوسف عتيق لننظر فيه بعد الإستراحة.

خرجنا لفترة الراحة فاشتريت قهوة وجلست أفكر وأفكر في سبب ظهور هذا الخلل...

فقلبته في رأسي إلى أن لاح لي المشكل بنائي من أصل الخاصية نفسها فلا يمكن تجاوزه.

ثم قلت إذا كان الخلل بنائي فلأصنع مثالا مضادا يحقق شروط التمرين ويملك هذا الخلل البنائي...

رجعنا بعد الإستراحة فسألني الدكتور : هل وجدت طريقة ؟

فصعدت للسبورة وما هي إلا لحظات حتى كتبت مثالا مضادا ... فقال وإذا نزعنا شرط الإستمرار ؟ فغيرت في المثال المضاد فبقي مضادا....

عندما يلوح الخلل البنائي الذي يفسد البرهان فلابد ان يتجه التفكير إلى صناعة مثال يملك الخلل ثم ينظر كيف يمكن للمثال تجاوزه لتحقيق المطلوب فإما أن يكون مضادا وإما أن يعطيك طريقة تعممها في برهان عام.

فحتى الرياضيات لا تخلوا من التجربة.

من ذكريات مشاغب.



إلى الأساتذة : وصف لمحاضرات وتواضع لوبيغ صاحب التكامل (سزوليم مانديلبروجت)

"في سنة 1921 حضرت أول محاضرة للوبيغ، وكما جرت العادة لابد أن أقول أنها كانت مهيبة.

كان الأستاذ يحدثنا أحيانا عن ماضية، عن من سبقه في التدريس وعن أساتذته.

علي أن أقول أنه لم تكن هناك محاضرة للأستاذ لوبيغ إلا وضحكنا فيها بطريقة لطيفة، بل أشك أن ثلث الحاضرين ما جاءوا إلا للمرح.

لم يكن في كلامه أي إساءة و لا شيىء يخرج عن المعتاد في نكته، لكن كان كلامه مثير للإهتمام بلا حدود و عميق جدا.

كان لوبيغ يشبه برنشطاين من هذه الناحية، لم يُجِد يوما صناعة برهان براق، لكنه كان:

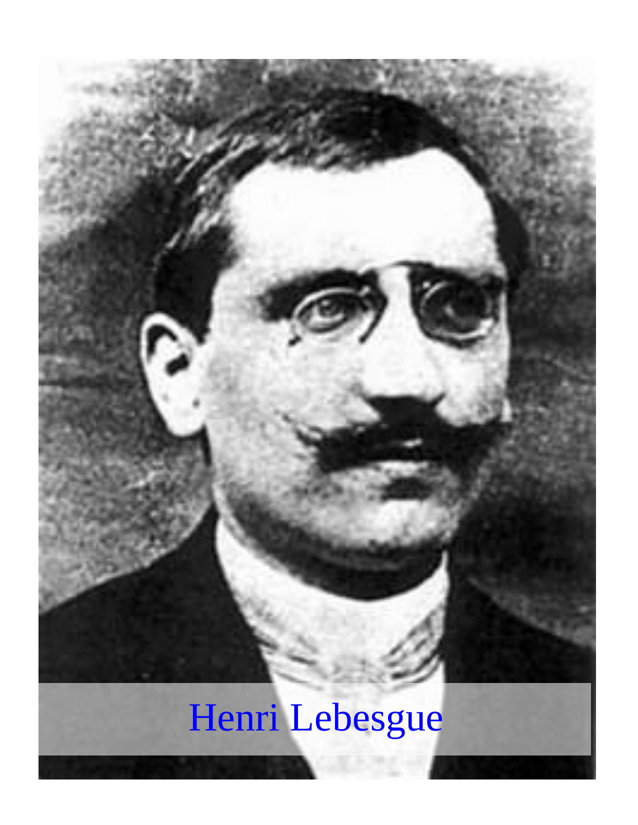
مُلْهِمـــًـــا جـــــــــدا لأنه كان مُلْهَمــَـــا.........

كان لوبيغ في سن قريبة من سن برنشتاين وأظنه كان ملهما بنفس الطريقة لصناعة محاضراته:

كان يفكر في البرهان ويصنعه أثناء المحاضرة ولا ينقله من الذاكرة ....

مع لوبيغ في لوبيغ في محاضراته كان يقول في كل مرة : آه ما قلته ليس بصحيح، اسمحوا لي بالبدء من جديد، ثم يبدأ في التفكير من جديد و الجميع يفكر معه ...."اهـ

سزوليم مانديلبروجت


Henri Lebesgue

لماذا نحفظ جدول الضرب.....

في الحقيقة توجد جداول للجمع كما توجد جداول للضرب لكن عدد النتائج الممكنة من عملية الجمع إذا اخذنا القائمة من 1 إلى 9 قليل ففيها 17 نتيجة فقط كما أن نصف القيم أقل او تساوي العشرة مما يجعلها سهلة الحفظ دون كتابة.

أما الضرب فنجد فيه 49 نتيجة مع اغلب القيم اكبر من عشرة مما يجعلها صعبة الحفظ وهذا ما يدفعنا لكتابتها ثم حفظها.

جدول الضرب مهم في الحساب العشري لأننا نعتمد في تسريع الحسابات على خاصة توزيع الضرب على الجمع وعلى الكتابة العشرية مما يجعل البشر قادرين على حساب جداء أعداد كبيرة.

جدول الضرب

١	٢	٣	٤	٥	٦
١ x ١ = ١	٢ x ١ = ٢	٣ x ١ = ٣	٤ x ١ = ٤	٥ x ١ = ٥	٦ x ١ = ٦
١ x ٢ = ٢	٢ x ٢ = ٤	٣ x ٢ = ٦	٤ x ٢ = ٨	٥ x ٢ = ١٠	٦ x ٢ = ١٢
١ x ٣ = ٣	٢ x ٣ = ٦	٣ x ٣ = ٩	٤ x ٣ = ١٢	٥ x ٣ = ١٥	٦ x ٣ = ١٨
١ x ٤ = ٤	٢ x ٤ = ٨	٣ x ٤ = ١٢	٤ x ٤ = ١٦	٥ x ٤ = ٢٠	٦ x ٤ = ٢٤
١ x ٥ = ٥	٢ x ٥ = ١٠	٣ x ٥ = ١٥	٤ x ٥ = ٢٠	٥ x ٥ = ٢٥	٦ x ٥ = ٣٠
١ x ٦ = ٦	٢ x ٦ = ١٢	٣ x ٦ = ١٨	٤ x ٦ = ٢٤	٥ x ٦ = ٣٠	٦ x ٦ = ٣٦
١ x ٧ = ٧	٢ x ٧ = ١٤	٣ x ٧ = ٢١	٤ x ٧ = ٢٨	٥ x ٧ = ٣٥	٦ x ٧ = ٤٢
١ x ٨ = ٨	٢ x ٨ = ١٦	٣ x ٨ = ٢٤	٤ x ٨ = ٣٢	٥ x ٨ = ٤٠	٦ x ٨ = ٤٨
١ x ٩ = ٩	٢ x ٩ = ١٨	٣ x ٩ = ٢٧	٤ x ٩ = ٣٦	٥ x ٩ = ٤٥	٦ x ٩ = ٥٤
١ x ١٠ = ١٠	٢ x ١٠ = ٢٠	٣ x ١٠ = ٣٠	٤ x ١٠ = ٤٠	٥ x ١٠ = ٥٠	٦ x ١٠ = ٦٠
١ x ١١ = ١١	٢ x ١١ = ٢٢	٣ x ١١ = ٣٣	٤ x ١١ = ٤٤	٥ x ١١ = ٥٥	٦ x ١١ = ٦٦
١ x ١٢ = ١٢	٢ x ١٢ = ٢٤	٣ x ١٢ = ٣٦	٤ x ١٢ = ٤٨	٥ x ١٢ = ٦٠	٦ x ١٢ = ٧٢

٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
٧ x ١ = ٧	٨ x ١ = ٨	٩ x ١ = ٩	١٠ x ١ = ١٠	١١ x ١ = ١١	١٢ x ١ = ١٢
٧ x ٢ = ١٤	٨ x ٢ = ١٦	٩ x ٢ = ١٨	١٠ x ٢ = ٢٠	١١ x ٢ = ٢٢	١٢ x ٢ = ٢٤
٧ x ٣ = ٢١	٨ x ٣ = ٢٤	٩ x ٣ = ٢٧	١٠ x ٣ = ٣٠	١١ x ٣ = ٣٣	١٢ x ٣ = ٣٦
٧ x ٤ = ٢٨	٨ x ٤ = ٣٢	٩ x ٤ = ٣٦	١٠ x ٤ = ٤٠	١١ x ٤ = ٤٤	١٢ x ٤ = ٤٨
٧ x ٥ = ٣٥	٨ x ٥ = ٤٠	٩ x ٥ = ٤٥	١٠ x ٥ = ٥٠	١١ x ٥ = ٥٥	١٢ x ٥ = ٦٠
٧ x ٦ = ٤٢	٨ x ٦ = ٤٨	٩ x ٦ = ٥٤	١٠ x ٦ = ٦٠	١١ x ٦ = ٦٦	١٢ x ٦ = ٧٢
٧ x ٧ = ٤٩	٨ x ٧ = ٥٦	٩ x ٧ = ٦٣	١٠ x ٧ = ٧٠	١١ x ٧ = ٧٧	١٢ x ٧ = ٨٤
٧ x ٨ = ٥٦	٨ x ٨ = ٦٤	٩ x ٨ = ٧٢	١٠ x ٨ = ٨٠	١١ x ٨ = ٨٨	١٢ x ٨ = ٩٦
٧ x ٩ = ٦٣	٨ x ٩ = ٧٢	٩ x ٩ = ٨١	١٠ x ٩ = ٩٠	١١ x ٩ = ٩٩	١٢ x ٩ = ١٠٨
٧ x ١٠ = ٧٠	٨ x ١٠ = ٨٠	٩ x ١٠ = ٩٠	١٠ x ١٠ = ١٠٠	١١ x ١٠ = ١١٠	١٢ x ١٠ = ١٢٠
٧ x ١١ = ٧٧	٨ x ١١ = ٨٨	٩ x ١١ = ٩٩	١٠ x ١١ = ١١٠	١١ x ١١ = ١٢١	١٢ x ١١ = ١٣٢
٧ x ١٢ = ٨٤	٨ x ١٢ = ٩٦	٩ x ١٢ = ١٠٨	١٠ x ١٢ = ١٢٠	١١ x ١٢ = ١٣٢	١٢ x ١٢ = ١٤٤

www.ahlaimages.com



ما لا تذكره مذكرة الأستاذ : الربط بين المعارف

قصة :

المعلم الطباخ والتلميذ البطيء الفهم : كيف تطبخ الدجاجة و الخروف والسمك!!!!

ماهر طباخ ماهر، فرح بمدرسته الجديدة التي أنشأها لتدريس التلاميذ مبادئ الطبخ.

وبما أنه منظم جدا قرر وضع منهاج يبدأ بتدريس التلاميذ أدوات الطبخ، ثم طرق الطبخ، ثم وصفات الطبخ.

وصل ماهر إلى الثلث الأخير من البرنامج وهو الثلث التطبيقي فدخل القسم ليبدأ درس اليوم : كيفية طبخ المرق بالدجاج

فأمسك بالدجاجة ثم سأل التلاميذ كعادته : كيف سنطبخ الدجاجة ؟

خيم الصمت على التلاميذ فنظر إليهم الأستاذ ثم قال : لابد من تقطيعها.

ثم سأل سؤال آخر ؟ كيف نقطعها ؟

خيم الصمت على التلاميذ فنظر إليهم الأستاذ ثم قال : نقطعها بالسكين، ألم ندرس السكين في الثلاثي الأول...

فأمسك بالسكين و قطع الجناحين و الفخذين ثم قسمها لنصفين و طرحها في الوعاء وهو يتمتم يا لهم من تلاميذ ينسون كل ما درسوه من قبل...

عاد الأستاذ من الغد بدرس جديد : كيفية طبخ المرق بلحم الخروف...

فأمسك بكتف خروف ثم سأل التلاميذ كعادته : كيف سنطبخ لحم الخروف ؟

خيم الصمت على التلاميذ فنظر إليهم الأستاذ ثم قال : ألم نرى الدجاج البارحة فقمنا بتقطيعه ؟

قال التلاميذ : لكن الدجاج ليس كالخروف، فالدجاج بأجنحة أما هذا فكتف!!!

تمتم الأستاذ : هل هم بلداء !!! ثم قال كلاهما لحم يمكن تقطيعه

عاد الأستاذ من الغد بدرس جديد : كيفية طبخ المرق بالسمك...

فأمسك بالسمكة ثم سأل التلاميذ كعادته : كيف سنطبخ السمكة ؟

خيم الصمت على التلاميذ فنظر إليهم الأستاذ ثم قال : ألم نرى الدجاج و الخروف من قبل ... ؟

قال التلاميذ : لكن الدجاج و كالخروف لحم أما هذا فسمك....

أخذ الأستاذ يقطع السمكة وهو يدندن ماذا دفعني لفتح هذه المدرسة و هو يلعن التعليم و العمل فيه.....

مغزى :

هنا تنتهي حكاية الطباخ ماهر، هي حكاية مستوحاة من الخيال و قد يظن البعض أنه لا يوجد تلاميذ بهذا الغباء إلا أنه الواقع الذي يعيشه يوميا الكثير من الأساتذة.

نعم الأستاذ ماهر درس التلاميذ أدوات الطبخ و منها السكين، و درسهم أنواع اللحوم، و شرح لهم كيف يقطعها لطبخها لكن ما لم يشرحه الأستاذ لماذا يجب تقطيعها و لماذا يستعمل السكين دون غيره لذلك.....



الكثير من الأساتذة يهيئ مذكرته فيضع فيها كيفية تقديم الدرس و كيفية حل التمارين، لكن الذي ينساه هو الجواب على سؤال "لماذا" و "بماذا... "

إن مشكلة التلميذ ليست كيفية حل التمرين لكن "لماذا" يحل بطريقة دون أخرى فغاية ما يفعله التلميذ هو حفظ أشكال التمارين فيشبههم ليطبق نفس طريقة الحل.

ذلك أن الأستاذ نسي شيئا مهما و هو شرح "لماذا" و "بماذا" وذلك لا يتم إلا بربط معارف التلميذ السابقة باللاحقة وربط التجريد بواقعه المعاش.

فالدالة الأسية قبل أن تكون أسية هي دالة والدالة ما هي إلا مجرد خيارات لروابط.

أما تمارين النهايات فأغلبها دوال مركبة من كثيرات حدود وكسور بدوال مألوفة فالأستاذ نادى بتحليل البسط و المقام إلى جداء عوامل لحساب النهاية لكنه نسي أن يخبر التلاميذ أن هذه الدالة قبل أن تكون دالة هي كثير حدود و كونه ينعدم يعني إمكانية تحليله إلى جداء كثيرات حدود منها واحد أولي يظهر موضع الإنعدام كجذر و الغرض من التحليل التخلص من هذه العوامل بين البسط و المقام ذلك أن سبب حالة عدم التعيين هو الإنعدام فإذا نظرنا إلى المعارف وجدنا:

لماذا لا نستطيع حساب النهاية : لوجود حالة عدم التعيين

لماذا وجدت حالة عدم التعيين : لإنعدام البسط والمقام

لماذا انعدم البسط و المقام : لأنه قبل أن يكون دالة معقدة فما هو إلا كثير حدود ركبت بداخله دوال مألوفة والكثير الحدود متى انعدم فهو يقبل تحليلا أين يظهر فيه كثير حدود أولي جذره نقطة الإنعدام

بماذا نحل التمرين : بالتخلص من حالة عدم التعيين

وماذا يعني التخلص منها : التخلص من سبب الإنعدام

وكيف نتخلص من سبب الإنعدام : بإظهاره للعيان وذلك بتحليل كثير الحدود ثم الاختزال بين البسط و المقام.

فكل هذا ربط بين معارف متعددة اكتسبها التلميذ في السابق لكنه لم يتعلم أن يستعملها ولا متى يستعملها فركنها في مكان في دماغه و أغلق عليها بعشرين مغلاق.

فمذكرة الأستاذ لابد أن تكون لبنة في بناء شامخ توضع في موضعها بربطها مع اللبنات السابقة و تحضر للبنات لاحقة.

تنظير:

نظرية أوزوبل في التعلم ذو المعنى:

كانت الفكرة الأساسية في نظرية اوزوبل هي التعلم ذو المعنى والذي يحدث عندما ترتبط المعلومات الجديدة بوعي وإدراك من المتعلم بالمعلومات الموجودة لديه فعلا في بنيته المعرفية ، أي أن التعلم لا يحدث نتيجة تراكم المعلومات الجديدة وإضافتها إلى المعلومات التي سبق تعلمها ، ولكنه يحدث عندما يتمكن المتعلم من



ربط المعلومات الجديدة بالمفاهيم الموجودة في بنيته المعرفية ، ويقصد بالبنية المعرفية للمتعلم الإطار العام الذي يتضمن معلومات الفرد الراهنة والذي يمكن أن يضيف إليه أي معلومات جديدة ، وتتكون البنية المعرفية من مجموعة من المفاهيم العامة يليها مجموعة من المفاهيم الوسطية ثم المفاهيم الفرعية أو التحتية ... وهكذا ، ولكل فرد بنيته المعرفية الخاصة به . (منقول من ويكيبيديا)

فبدل ملئ التلميذ بدروس نظرية لا تعني له شيئا لابد على الأستاذ أن يبني الدرس بناء على معارف سابقة لدى التلميذ وبطريقة منطقية تجعله يفهم الغرض من الدرس و علاقته بما سبق.

وعلى هذه الطريقة تكتب مذكرته:

فيبدأ بمدخل لاستدعاء معلومات سابقة سهلة معروفة لدى التلاميذ بل قد يستدعي تجارب الحياة العامة

ثم يلحقها باسئلة للتمهيد للدرس الجديد

ثم يجيب عليها بتقديم مفهوم جديد فيشرح المفهوم

يشرح لماذا وجد المفهوم ولو ألحقه بنظرة تاريخية يكون أفضل فيربطه بما سبقه من مفاهيم

يشرح بماذا صنع المفهوم

يشرح متى و كيف يطبق المفهوم

أما في واقعنا فالأستاذ يستعمل طريقة بافلوف في التعليم فيتحول التلميذ إلى مجرد ردات فعل تلقائية لوجود أسئلة نموذجية.....

للمزيد : التعلم ذو المعنى لأوزبيل

https://kenanaonline.com/users/wageehelmorssi/posts/843473



وقفت أمام تلامذتك تشرح لهم درسا، فكيف تريهم حلاوة الرياضيات ؟

على كل أستاذ أن يضبط تعريف الكائنات الرياضية ومفاهيمها وكيفية استعمالاتها مع مقدار التشويه الذي أدخل على التعاريف وأسبابه وكيفية موافقته لاستيعاب تلاميذ الأطوار الأولى من التعليم، حتى يستطيع شرح المفاهيم بلا افراط ولا تفريط.

(الكائن الرياضي كل ما أعطي له وجود من المسلمات الرياضية بطريقة مباشرة كالتسليم بوجود المجموعة الخالية أو غير مباشرة كالبرهنة وبناء N و غيرها من المجموعات العددية.)

أول شيء عندما تشرح مفهوما للتلاميذ أن تكون أفكارك حول هذا المفهوم واضحة المعالم لك قبل غيرك.

ومن وضوح المعالم اختيار ألفاظ الشرح فتكون أبسط ما يمكن وأبلغ ما يمكن وملموسة أكثر ما يمكن.

فلا تستعمل الغوامض ولا تتقعر في اللغة وتختار من الألفاظ الشائع عند التلاميذ.

واستعن بالتمثيل على أن يكون المثال بسيطا جدا ومن واقعهم المعاش واستعن بالرسم فإنه يثبت في الذهن.

ومع كل هذا لابد أن تعيش الدرس فتشرح الأمثلة وكأنك جزء منها ولا تستهن بنبرة الصوت فإن النبرة الواثقة في الصوت تزيد التلميذ ثقة.

ولا تشرح الدرس وكأنك تريد التخلص من ثقل على كاهلك أو كأنه مجرد شيء زائد في حياتك.

ولابد عند التطبيق من شرح الانتقال من التعريف إلى التمرين أو رؤية التعريف في معطيات التمرين وربط بعض التمارين بالواقع المعاش.



نصيحة للطلبة والأساتذة : كيف نَدرس ونٌدرس الرياضيات ؟

الكثير يسأل عن طريقة للدراسة او للتدريس وفهم الرياضيات، فأردت أن أقدم لهم نصيحة عبر هذا الموضوع.

أول شيء يجب إستيعابه أن الدراسة غير الفهم فللأسف في زمننا المعاصر طغت علينا المظاهر وأصبح النجاح لا يقترن بالفهم.

فالقوت يتطلب العمل والعمل يتطلب شهادة وللأسف الشهادة لا تبنى اليوم على العلم إنما بنيت على تكرار وحفظ للتمارين.

لكن هذا لا يعني أن الإنسان لا يستطيع طلب المعرفة على أصولها، إلا أن عليه الموازنة بين الأمرين، فلا يجحف في حق نفسه في فهم المسائل ولا يقصر في العمل لنيل الشهادة.

والأفضل هنا أن يجمع بين **الأمرين** :

أن يتابع برنامجه الدراسي ليتحصل على شهادته،

وأن يكمل ما يدرسه من مراجع أخرى حتى يفهم ما يدرسه على أصوله.

بالنسبة للرياضيات لابد على دارسها من النظر في التطور التاريخي للمبرهنات وأن يتأمل في صياغة التعريفات فكل شرط وضع فيها إنما وضع لغاية فلابد أن يفهم سبب وضعه وكيفية صياغته وما يبني عليه.

على طالب الرياضيات النظر إليها كقصة تاريخية بني صرحها على مراحل، فتتبعه لهذه المراحل يجعله يفهم نتائجها حق الفهم.

لابد أن يهتم كذلك بالفلسفة الرياضية وهي جانب ينظر للنظريات الرياضية من حيث التكوين فهذه تجعله يفهم دقائق التعاريف والمبرهنات.

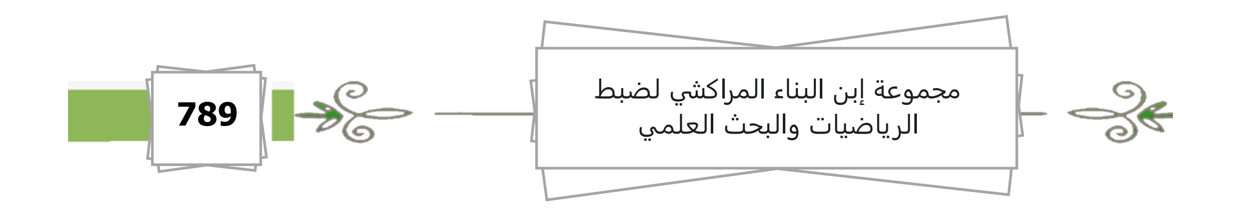
لابد كذلك أن لا يهمل الجانب التطبيقي و البحثي فلا يتردد في طرح أسئلة من تأليفه حتى يخرج عن المعتاد من البرنامج فالبحث في مثل هذه الأسئلة يكون ملكته الرياضية.

لابد أن يراعي في كل هذا دراسته فيعطيها حقها وإن كانت طريقتها لا تعجبه ففي النهاية هو محتاج للشهادة للعمل بها.

أما الباحثون في مرحلة ما بعد التدرج فأنصحهم أن لا يرفعوا مستوى البحث لدرجة عليا إنطلاقا من مبدإ صناعة شيء ممتاز فكم من باحثين رأيناهم ولجوا هذه الطريق فضيعوا سنوات من أعمارهم حتى إذا انتهوا من رسالتهم وجدوا ضعاف المستوى قد سبقوهم بالمناصب.

إن الشهادة للأسف لا تنظر للمستوى إنما تكتفي بالعمل المقبول.

على الباحث أن يوازن في بحثه فيعمل عملا جيدا يكفيه لنيل شهادته ثم بعد أن يلتحق بمنصبه ليبحث كيفما شاء فله متسع من الوقت لذلك.



أما الأستاذ فعليه أن لا يتحصر على ما فات بل هو في موضع يخول له الإستفادة كما يشاء فعليه البحث والنظر في المراجع لفهم ما يدرسه ولينظر الموجود في البلدان الأخرى وليقارن بينه وبين ما بين يديه وليكثر المطالعة في ميدانه فإن ذلك يزيد من سعة معرفته.

أما مع التلميذ فلابد له أن يقرأ ما بين السطور فلا يكتفي بالإجابة على سؤال التلميذ بل ليسأل نفسه لماذا سأل التلميذ هذا السؤال فيحاول استدراك النقص الموجود عنده في الإستيعاب.

ثم شيء آخر يا أستاذ سؤال التلاميذ هل فهمتم أو لا، لا يفيد شيئا إنما تأكد بنفسك بطرح الأسئلة وتقويم الإجابات على التمارين.

كما أنصح الاستاذ بعدم إهمال الناحية البيداغوجية للتدريس فقد تكون ممتازا في الرياضيات لكنك ضعيف في شرح المعلومة وهذا الجانب تكمله بالعمل عليه ودراسة المراجع الذي تهتم بهه وسؤال من عندهم خبرة ممن سبقك.

كما على الأستاذ أن لا يهمل نهم الطلبة النجباء في التعلم وأن لا يضيع الطلبة الضعاف بل له أن يعمل بطريقة عامة مع الجميع ثم بطرق خاصة مع كل حالة من حالات التلاميذ .

أوصيكم بإخلاص النية في العمل وأجركم على الله رب العالمين.

الأعمى والفأر

عندما يبني البعض التعاريف على تجربته الشخصية.

قيل أن رجلا أعمى من الولادة حدث وأن رُد إليه البصر لحظة فرأى فيها فأرا ثم عاد أعمى.

فكان كلما وُصِفَ له شيئا أو وَصَفَ قال يشبه الفأر...

هذا الذي يحدث مع الكثير من الأساتذة في الرياضيات إذ طوال مشوارهم اعتادوا على بناء التعاريف مما جربوه بدل الرجوع إلى التعاريف المتعارف عليها بين علماء الرياضيات فيخرجون لنا بخلبصات وتخاريف لا معنى لها، ومن هذه التخاريف:

قصر دراسة الرتابة على مجال والمسألة أعم من ذلك.

قصر دراسة النهايات والاشتقاق والاستمرار على مجال مفتوح والمسألة أعم من ذلك.

قصر رتب المتتاليات على الأعداد المتتابعة من N والمسألة أعم من ذلك.

الاستدلال على ما سبق باستحالة تعريف المتتالية بالتراجع وهذا لا يقبل حتى من تلميذ ثانوي فما بالك بأستاذ !!! فالمتتاليات تدرس في الجامعة بأنواع كثيرة أغلبها غير تراجعي.

والقائمة طويلة...

الجامع بين كل هذه التخاريف أن من يروج لها ليس لديه اطلاع على الرياضيات الجامعية إنما بنى خبرته على التمارين المتداولة في الثانوي فخربط في الفهم وتخبط شر تخبط.

لكن الأشر من هذا هؤلاء الذين درسوا الرياضيات الجامعية لكنهم لم يفهموا منها شيئا فتجده يقول باستحالة مساواة $0.999... = 1$ والحقيقة أن موطن الداء واحد فجميع هؤلاء لا يعودون للتعاريف إنما يواصلون بناء الرياضيات في مخيلاتهم على فأر شاهدوه يوما في حياتهم ومن يختبئ وراء فأر سيسحقه الفيل.



التلميذ والاعتقاد في التقليد

culte du cargo en mathématiques

في نهاية القرن التاسع عشر، لاحظ السكان الأصليون للجزر المحيطية أن سفنا ثم طائرات تأتي محملة بالبضائع إلى السكان البيض، فاعتقدوا أن ذلك يأتي لمجرد طلب البيض لهذه المواد عبر أجهزة الراديو فقاموا بصناعة أبراج خشبية و أجهزية خشبية لطلب البضائع بدورهم منتظرين من السفن و الطائرات المجيء عندهم .... ثم تطور الأمر ليصبح معتقدا بل أصبح السكان الأصليون يرون في أعمال الأوربيين كقطع الأزهار عبادة تجلب لهم البضائع و المأكولات فكانوا يقلدونهم في ذلك...

قد يبدو الأمر مضحكا اليوم لكن في الحقيقة مثل هذه الاعتقادات مازالت موجودة في ميادين شتى و منها الرياضيات، إذ يظن التلميذ أنه يمكنه فهم الرياضيات بمجرد حفظ أكبر طرق ممكنة لحل التمارين، بل يعضض معتقدهم هذا الاجترار في الإمتحانات، إذ الإمتحانات اليوم تصنع على طريقة الحفظ لا الفهم فلا التلميذ يفهم ولا هو يدرك أنه لم يفهم.

لقد صنعنا أجيالا من المتخرجين ممن هم عاجزون عن الابتكار لعدم فهم المادة بل هم عاجزون على الإنتاج و كيف يمكنهم إنتاج ما لم يهضموه.

لابد من إعادة النظر في طريقة تدريس العلوم و طريقة تقويم التلاميذ حتى نخرج من طريق التقليد إلى طريق النهضة.



نصائح للمثقف:

أنت مثقف إذن أنت تطالع، أنت لا تطالع إذن لست بمثقف.

لكن ماذا نطالع ؟

إعلم أن أول المطالعة هو الضروري مما تحتاجه من دينك ولغتك وتاريخك وثقافتك فهذا يمثل مقومات أمتك وأمة بلا مقومات ستقلد مقومات غيرها فهي ليست إلا امة مقلدة مستعبدة .

ثم إبدأ بميدانك فكن مطلعا على اللازم للمختص فيه وتتبع كل جديد منه ولا تنسى تاريخه فالعلم ليس مجرد حفظ سطور أو كتب إنما قصة رسمتها حضارات عبر التاريخ وإن في أخطاء الحضارات علما أكبر مما في نجاحاتها.

ثم عليم بطرق تدريس علمك وكل ما يخدمه فإن حامل البضاعة ناقل لها والناقل لا يكون ناقلا إلا بالسياقة مع معرفة بكيفية تزويد البنزين لشاحنته وأماكن توفره والطرق...

فكن محيطا بكل ما يخدم إختصاصك.

وعليك بضبط علمك بالتدقيق في خباياه للتفريق بين المتشابهات والجمع بين المتفرقات.

ثم عليك بطرق صناعة علمك فبها يأتي الجديد.

ثم عليك بأعلام علمك ففي دراسة كيفية إشتغالهم بعلمك تستنتج المفيد.

ثم عليك بعلوم النهضة مع ما تيسر من علوم العصر فإن ذلك يساعدك على التجديد في إختصاصك فلا علم اليوم بدون معلوماتية ولا علم بدون معرفة كيفية البحث للتعلم.

ثم لا تنسى تاريخ الأمم فمن أراد النظر في المستقبل عليه بالماضي فالماضي تجارب أمم تبين لك الطريق.

ثم ما تيسر من علوم أخرى مما يشابه علمك ففي ذلك فتح للذهن وتوليد من الأفكار الجديد.

ثم إن استطعت ما تيسر من علوم أخرى فكلما زاد إطلاعك زاد فهمك لما حولك.

شرعك

لغتك

تاريخك

علمك

طريقة تدريسه

تاريخه

علوم النهضة

تاريخ الأمم

ما شابه علمك

علوم أخرى



الحاجة أم الإختراع إنما التطور وليد المستحيل

المشاريع في البحوث العلمية تدوم لسنوات بل منها ما يستغرق قرونا حتى ينضج.

فكل فكرة جديدة وإن كانت غير قابلة للتطبيق في أرض الواقع فقد تنتج فوائد كثيرة ومن أشهر الأمثلة الرياضية على ذلك مسألة تربيع الدائرة فرغم ان ذلك مستحيل إلا أن البحث فيها قد أنت أنواعا جديدة من الرياضيات.

وفي جميع العلوم أمثلة كثيرة عن أفكار لم تكن قابلة للتطبيق على حالها لكن بالبحث فيها طورها العلماء وعدلوها لصناعة افكار جديدة قابلة للتطبيق.

فلو توقف كاردان عن تخيل العدد i لأنه غير موجود في الواقع على حسب ما توصل إليه العلم في زمانه لما صنعنا اليوم التحليل العقدي.

الأفكار المستحيلة اليوم قابلة للتطبيق غدا لذلك يقوم الكثير من الرياضيين والفيزيائيين بإعادة دراسة المقالات القديمة بحثا عن طرق قد نسيت فيعاد استغلالها في بحوث جديدة.

كخلاصة : الأفكار التي نظن انها مستحيلة التطبيق اليوم قد تصبح قابلة للتطبيق غدا وقد تثمر دراستها بفتح آفاق علمية جديدة.



التعليم بين جمود الموروث الفكري للكبار وحب الاستفسار للصغار

ككل عيد قامت الأم بطهي ديك رومي في الفرن للعائلة، هي عادة موروثة في العائلة للإحتفال بالأعياد.

كانت ترافق الأم في الطهي إبنتها الصغيرة تساعدها محاولة محاكاة الكبار... تعطيها الملح وتغسل الملعقة كفراشة تقفز من زهرة إلى زهرة ... وببراءتها تسأل وتستفسر .... تضحك وتتعجب ....

فتحت الأم الفرن لإخراج الديك الرومي فقد نضج ثم قامت بنقله من طبق الفرن إلى طبق آخر.

قالت الطفلة الصغيرة ببراءة : أماه لما نقلت الديك الرومي إلى طبق آخر ؟ اتركيه في طبق الفرن ففي جميع الأحوال سيأخد كل واحد نصيبه إلى طبقه في طاولة الأكل على هكذا نقتصد غسيل طبق زائد ؟

فأجابت الأم : لا أدري يا ابنتي هكذا رأيت أمي تفعل فأنا أفعل مثلها .... لم أفكر في ذلك من قبل....

ذهبت الطفلة الصغيرة إلى جدتها، قالت يا جدتي لما تنقلين الديك الرومي بعد الطهي من طبق الفرن إلى طبق آخر ؟ أليس الأفضل تركه في طبق الفرن فنقتصد غسيل طبق زائد ؟

فأجابت الجدة : لا أدري يا حفيدتي هكذا رأيت أمي تفعل فأنا أفعل مثلها .... لم أفكر في فائدة ذلك....

فذهبت الطفلة الصغيرة إلى جدة أمها، فقالت يا جداه لما تنقلين الديك الرومي بعد الطهي من طبق الفرن إلى طبق آخر ؟ أليس الافضل تركه في طبق الفرن فنقتصد غسيل طبق ؟

فأجابت جدة امها : يا ملاكي الصغير، كان عندي طبق فرن صغير لا يتسع للجميع حول الطاولة فكنت انقل الديك الرومي إلى طبق أكبر حتى يتسنى للجميع وضع يده للاخذ من الديك!!!!!

يا أساتذة ، إن لم تستفسروا يوما عن نجاعة الموروث وسبب وضعه وفوائده فإن التلميذ يسأل في عقله عن ذلك فلا تحطموا تفكيره بجمود تفكيركم....

أترى لو أكل نيوتن التفاحة كنا سنكتشف قوانين الجاذبية ؟ ولو ركن آينشتين للنظريات المشهورة زمانه كنا وصلنا اليوم إلى هذا التطور التكنولوجي ؟

إن العلم ليس بأكياس تحمل إنما فهم وحب إطلاع وتحسين مستمر للموروث.



عندما يكون الغباء معديا.

تجربة آش في الإنسياق.

سنة 1956 نشر البسيكولوجي سولومون آش تجربة في قوة الإنسياق الفردي لتأثير المجتمع.

قام آش بتجربته على حوالي عشرة طلبة بين 17 و 25 سنة حيث تعرض عليهم صور خطوط ثم يجيب كل واحد حول بمقارنة أطوالها.

لكن المجموعة كلها تعمل لصالح البسيكولوجي فهم مساعدون له في الخفاء ماعدا واحد منهم لا يعلم بذلك فهو موضوع التجربة.

قام آش بإعطاء تعليمات لمساعديه من المجموعة بإعطاء أجوبة صحيحة للست الصور الأولى ثم خاطئة ل12 الباقية.

الشخص موضوع التجربة رتب في قائمة إعطاء الأجوبة ما قبل الأخير.

فالذي وقع أن موضوع التجربة أصبح يجيب مثل من سبقه وإن كان الجواب خاطئا.

أعيدت التجربة مع مساعد واحد يجيب أولا بصوت واثق من نفسه ثم الباقي كموضوع للتجربة فكانت مواضيع التجربة تجيب أجوبة صحيحة في البداية لكن بعد أن بدأ حوالي 37% منهم يتبعون جواب الأول أصبح الباقي يقلدونهم وإن كان الجواب خطأ.

تجربة آش كررت أكثر من مرة بطرق مختلفة منها ما جرب في عيادة طبية أين كان من في غرفة الإنتظار كلهم مساعدون في التجربة ماعدا واحد موضوع التجربة.

ثم يدق صوت جرس فيقف الجميع ثم يجلسون.

في البداية موضوع التجربة يتعجب ثم يقلدهم فيقف بدق الجرس معهم.

مع مرور الوقت يذهب المساعدون واحدا واحدا بعد تقليب الطبيب لهم فبقي الشخص موضوع التجربة وحيدا يقف برن الجرس.

العجيب أنه جاء شخص آخر فسأل موضوع التجربة لماذا تقف عند رن الجرس ؟

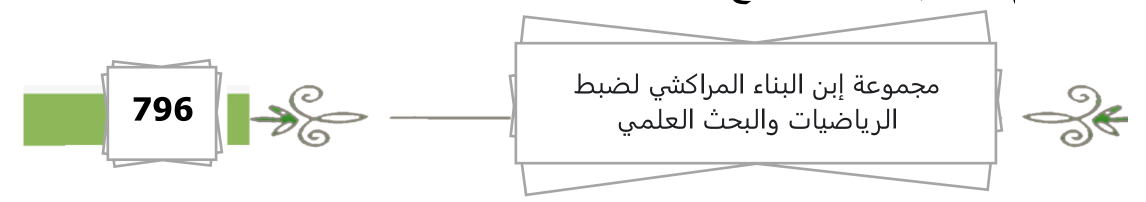
فأجاب رأيت من كان هنا يفعله ففعلته... وبعد تردد الشخص الجديد بدأ بالوقوف مع رن الجرس كذلك ثم جاءت أشخاص جديدة فكذلك قلدوا الجميع فكانوا يقفون متى دق الحرس ؟؟؟

الغريب في تجربة آش السابقة أن موضوع التجربة في البداية يتحرج من الجواب الخاطئ لكنه في النهاية يغير نظرته للخطوط فيقتنع بأن الجواب الخاطئ هو الصحيح.....

فالإنسياق ليس فقط بتأثير عابر بل يغير في النهاية طريقة تفكير الشخص فيقتنع بالخطأ.

فهذا الذي نشاهده في مجتمعنا المريض فمن كثرة ما تعودت الناس على الباطل أصبحت تراه صوابا فالناس تتبع الجمهور في البداية خوفا من التفرد بالتفكير ثم ينتهي بهم الإمر إلى الإقتناع بذلك....

دورنا نحن هنا هو تحطيم هذا الإنسياق بتوضيح الحق وتسمية ما هو باطل بباطل .



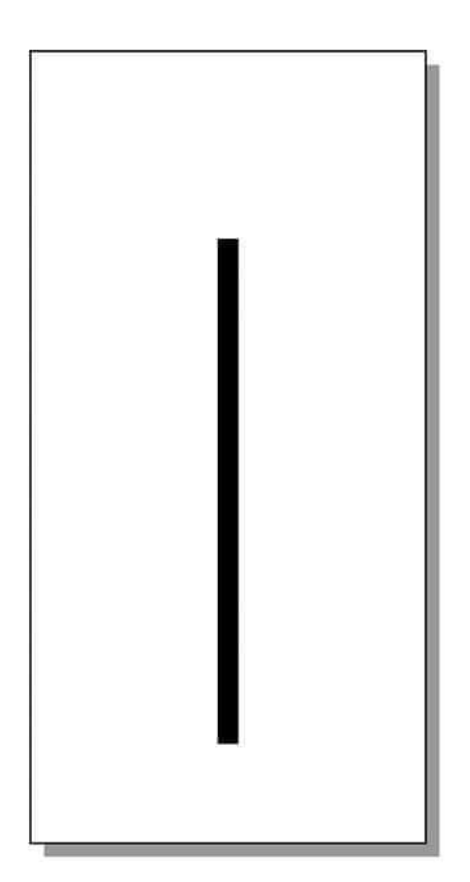
مراجع

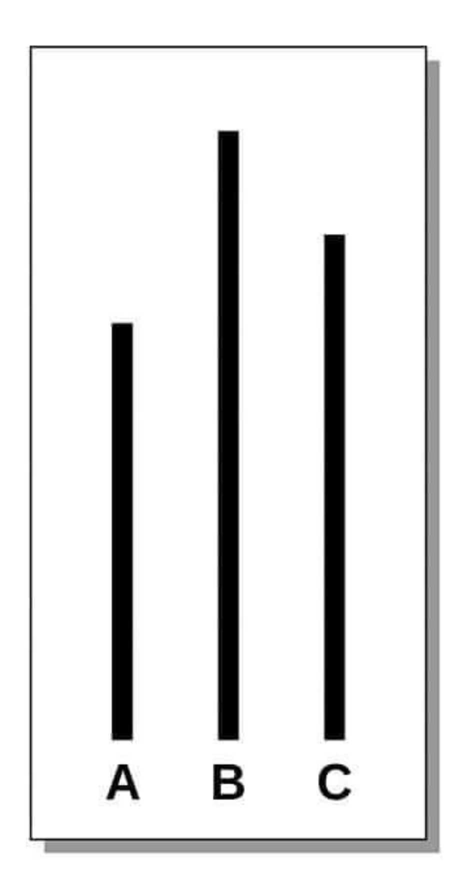
تجربة العيادة في الرابط https://m.youtube.com/watch?v=QOZRim9SKm8 :

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Exp%C3%A9rience_de_Asch

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Conformisme







الطريقة السنغافورية

الطريقة السنغافورية، طريقة تدريس للرياضيات في سنغافورا للأطوار الأولى من التحضيري إلى السنة السادسة، هدفها التدرج بالطفل في المسائل الحسابية من الأمثلة الحسية إلى الكتابة التجريدية.

صنعت هذه الطريقة في بداية الثمانينيات من القرن الماضي، ثم اشتهرت سنة 1995 عندما ارتقت سنغافورا للمرتبة الأولى في تقويم TIMSS و هو تقويم تقوم به احدى الجمعيات العالمية لتقويم المستوى الدراسي للتلاميذ في كل دولة.

حاليا هناك حوالي ستين دولة تتبع هذه الطريقة منها الولايات المتحدة الأمريكية و الكثير من المدارس في أنجلترا.

تعتمد الطريقة السنغافورية على ثلاث مراحل أساسية:

المرحلة الأولى مرحلة النموذج : حيث يقوم الطفل في العمليات الحسابية بصناعة نموذج للقيام بالعمليات الحسابية فعلى خلاف الخشيبات المستعملة عندنا في المراحل الأولى يقوم الطفل برسم عمود مثلا أو صناعته من الألعاب لكل عدد فيصنع أعمدة ذات أطوال مختلفة.

للأستاذ دور مهم في هذه المرحلة إذ يجب عليه قيادة التلميذ نحو صناعة نموذج صحيح بطرح أسئلة تسهل له ذلك، فالملاحظ هنا أن الطفل على عكس الطريقة المستخدمة هنا يلمس الأعداد ولا يحتاج للذهن لاعطاء عدد من الخشيبات أو القرياصات مفهوم العدد.

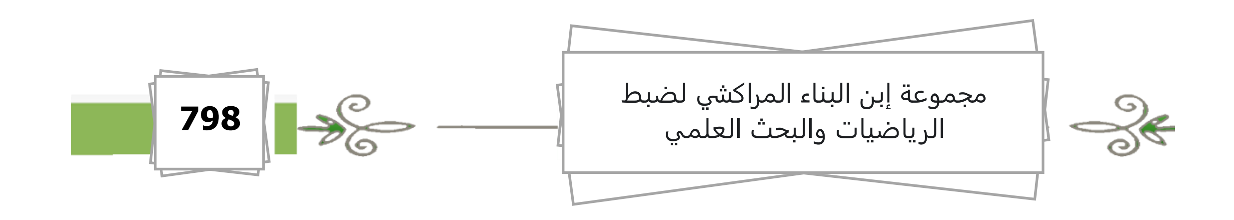
كما يقوم الطفل في هذه المرحلة بحفظ الكثير من العمليات الحسابية السهلة دون الحاجة لعملية الجمع ذاتها فهذا الحفظ سيساعده لاحقا في العمليات الحسابية، كمقارنة في مدارسنا الطفل لا يقوم إلا بحفظ جدول الضرب أما الجمع فيطبق خوارزمية على كل حالة بتحويل الأعداد إلى قريصات ثم اعادة عدها أو الإتمام عليها.

المرحلة الثانية للطريقة السنغافورية تعتمد على المرور من الملموس إلى المجرد و ذلك بتحويل النموذج الملموس إلى صورة ثم إلى أعداد ففي هذه المرحلة يتخلص التلميذ من الملموس ليمر إلى التجريد.

المرحلة الثالثة هي التعبير إذ يمر التلميذ من التجريد إلى التعبير عن جميع الخطوات التي يتبعها للوصول إلى الحل و ذلك لتسهيل حفظ الخطوات.

تحتاج الطريقة السنغافورة لزمن طويل كما أن التلميذ يوجه لدراسة مسائل عميقة على حساب التوسع في الكم و هذا ما يعطيه قاعدة صلبة تساعده في المستقبل، كما أن هذه الطريقة تعتمد على العمل الفردي فلا يوجد شرح جماعي أين يفهم البعض و لا يفهم الباقي لكن ذلك يولد التنافس بين الأفراد.

عند تمحيص الطريقة السنغافورية فنجدها نجحت لعدة أسباب: :



الأول طبيعة الشعب الآسيوي أين العمل من خصائصهم فمن السهل توجيه الطفل نحو العمل الفردي للطبيعة الإجتماعية كما أنه تقدم دروس خصوصية لهم منذ صغرهم و مستوى التنافس عندهم غير الموجود عندنا.

الثاني : اعطاء كل طفل الوقت الكافي للوصول إلى المستوى المطلوب وبناء قاعدة متينة على عكس المتبع عندنا من تصنيف التلاميذ لذكي و قليل الذكاء وذلك للكم الدراسي الذي يجب تدريسه للتلاميذ.

الثالث : استعمال أشياء محسوسة على عكس الطرق المتبع عندنا و هي باستعمال بعض الأشياء المحسوسة لكن جمعها ذهنيا تحت مسمى عددي.

أما من ناحية المراحل الثلاثة فالطريقة لا تختلف عن شبيهاتها من المرور من الحس إلى التجريد.

تبقى هذه الطريقة و إن كانت تنتج نتائج جيدة في المراحل الأولى خالية من الابداع إذ الطفل يوجه نحو طريقة واحدة للحساب و ربما هذا ما يبين غياب المدرسة السنغافورية في رياضيات ما بعد التدرج.

كما أن طبيعة العنصر الآسيوي لها تأثير في نجاح الطريقة لذلك تحتاج لتعديل لتوافق مجتمعات مختلفة.

https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_de_Singapour

https://www.lasalledesmaitres.com/methode-singapour/

https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:jMYdQzQVuTEJ:https://methodeheuristique.com/actu-maths/analyse-de-la-methode-de-



الرياضيات التطبيقية



أهل العلم بين العوام دراويش : النظرية النسبية لأينشتاين نموذجا

نعم أهل العلم مجانين فالمجنون من غاب عقله والعوام لا يرون عقلا في كثير مما يقوله العلماء.

فمن يصدق أن النجوم التي يراها بأم عينيه ليست في المكان الذي يراها فيه وأن المالانهاية التي لا يراها في ظاهر الواقع يسير عليها باطنه وأن وراء العشوائية لا عشوائية وأن الفراغ نصنع منه مجموعة غير قابلة للعد فأي جنون هذا يجمع بين الصناعة من الفراغ وعدم قابلية العد وينتج عنه تشوه الفضاء الزمكاني بالكتلة!!!

فليس من شيء رفض تصديق كبار المسؤولين من الجيش الامريكي للعلماء عند التحضير للأقمار الصناعية لنظام الجي بي أس في السبعينيات إذ أخبروهم أنهم عليهم الأخذ بتأثير الجاذبية على الزمن التي تنبأت به النسبية العامة فرموا ذلك ظهريا إذ كيف يصدقون أن الزمن يتمدد فكانت المفاجأة!!

ساعات الأقمار الصناعية تخالفت مع الأرضية نظرا لإختلاف الجاذبية بين سطح الأرض وخرجها فما كان على الجيش إلا الإذعان للعلماء وتعديل أنظمتهم.

ليس للعوام إلا التسليم لعلم العلماء لا تصديقا لهم إنما ذلك أنهم أول منتفع بعلمهم فيتركون الشقاء للعلماء والرفاهية لهم وليس ذلك إلا لنبل نفوس العلماء ذلك أنهم يتورعون عن قول نحن نعلم وأنت لا تعلم لكنهم يقولون نحن نجهل وأنت تقول أنا لا أجهل فيميل العوام لمن يزعم أنه لا يجهل فيحكمونهم عليهم فزادوهم جهلا على جهل.



العناصر بين التعميم البيولوجي والتجربة الفيزيائية والدقة الرياضية

ثلاث أصدقاء بيولوجي وفيزيائي ورياضياتي يركبون قطارا في آيسلندا فإذا بالبيولوجي يرى من النافذة خروفا أسودا...

فقال : خرفان آيسلندا سود

قال الفيزيائي : لا تعمم إنما في أيسلندا خرفان سود

قال الرياضياتي : تحروا الدقة إنما يوجد في آيسلندا على الأقل خروف ومن بين مجموعة الخرفان في آيسلندا يوجد خروف شقه الأيسر أسود.....

أما البيولوجي فيرى العنصر ممثلا لجنسه فيعمم أوصافه

أما الفيزيائي فيرى العنصر المكتشف كتجربة لا تعبر إلا عن نفسها لكن يقيسها بمعارفه فيعمم على قدرها

أما الرياضي فيتحرى الدقة فلا يجزم إلا بما يرى ولا يحكم على ما لا يرى

التجريد بين الرياضيات والفيزياء والإعلام الآلي

سنحاول في هذا الموضوع إن شاء الله التطرق إلى أفكار مهمة في صناعة العلوم فكيفية تأصيل صناعة العلوم هو علم غائب من منظومتنا التدريسية رغم أنه أهم العلوم العلمية لأنه يبين لنا كيفية تطور التكنولوجيا عن طريق تبادل الأفكار بين علوم مختلفة وكيف يمكننا أن نتصور العلم غدا.

سنتكلم اليوم عن التجريد وفصل المسؤوليات في علوم مختلفة.

التجريد في الرياضيات يقوم بفصل الخصائص عن الأشياء في الواقع ليعطيها وجودا ككائن في الرياضيات يمكن التعامل معه منفصلا.

أهم فائدة للتجريد الرياضي هو فصل الخصائص عن الذوق البشري وكذلك فصل الخصائص عن بعضها البعض وهذا يجعل كل خاصية لا تؤثر على أخرى عند الإستدلال فهذا نوع من فصل المسؤوليات.

لفهم مشكلة تأثير الكائنات في بعضها لابد أن ننظر للواقع ففي الواقع الحوادث في الحقيقة هي نتيجة لخليط من التأثيرات فلا يمكننا الكلام عن حركة بسرعة ثابتة فوق الأرض لوجود مؤثرات خارجية كالاحتكاك والجاذبية والهواء وما غير ذلك.

فلا يسلم تفكير بشري في الواقع من إهمال بعض المؤثرات لدراسة التجربة مما يعطينا نتائج غير دقيقة ويصيب إبتكاراتنا بنتائج وخيمة غير متوقعة كسقوط الطائرات وإنفجار المفاعلات.

هذا المشكل غير موجود في الرياضيات ذلك أن صناعتها في الأصل قائمة على فصل الخصائص والمسؤوليات فإذا كان في الواقع لا يمكن فصل استدارة البطيخة عن هشاشة قشرتها ففي الرياضيات الاستدارة مفهوم مجرد لا يؤثر فيه شيء آخر.

فكرة الفصل بين الخصائص هي أساس تكنولوجيا اليوم ولعل الكثيرين لا ينتبهون لها لكنها مفهوم التجريد حاضر بقوة في الصناعة الحديثة وسنضرب عليه بأمثلة:

أولها حاويات البواخر فلو لاحظتم هذه الحاويات لها مقاييس متفق عليها بحيث عند تحميلها في الباخرة لا يهم المحملين ما يوجد فيها إذ المهم مقاييسها.

في الحقيقة قام البشر هنا بتجريد البضائع عن مقاييس تحميلها عن طريق فصلها في حاويات متفق على مقاييسها.

وكل البضائع أصبحت تصنع لتدخل في هذه الحاويات.

هذا ما نسميه باللاتينية procedure de standardisation أي عملية التعارف على مقاييس موحدة.

هذه الطريقة بدأت بصناعة السيارات فصنعت من اجزاء ذات مقاييس متعارف عليها بحيث أصبح كل مصنع ينتج جزء على حدة ثم تركب في سيارة موحدة.

في الحقيقة عالمنا المعاصر قائم على هذا فنجد هذه الطريقة في جميع الميادين.



فمجال الشرائح الدقيقة بعمل على هذا النظام كذلك فالهواتف الذكية هي تجميع لعناصر تصنع كل منها في دولة على حدة لتركب فتصبح هاتف.

وحتى في المعلوماتية فطريقة صناعة البرامج كذلك قائمة على هذا التجريد والذي يهدف إلى صناعة الأشياء بطريقة معيارية او ما يسمى بـ modulaire

فالبرنامج يركب مم مجموعة من البرامج كل برنامج له هدف معين ولا يتدخل في عمل البرنامج الآخر بحيث لا يؤثر على عمل غيره لكنه يحترم المداخل والمخارج.

فهذا الذي يمكننا من شراء أي نوع من الطابعات ثم تشغيلها بربطها بالحاسوب فتشتغل ذلك أنها مصنوعة باحترام معايير متفق عليها.

الذي وقع في عشرين السنة الأخيرة هو دفع طريقة التجريد الرياضي وفصل المسؤوليات في الإعلام الآلي إلى أوجها فبدأ تطبيقها في البرامج نفسها عبر مراحلة متعددة، أولها:

فصل الطبقات séparation.des couches وهي طريقة في البرمجة تهدف إلى تجريد أجزاء البرنامج ليقوم فقط بما يجب القيام به دون التدخل في برنامجه الداخلي وتم ذلك عن طريق ابتكار ما يسمى بلغة الأشياء: Programmation orientée objet

وكان هذا في نهاية التسعينيات وبداية العشرية الأولى للقرن الواحد والعشرين.

ففي هذه اللغات أصبحت أجزاء البرامج كائنات كل كائن يصنع على حدة بشكل منفصل فإذا أراد آخر أن يستعمله فسيناديه بخصائصه الخارجة فقط لكنه لا يرى كيفية عمله الداخلية.

فإذا أردت مثلا أن تتعامل مع جملة فعندك كائن يسمى سلسلة أحرف هو من يسير الجملة فإذا أردت طول الجملة فإنك لا تعد حروفها إنما تنادي الكائن فتطلب منه اعطاءك طولها فيعطيك الطول وهذا يجعلك لا تهتم باعادة برمجة خوارزمية حساب الطول لأن هناك كائن يقوم بها.

وكذلك يجعل هذه الخوارزمية مفصولة عن طلبك فإن أراد المسؤول عن كائن سلسة أحرف اجراء تعديلات لتسريع حساب طول الجملة فسيقوم به داخل كائن جملة لكن لا يهم من يستعملها لأنه لن يتأثر بتغيير الخوارزمية لأنه مفصولة مخفية داخل الكائن فهذا ما يسمى بارقام نسخ البرامج versioning

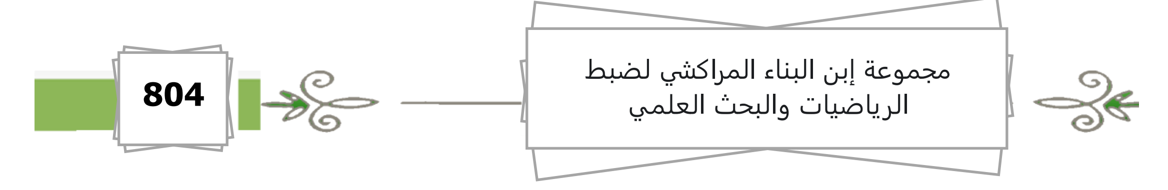
فعند تحديث الويندواز فإن برامجك الموجودة في الحاسوب تبقى تشتغل رغم تحديثه.

فهذا بالضبط ما تقوم به الرياضيات إذ لا يهمك بطيخة أو كرة او عجلة فالرياضيات تقول لك أدرس دائرة فتجرد الشيء لتترك الخاصية فقط.

ولذلك المجموعات العددية لها طرق صناعة متعددة لكن في النهاية طريقة الصناعة لا تغير العمل داخلها لأن خصائصها لا تتغير.

ولذلك نتكلم عن التماثل الطبولوجي والجبري والتفاضلي....

المرحلة الثانية بدأت حوالي 2007/2005 وهي مرحلة بنية الخدمات الدقيقة.



فقد لوحظ أن البرامج التي صنعت على حدة عند وضعها في نفس الحاسوب (server) تؤثر على بعضها فكل منا أضطر ذات يوم لاعادة تشغيل الحاسوب لأنه شغل برنامجا أكل جميع ذاكرته فأوقف البرامج الأخرى.

فاخترعت طريقة جديدة وهي تقسيم البرامج إلى برامج ذات خدمات دقيقة بحيث يمكن تشغيل كل برنامج في حاسوب على حدة.

micro service

فائدة هذه الطريقة أنه إذا سقط برنامج ذو خدمة دقيقة فإنه لا يسقط الباقي.

بل في السابق كان برنامج واحد ضخم فإذا زاد عدد مستخدميه كنا نضطر لتشغيل حاسوب جديد لتشغيل نسخة من هذا البرنامج مما يعني اهدار وقت ومال.

أما عن طريق برامج الخدمات الدقيقة فإذا زاد عدد المستخدمين يكفي زيادة عدد نسخ البرنامج الدقيق الذي فيه استخدام أكثر.

أول من اخترع هذه الطريقة هي شركة netflix وتبعتها amazon ثم أصبحت طريقة البرمجة حاليا.

المرحلة الثالثة مرحلة تجريد الآلات (server) أو ما يسمى اليوم بالكلاود cloud أو السحابة المعلوماتية.

فعندما تضع برنامجين في حاسوب واحد وإن كان منفصلين فيكفي أن يستغل البرنامج الأول المساحة كلها ليفسد عمل الثاني.

فجاء الجواب عل هذه المعضلة من شركة آمزون amazon سنة 2007 إذ قامو بتجريد الحاسوب نفسه لتصبح حواسيب رقمية منفصلة عن بعضها تدور في حاسوب كبير بحيث كل برنامج وكل نظام لا يرى الآخر ولا يؤثر عليه.

ودفع الأمر لأوجه عن طريق اختراع الحاويات الرقمية عن طريق نظام docker ففي هذا النظام لا تثبت برنامج في حاسوب بل تضع البرنامج داخل حاوية رقمية مع ما يلزمه فقط ليعمل ثم تضع هذه الحاوية في برنامج تسيير عام orchestrateur وهذا يذكرنا بحاويات الباخرات التي لا يهم عند تحميلها على الباخرة ما بداخلها.

فهذا بالضبط ما صنع مع البرامج عن طريق docker و cloud .

فأصبحت لا تحتاج شراء حاسوب لتشغيل برنامجك بل عندك حواسيب رقمية جاهزة فيcloud

مثل amazon و google و azure و alibaba

فتضع فيها حاوية فيها برنامج لتركب بينها فتصنع أنظمة معقدة فإذا زاد الطلب على برنامجك يكفي بضغطة زر وأحيانا آليا لتضع server جديد فيه نسخة من برنامجك لمواجهة الطلب

فلو تأملنا هذا التطور من السيارات نحو الشرائح نحو المعلوماتية سنجده نفسه ما قامت به الرياضيات وهي تجريد الأشياء إلى خصائص بسيطة ثم التركيب بينها لصناعة كائنات معقدة.



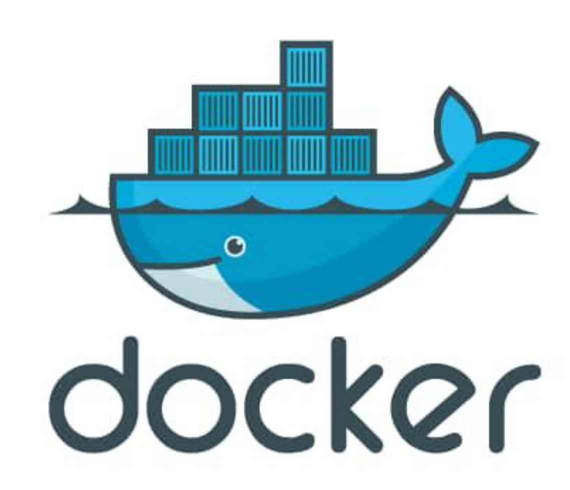
وهذا الذي عملت به كذلك الفيزياء عن طريق تصور المادة وما يسمى بالنظام الاعتيادي في تمثيلها model standard ثم ما يسمى بنظرية الحبال والتي تبني الكون على حبال بسيطة لتشكل أجساما معقدة.

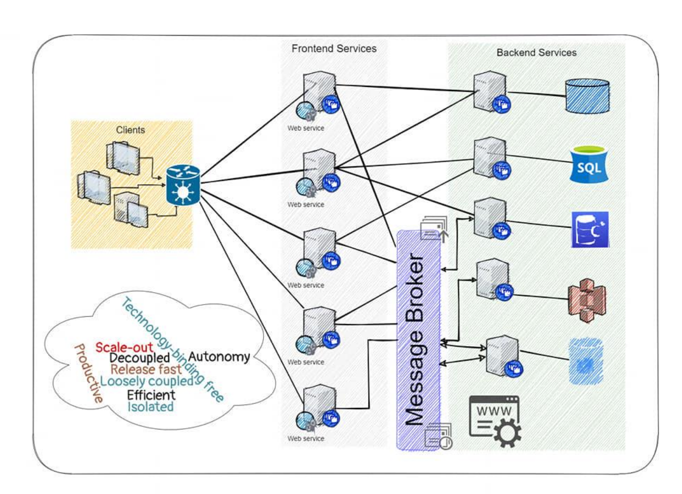
وهذا الذي نقوم به حتى في العمل عن طريق فصل المسؤوليات فالمدرس يدرس والحارس يحرس والمدير يدير فكل يشتغل بمسؤولياته.

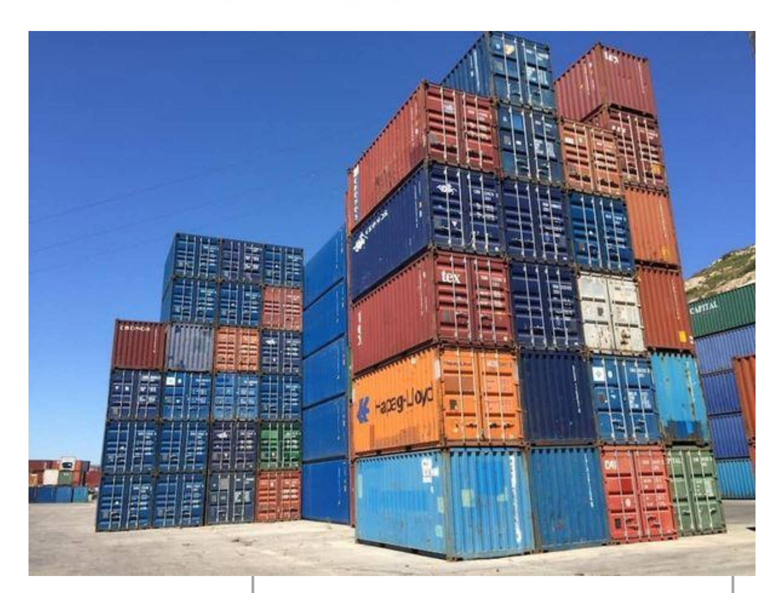
فكرة التجريد الرياضي وفصل الخصائص لفصل المسؤوليات والنتائج هي أساس حضارتنا المعاصرة ومازالت هذه الفكرة تنتج مبتكرات جديدة.

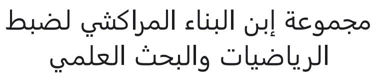












لماذا تستطيع الرياضيات التعبير بدقة عن الظواهر الكونية ؟

إن الكون مبني على الوجود والتركيب، فالمادة مكونة من ذرات والذرات مكونة من جسيمات.

وإذا ذهبنا نقيس الظواهر الكونية فنحن نقارنها بأجزاء من الكون ذاته فالقياس مقارنة وجود بوجود أو بالأحرى تكرار وجود بتكرار وجود.

ولو تأملنا الرياضيات لوجدناها مبنية على نظرية المجموعات والتي تبدأ بالتسليم بوجود المجموعة الخالية ثم نكرر صناعة مجموعات بها حتى بنينا بها المجموعات العددية.

لكن لماذا بالضبط المجموعة الخالية ؟ في الحقيقة خلوها غير مهم هنا بل الأهم هو وجودها بل يمكن تعويض التسليم بوجودها بالتسليم بوجود أي مجموعة كانت وسنستطيع كذلك بناء نظرية المجموعات كما نعرفها.

فالرياضيات مبنية على فكرة الوجود وفكرة التركيب بالتكرار وكلاهما أساس بناء هذا الكون.

فإذا علم هذا فليس من المستغرب أن تستطيع الرياضيات التعبير عن الظواهر الكونية فكيفية بنائها تطابق بناء الكون.

السؤال الذي يطرح نفسه هل نستطيع بناء رياضيات أخرى على غير فكرة الوجود والتركيب ؟

الجواب على هذا السؤال صعب فطبيعة البشر تجعله لا يدرك الأشياء إلا متفرقة وواحدة تلو الأخرى في نطاق زمني وهذا يعني أنه لفهم الأشياء يحتاج لتركيبها من أجزاء فليس من المستغرب أن تبنى نظرية الأوتار على أوتار دقيقة تشكل المادة. هذا يعني أن الإنسان بطبعه يرتب الأشياء حتى يفهمها وترتيبه هذا مجرد طريقة إختيار فلو طلبنا من بشر عد قطيع من البقر لبدأ بإختيار عشوائي لبقرة ثم أخرى حتى يعدهم.

نعم قد يستعمل عمليات حسابية لتسريع الحساب لكنها مبنية على ترتيب وإختيار.

نظرية المجموعات نفسها تدخل الإختيار بطريقة طبيعية في المجموعات المنتهية بتسليمها بإمكانية اختيار أي عنصر منها ثم تضيف التسليم بذلك في مجموعات قابلة للعد ثم تلجأ لمسلمة الإختيار في مجموعات كيفية. وذلك يعني أن الترتيب موجود في بنية الرياضيات و أنه ليس بمفهوم زائد عن المجموعات.

لذلك كان ترتيب الأعداد الطبيعية شيء تلقائي نابع من صناعة الأعداد نفسها فنحن لا نتقن صناعة هذه المجموعة إلا بطريقة تراجعية. الرياضيات مبرهنات معقدة مبنية على افكار بسيطة : الوجود، التكرار والتركيب، والإختيار، والإختيار مكافئ للمقارنة فالمقارنة مجرد إختيار.

ولو نظرنا للكون لوجدناه كذلك مبني على الوجود والتكرار والتركيب أما الإختيار فيظهر لنا في صورة الزمن إذ الزمن ما هو إلا طريقة بشرية في إدراك الكون فالعقل البشري يقارن بين تغير التركيب في الكون فيراه في مفهوم زمني. الكون كذلك معقد والبشر يريد أن يجعله مبنيا على أفكار سهلة.



عبقرية العقل البشري في التعبير عن الظواهر الكونية:

عدد، شعاع، قياس، تكامل، توزيعات ....لماذا ؟

قد ذكرنا في مرات عديدة أن العقل البشري يحاول تجريد الخواص من الظواهر الطبيعية التي تتسبب في التغير فيعطيها وجودا رياضيا ثم يجري عليها تحويلات منطقية لينتج خواص أخرى تمكنه من وصف التغير في الواقع.

لكن الذي يبدو في الكون أنه إن كانت الخاصية لها دور في السببية فإن كمية الخاصية أو بالضبط مقدار تكرارها له دور في تغير الأشياء.

فوهجان نور مصباح كهربائي لا يتعلق فقط بخواص الإلكترونات في الكهرباء بل بعددها كذلك.

لذلك كان وضع العدد لازما للتعبير عن الظواهر الكونية، فالعدد ما هو إلا تعبير عن التكرار.

لكن كما هو ملاحظ في الكون أن التكرار ليس سهل التمييز خاصة مع الأجسام الصغيرة.

أما الصغر فقد حل معضلته العقل البشري بالأعداد الناطقة والعشرية وذلك بإعطاء مفهوم لمقارنة التكرار فالعدد 2 على ثلاثة ما هو إلا تكرار مرتين لجزء من شيء لو كررناه ثلاث مرات حصلنا على الشيء كله.

لكن تبقى مشكل الدقة في قياس التكرار وزد على ذلك التغير الذي لا يجري في الكون إلا عبر الزمن.

فلا يمكن للبشر قياس كل القيم في كل لحظة خاصة مع تصور عدم تقطع الزمن في العقل البشري لذلك تصور البشر عدم التقطع في الأعداد كذلك وكأنهم يقربون الواقع المتقطع بمجموعة مستمرة سموها مجموعة الأعداد الحقيقية.

لكن الواقع متعدد الخواص أما العدد فهو يصف تكرار خاصية لعينها، فأدخل العقل البشري مفهوم الفضاء الشعاعي وهو التنوع في العدد فعبر عن كل نوع ببعد شعاعي.

المسألة لم تنته بهذه السهولة فإن كان حل الكميات الصغيرة جاء عبر الاعداد العشرية بقيت معضلة الأعداد الكبيرة سواء لكون التكرار كبيرا جدا أو لكون التغير يحدث في زمن صغير جدا فينتج عن القسمة أعدادا كبيرة.

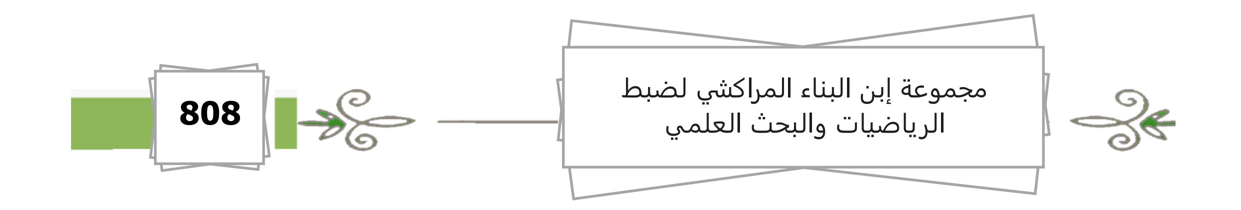
حل هذه المعضلة جاء عبر آليات متعددة أولها النهاية فالنهاية أعطت مفهوما للتقريب الفيزيائي، أما الأعداد الكبيرة للكميات الصغيرة فعبر عليها البشر عن طريق الجمع مع النهاية أو ما نسميه بتكامل ريمان والسلاسل العددية.

فهذه الآليات تخول للبشر وضع عدد أمام كميات كبيرة لخصائص متناهية في الصغر.

غرض البشر من وضع هذه الأعداد التعبير عن الظواهر الطبيعية والمقارنة بينها.

مما سبق نرى ظهورا واضحا لمفهوم الدالة لأننا نعبر على حوادث بدلالة الزمن.

مع التطور العلمي أصبحت النتائج العددية كثيرة العناصر وأظهرت مشاكل في القياس أدت لتباين في القيم.



فإذ حاولنا تجريد هذه القيم أظهرت لدينا سلوكات شاذة في الدوال، فإن كانت المالانهاية الرياضية خاصية ففيزيائيا هي مجرد قيم كبيرة امام قيم صغيرة.

وهنا جاء العقل البشري بآلية جديدة سماها القياس فبدل عد عناصر مجموعة يقيسها بعناصرها فلا حاجة في عد الإلكترونات داخل بطارية إذ يكفي قياس كمية الطاقة عبر معيار معين. وأمام القياس وضع التكامل بمفهوم لوبيغ مع هذا الكم الهائل من الأعداد إذ يكفي على كل مجموعة مقيسة اختيار ممثل للدالة أو قيمة وسطية فتصبح الدالة كأنها كثافة على مجموعة فيكفي لحساب كميتها ضرب الكثافة في وزن المجموعة أو قياسها ثم جمع كل هذه المقادير للحصول على تكامل يعبر عن كمية الخاصية.

لكن هنا يظهر مشكل الممثل وما هو إلا مشكل القياس الفيزيائي فالقياس نفسه يتم عبر آلات والتي هي كذلك متغيرة في الزمن فهي دوال كذلك فنحن نقيس دالة بدالة.

فإن كان الاستمرار قد يوحي بإمكانية اختيار قيمة وسطية على كل قسم من مجال فإن الواقع شيء آخر إذ لا ننسى أننا في الأصل ننطلق من كون متقطع المادة مع قياسات غير مستمرة كما لا ننسى مشكلة القياسات الشاذة التي تجرد رياضيا بالمالانهاية.

وهنا صنع العقل البشري مفهوم التوزيعات فالتوزيعة ما هي إلا قياس دالة بدالة نسميها دالة التجربة أو معيارها على مجموعة قابلة للقياس ثم جمع الكمية عبر التكامل.

لذلك في تعريف التوزيعات نكامل جداء الدالة في دالة أخرى تعبر عن دالة القياس.

فدالة القياس يمكنها كسر المالانهاية التي ظهرت عبر القياسات الشاذة وهي تعطي نظرة لكمية الدالة عبر منظار القياس.

فكما نرى، المفاهيم الرياضية التي نظنها مجردة لها وجود فعلي في الواقع ونستعملها كل يوم للتعبير عن الظواهر.

أما تطور الآليات الرياضية فهي تعبر عن تطور حاجة العلوم الأخرى لآليات فعالة نعبر بها عن الظواهر الكونية.

لكن في النهاية كل هذه الآليات تعود لمفهوم بسيط هو التكرار والمقارنة ولو نظرنا للكون فهو كذلك تكرار لجسيمات تؤثر في بعضها البعض.

الرياضيات شعر غزلي في وصف العالم.





من الظواهر الكونية نحو فضاء الدوال الحقيقية

الكون مبني على تكرار المادة وعلى السببية فالظواهر تنتج لأسباب لذلك

السببية علاقة ذات نتيجة واحدة مثلها مثل التطبيق أو الدالة.

فالدالة تجريد لمفهوم السببية الموجود في الكون وبما أن الكون مكون من تكرار المتشابهات والتكرار يعبر عن التكميم الذي نجرده بمفهوم العدد كانت الدوال الحقيقية خاصة معبرة عن الظواهر الكونية.

أما تنوع الكميات فصنعنا به الفضاءات الشعاعية.

الكون بصفة خاصة منتظم فظواهره مستمرة أو على الأقل هكذا تظهر لنا لذلك تجريد الظواهر الكونية يقودنا إلى فضاء الدوال المستمرة.

رياضيا فضاء الدوال المستمرة هو مجموعة اختيارات لروابط بين الأعداد بطريقة مستمرة أو منتظمة لكن هذه الاختيارات ليست من عندنا إنما ترسم ما يراه العقل في الكون من عدم تقطع الزمن وعدم تقطع المكان.

فالكون : تكرار متنوع غير منقطع متغير في الزمن وفق السببية.

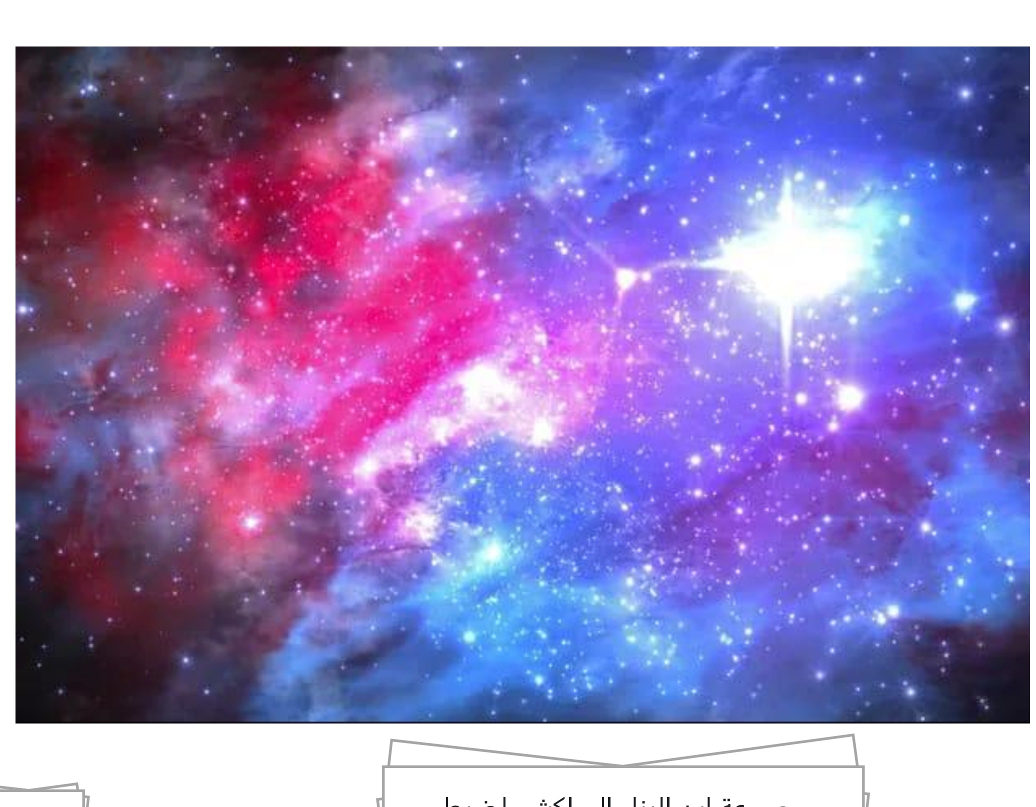
التكرار أعطانا الأعداد

التنوع أعطانا الفضاءات الشعاعية

عدم الإنقطاع أعطانا الإستمرار

السببية أعطتنا الدوال.

أما التفاضل فهو نتيجة للمقارنة اللانهائية لأننا نقارن الكميات بكميات مع تغاير كبير بينهما أو بتصور غير المتناهي في الصغر منها.



ما مدى وصف الرياضيات للواقع

من الرياضيات المتقطعة نحو غير المتقطعة ، المجموعات غير قابلة للقياس نموذجا

نحن نعلم أن وجود مجموعات غير قابلة للقياس ينتج مفارقات مثل مفارقة باناخ تارسكي والتي لا توافق المشاهد في الكون.

فلا يمكن تحويل كرة لكرتين من نفس الحجم.

يجب أن نعلم أنه فيزيائيا الكون متقطع فمن حيث المسافة لا يمكننا النزول تحت مسافة بلانك وهناك من النظريات كنظرية الجاذبية الكمية بالحلقات من تذهب إلى تكون الفضاء الزمكاني من جزيئات كونية منتهية العدد بطول مسافة بلانك.

عموما النظريات الفيزيائية الحديثة ترجح كون الكون مغلق ومحدود كما أن مادته منتهية مما يجعل الموجود في الكون لا يخرج عن مجموعات قابلة للعد لكن الذي يهنا هو مدى وصف الرياضيات للواقع.

كوننا مررنا لعدم قابلية العد في الرياضيات بصناعة R فهذا لتسهيل الحسابات على أن الرياضيات الحدسية لا تتفق مع الشكلية في صناعة R بهذه الطريقة

مشكلة R غير قابلة العد هي ظهور أعداد غير قابلة للإنشاء وعموما أعداد غير قابلة للحساب وهذا ما ترفضه الرياضيات الحدسية.

فالرياضيات الحدسية ترى أن هذه الأعداد تخالف المشاهد في الواقع.

لكن لا يمكننا إنكار نتائج الرياضيات الشكلية التي تساعدنا في فهم الواقع وحساباته فيمكننا إعتبارها كتقريب جيد للواقع من كون منته متقطع نحو مجموعات غير قابلة للعد مترابطة.

إنه من السهل العمل على رياضيات غير متقطعة منها على المتقطعة.

لذلك لجأت الرياضيات في ميادين عديدة لتحويل الرياضيات المتقطعة مثل نظرية الأعداد نحو رياضيات غير متقطعة مثل نظرية الأعداد التحليلية.

وأشهر مثال على ذلك هو الدالة زيتا لريمان.

الرياضيات فير المتقطعة المتمثلة في ترابط R وتراصها المحلي تعتبر نظرة مثالية للكون.

وإن كان في الواقع الكون متقطع ولعله لا يوافق R محليا إلا أنه يمكننا تصوره محتوى في صرح أكبر موافق لR .

يبقى السؤال هل هذا الصرح هو صرح نظري فقط يساعدنا على الحسابات أو أن لديه وجود فعلي ؟

هذا سؤال ليس لدينا له جواب اليوم لأنه لا يمكننا حاليا إلا مراقبة الكون من الداخل لكن لا ندري ما سنكتشفه مستقبلا.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Masse_de_l%27Univers





Enfin, la plupart des modèles cosmologiques indiquent que la taille de l'Univers observable, appelée horizon cosmologique, est de l'ordre du rayon de Hubble, c'est-à-dire du rapport c / H_0, c étant la vitesse de la lumière et H_0 la constante de Hubble définie plus haut. Avec la valeur donnée ci-dessus, le rayon de Hubble vaut environ 4300 mégaparsecs, soit dans les $1{,}32\times10^{26}$ mètres. La valeur exacte du rayon de Hubble dépend de la nature de l'ensemble des formes d'énergie qui emplissent l'Univers. Celui-ci étant composé à environ 70 % d'énergie noire, une forme d'énergie à pression fortement négative, et 30 % de matière de pression négligeable (matière baryonique et matière noire), les calculs indiquent que l'horizon cosmique fait environ 3,15 fois le rayon de Hubble, soit $4{,}16\times10^{26}$ mètres. Une sphère possédant un tel rayon possède un volume de 3×10^{80} m^3. La masse correspondante est alors de $2{,}78\times10^{54}$ kg, et environ 20 fois moins ($1{,}25\times10^{53}$ kg) si l'on considère la seule contribution de la matière ordinaire. Le nombre de nucléons peut également être calculé de cette manière, et atteint les $0{,}75\times10^{80}$, très

هل واقعنا فضاء باناخي ؟

قد يظن البعض أنه لدراسة الواقع نحتاج إستعمال مفاهيم موجودة في الواقع وهذا خطأ، إذ البشر يلجأ في أحيان عديدة إلى مفهوم أوسع من مفهوم الواقع لفهم الواقع.

فلو أردنا حساب المدة الزمنية اللازمة لحنفية ماء لملأ دلو ذو سعة معينة فإننا نستعين بحساب سرعة تدفق الماء بالنسبة للزمن وكأننا نعتبر تدفق الماء مستمرا مع علمنا أن الماء جزيئات لا يمكن أن يكون تدفقها مستمرا إذ بينها فراغات.

لكن رغم هذا نعلم أننا بهذه الطريقة سنقدم حسابات دقيقة في ظل إرتياب حسابي مقبول.

الذي يقوم به البشر هو تقريب الواقع من مفهوم أعم أسهل دراسة وهذا ما يطبقه في الرياضيات فمن منا لم يستعمل دراسة مشتقة دالة حقيقية لبرهنة تزايد متتالية إذ نلجأ للمرور من الأعداد الطبيعية نحو الحقيقية لأن دراسة الدوال فسها أسهل وبنظريات ومبرهنات أقوى.

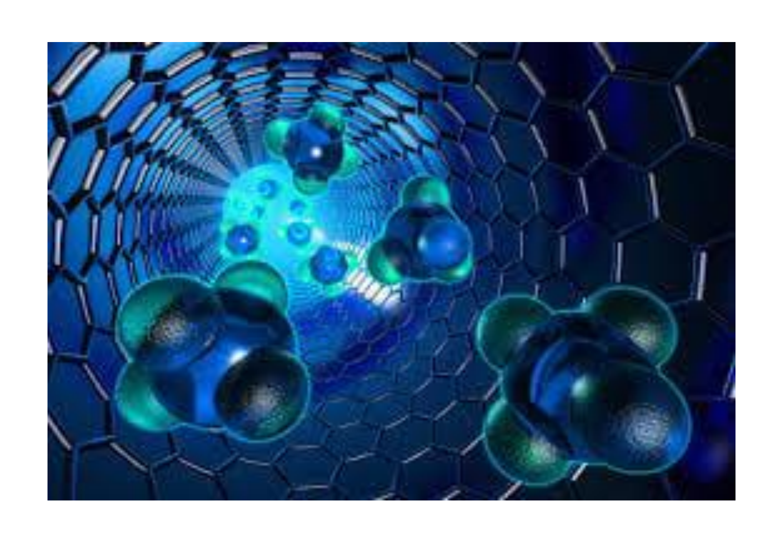
وهذا الذي نفعله عندما نحل معادلة كثير حدود حقيقي من درجة ثالثة إذ نمر للأعداد المركبة عبر طريقة كاردان.

لو تأملنا في مفهوم الفضاء الباناخي لوجدناه فضاء متري تام كل متتالية كوشية فيه متقاربة وهذه هي ذاتها إحدى طرق صناعة الأعداد الحقيقية إذ اتممنا الأعداد الناطقة بواسطة المتتاليات الكوشية لصناعة الأعداد الحقيقية.

فعندما نكتب عددا حقيقيا بكتابة عشرية غير منتهية ففي الحقيقة نحن نكتب متتالية كوشية.

الواقع ذاته لغزارة أجزائه يمكننا تقريبه من فضاء باناخي والفضاء الباناخي أسهل دراسة من فضاء متقطع ذلك أن تغير أجزاء غزيرة من الواقع عبر الزمن يعطينا متتاليات يمكن وصفها بالكوشية لانها تخضع لقوانين كونية تجعلها متقاربة.

الرياضيات تحول واقعنا من واقع متقطع نحو فضاء أملس.



ازدواجية النظر للظواهر الكونية والرياضيات المعاصرة ... لنحرر العقول...

في كل دقيقة تمر، تدور الأرض بنا مسافة 18 كلم على نفسها، لكن نحن لا نراها تدور بل نرى الأرض أمامنا مسطحة ؟ فكيف يمكن ذلك ؟

نعم نحن لا نشعر بالأرض تدور لأننا ندور معها، أما انحناؤها فصعب الرؤية المباشرة لكبر حجمها ووجودنا على سطحها.

البشر ينظر للكون من داخله ونظرتهم له جزئية، لكن ماذا لو كنا ننظر للكون من زاوية خاطئة ؟

بدأ من قوانين غاليليه ومرورا بقوانين نيوتن كنا ننظر للكون أو للمكان والزمان في الكون كشيء جامد تقع فيه الأحداث .

عندما جاء أينشتاين بالنظرية النسبية الخاصة سنة 1905 ثم العامة سنة 1915 غير هءه النظرة وبين أن الزمان ليس ذلك المتغير الرياضي المتجانس داخل مجموعة الأعداد الحقيقية بل هو متأثر بالحركة بل حتى الفضاء الزمكان يتشوه بوجود الكتلة فينتج الجاذبي فالفضاء نفسه حادث ومكان للحوادث يتأثر ويؤثر.

لا ادري هل تدركون ما يعني ذلك كرياضياتيين ؟

دعنا نسقط ذلك على الواقع الرياضي الساذج الذي تعلمناه في الثانوي.

فإذا كانت السرعة هي مشتق دالة المسافة المتعلقة بالزمن والممثلة في معلم متعامد ومتجانس فإن الجاذبية هي الكتلة مضروبة في التسارع والذي هو مشتق السرعة.

نظرية أينشتاين تقول لنا ان هذه الكتلة تشوه المعلم المتعامد المتجانس فتصنع الجاذبية بتغيير مستقيماته محليا فتؤثر في مسار الدالة بل مسار الدالة يحدث موجات في المعلم ... فالمعلم لا يصبح متعامد ولا متجانس...

أي أنك إذا مثلت دالة الأرض بجانب دالة الشمس فإن كتلة الشمس تغير مسار دالة الأرض وتؤثر في تسارعها فتؤثر في مسارها بل تشوه معلمك .... فتصور منحنى الدالة الذي ترسمه يغير منحنى الدالة الذي بجانبه ويشوه المعلم المتعامد والمتجانس الذي رسمته...

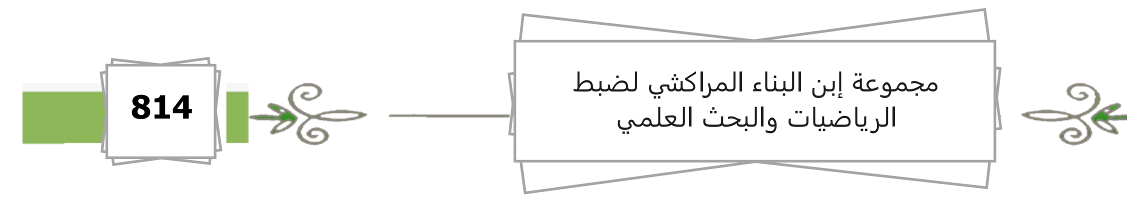
هل تجد هذا غير معقول ؟ في الحقيقة هو معقول لك لكن قوقعت عقلك فيما درسته في الثانوية فأي عاقل لو قلت له لو وضعت عشرة كيلو بطاطس داخل علبة كارتون ماذا يحدث ؟ فسيخبرك ثقل البطاطس يشوه الكرتون

فهذا الواقع فلماذا تواصل الظن أن وجود الدالة في معلمها لا يغير من المعلم ! إلا بسبب ما درسته وحفر في ذهنك في الثانوية وهو الفصل بين الدالة والمعلم.

لكن رياضيا المعلم الذي نعرفه غير متغير والدالة لا تغير المعلم .... فكيف يمكن تقريب هذا من الواقع ؟

نعم المعلم لا يتغير لأنه معلم ساذج سذاجة اعتبار الأرض مسطحة لا تتحرك.

فهل هناك خطأ فيما درسناه ؟



لا يوجد خطأ لكن الرياضيات علم تجريد تبدأ الدراسة فيها على الخصائص بعد أن يجردها العقل لكنها غير مسؤولة عن أخطاء تجريد العقل أو غير موافقة الخصائص التي انطلقت منها للواقع.

مشكلة العقل البشري أنه يجرد ما في الكون من حيث رؤيته للكون ومن هنا يأتي الخطأ فالخطأ خطأ رؤيته القاصرة.

فهذه الرؤية المختلفة للضوء كجسيمات وللضوء كموجة هي من صنعت النظرية النسبية من ناحية و فيزياء الكم من ناحية أخرى، نظريتان متناقضتان.

يبدوا أن ازدواجية النظرة تنتج لنا نظريات متعددة متناقضة، لكن أين هي الحقيقة من كل هذا ؟ فهل يمكننا أن ننظر للكون كما هو لا كما نتوهم رؤيته...

دعني أقول لك أن هذه كذلك سذاجة أخرى، آمن بها أينشتاين إلى آخر حياته فكان يقول أنا أفضل أن أؤمن بوجود القمر حتى وإن لم أكن أنظر إليه.

وكان هذا إشارة منه لعدم تقبله لفيزياء الكم وبمبدأ التطابق الكمي وتفسير مدرسة كوبنهاجن له.

فبالنسبة لبور زعيم مدرسة كوبنهاجن، لا يمكننا وضع نظرية تعبر عن الواقع الكوني ذلك أنه غير موجود كما نتخيله، فنحن لا يمكننا شرح الكون إلا كما نراه.

https://fr.m.wikipedia.org/.../%C3%89cole_de_Copenhague...

بتعبير آخر ما نظنه موجودا بهيئة معينة إنما هو موجود في تلك الهيئة بسبب مراقبتنا له فنحن نرى تداخلنا مع الكون لا الكون نفسه.

فعندما ترى تفاحة حمراء فإنها ليست حمراء لأنها حمراء لكنها حمراء لأنك تراها حمراء ؟ ستقول هذا هراء ؟ فأقول لك وهل تظن أن التفاحة تصدر ضوء أحمر فقط ؟ أو أنها مجرد انعكاسات للضوء عليها وأنها تصدر اشعاعات أخرى لا تراها بعينك المجردة !!! وماذا لو كنت ترى جميع هذه الإشعاعات فهل ستبقى التفاحة حمراء ؟

بلغة ميكانيك الكم لا يمكن فصل المراقب عن التجربة.

تفسير كوبنهاجن لفيزياء الكم دفع شرودنجر لصناعة تجربته الشهيرة قط شرودنجر والتي يقول فيها إن كنتم تتقبلون أن الجسيمات يمكنها أن تكون في حالات مختلفة مناقضة للعقل البشري في آن واحد فلابد أن تقبلوا أن القط حي وميت في آن واحد.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Chat_de_Schr%C3%B6dinger

وعلي شبيه هذه التجربة وضع أينشتاين تجربته المسماة ببرميل أينشتاين أين اعتبر قطا فوق برميل مملوء ببودرة البارود ينفجر حسب حالة الجزيء فيصبح منفجرا لا منفجر والقط حي وميت في آن واحد.

لا أدري ما سبب تعذيب القط في هذه التجارب لكن لعلها إشارة منهم إلى الاعتقاد الشائع أنه للقط سبعة أرواح.



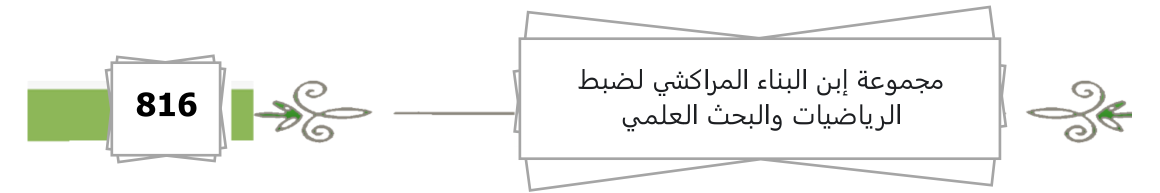
لكن كل هذه التجارب تدخل من غير وعي مسألة الوجود الزماني أحادي الحالة أو النظرة الساذجة إلى أن الشيء لا يمكن أن يوجد إلا في زمان ومكان واحد وأنه لا يمكن أن يشغل زمانين ومكانين في آن واحد ... بل ما معنى آن واحد في ظل فضاء زمكاني ... كل هذه قيود ارتبطت في عقولنا بسبب ما نعيشه فضيقتها.
يجب التنبيه إلى أن أينشتاين لا ينكر صحة فيزياء الكم وإنما يظن أنها ناقصة أي يظن أن هناك متغيرات ناقصة فيها إذا أتممناها أعطتنا نتائج غير متعلقة بالمراقب.
ذهب أينشتاين Albert Einstein مع مساعديه Boris Podolsky و Nathan Rosen لاختراع التجربة العقلية المسماة بأسمائهم EPR والتي تحاول اعطاء تناقض فكري لفيزياء الكم لكن دائما مع ادخال نفس المشكل التصور الزمكاني الأحادي للأجسام.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_EPR

الخلاف بين بور وأينشتاين استمر إلى ما بعد موتهما حتى جاء الإيرلندي بال John Stewart Bell فوضع سنة 1964 متغايرات بال والتي يمكنها الفصل بين النظرتين ولا أقول النظريتين بل النظرتين : هل يمكن وصف العالم كما هو كما يرى أينشتاين أو لا يمكننا وصف العالم إلا كما نراه كما يقول بور.
الذي قام به بال هو إعطاء طريقة حسابية للفصل في تجربةEPR
ثم جاء الفرنسي آسبي Alain Aspect مع فريقه في Institut d'optique Graduate School بين سنة 1980 إلى 1982 فحقق تجربته الشهيرة والتي رجحت كفة فيزياء الكم وأثبتت فعليا أننا لا نستطيع وصف الكون محليا إلا كما نراه وأقول محليا لجزئيات يطول شرحها.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Exp%C3%A9rience_d%27Aspect

ليست المرة الأولى التي تعطينا نظراتنا الساذجة للكون أخطاء في وصفه ولن تكون الأخيرة.
حاليا ونحن في بداية القرن الواحد والعشرين لدينا نظريتان تتسابقان لوصف الفيزياء محاولتان الجمع بين النظرية النسبية وفيزياء الكم وهما نظرية الحبال والتي تحاول تصحيح نظرتنا للكون برؤيته في 12 بعدا بدل 4 ونظرية الجاذبية الكمية بالحلقات والتي تحاول النظر للفضاء الزمكاني كجزيئات وليس كفضاء أملس بل تسعى لنزع الزمن من المعادلات.
فذهبت هذه الأخيرة بعيدا فمن الباحثين فيها من بدأ ينظر للزمن كعنصر دخيل وأنه غير موجود فعليا إنما هو وليد نظرتنا للكون ذلك أننا لا نعيش الحوادث إلا بالتتابع.
الأكيد أن فيزياء الكم ومتناقضة EPR وتجربة آسبي فتحت لنا آفاقا جديدة.
فنحن نتكلم الآن عن الانتقال الكمي téléportation quantique بل نحاول حاليا صناعة الحواسيب الكمية....
كل ما ترونه اليوم من حواسيب وهواتف ذكية و GPS هي وليدة فيزياء الكم والنظرية النسبية .
لكن أين الرياضيات من كل هذا ؟



الرياضيات كذلك تحررت من قيودها فإن كنا نري في الماضي دالة بمتغير حقيقي نشتقها في فضاء من نوع R^n فالرياضيات الحديثة غيرت النظرة.

ماذا لو لم يكن المشتق وليد دالة متغيرة بـ x ؟

بل لما لا تكون عملية الإشتقاق في حد ذاتها دالة تؤثر على دوال أخرى أي تصبح الدالة هي المتغير وما كنا نراه كمسار متغير بالزمن أصبح دوال متغيرة بدوال ذلك أنه لا معنى لمسار متغير بالزمن إلا أن نعطي وجودا للجزيئات في مكان معين في زمن معين لكن كيف يمكن ذلك إن كان الإلكترون نفسه موجة موجودة في مستو يشغل جزء من الفضاء ؟

فنحن لم نعد نتكلم على الإلكترون كجزيء موجود في مكان معلوم في زمن معلوم إنما أصبحنا نتكلم على السحابة الإلكترونية وعلى احتمال ظهور الإلكترون في عدة أمكنة فإذا تحرك فإنها موجة تتحرك وليس مجرد نقطة في مكان.

الرياضيات أعطت جوابا على هذا بما يسمى بالتحليل الدالي ونظرية المؤثرات.

فأصبح المتغير الحقيقي شيء جزئي غير مهم في هذه النظرية إنما المهم هو المؤثر كيف يؤثر على الدوال والدوال كيف تتقارب.

ذهبت الرياضيات إلى صناعة نظرية التوزيعات والتي تعبر عن أثر الدالة بدالة أخرى ولم يصبح المعلم مجرد R^3 بل أصبح فضاء من نوع L^2 والذي أساسه نفسه دوال متغيرة.

لقد قطعت الرياضيات شوطا كبيرا في تحرير العقول فبعد أن كانت مبرهنة فيثاغورث تتم في فضاء متعامد متجانس أساسه أشعة منتهية ثابتة الاتجاه والطول فأصبحت تعمل في فضاء هلبرت والذي صنعت له أساسا غير منته بعناصر هي نفسها متغيرات.

بل ذهبت لأبعد من هذا بدراسة الفضاءات الباناخية.

فكل هذه الكائنات الرياضية تعتبر تحريرا للعقول من النظرة الساذجة للمتغيرات والدوال.

أصبحت الرياضيات اليوم تسير جنبا لجنب مع الفيزياء.

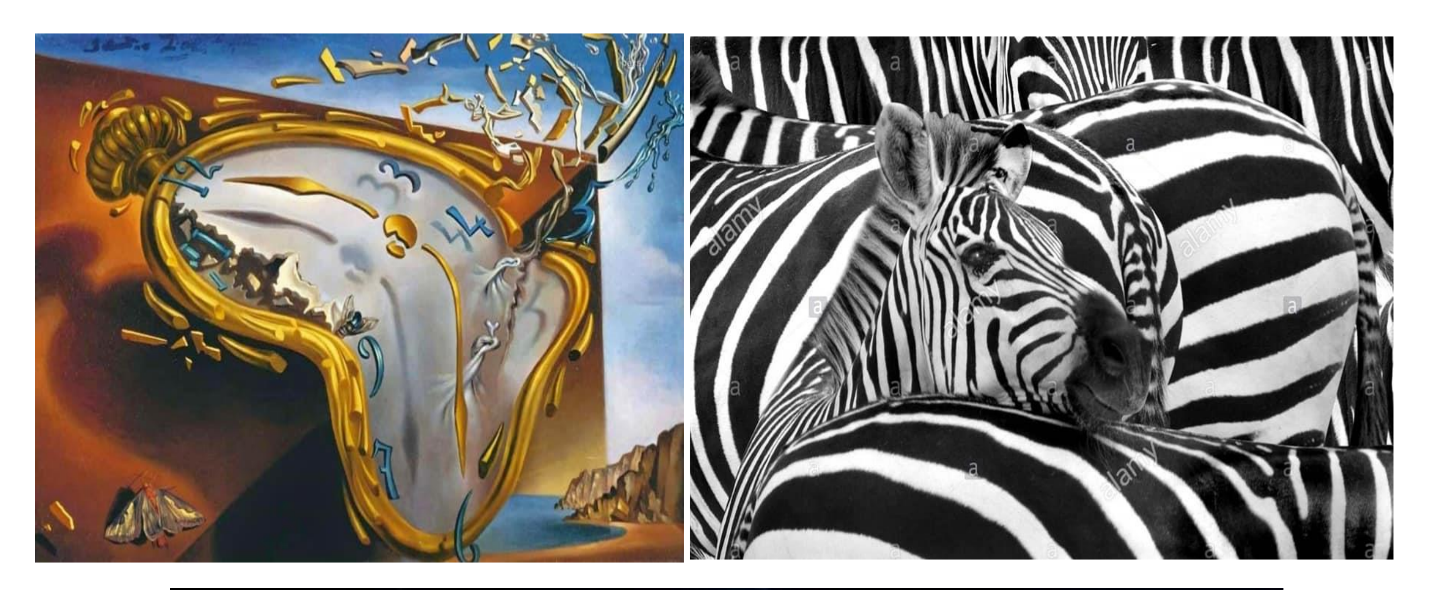
ولنا أن نتساءل رغم كل ما وصلنا إليه من تطور، هل سيكون كل هذا في حد ذاته نظرة ساذجة أخرى ستدحضها القرون المقبلة....

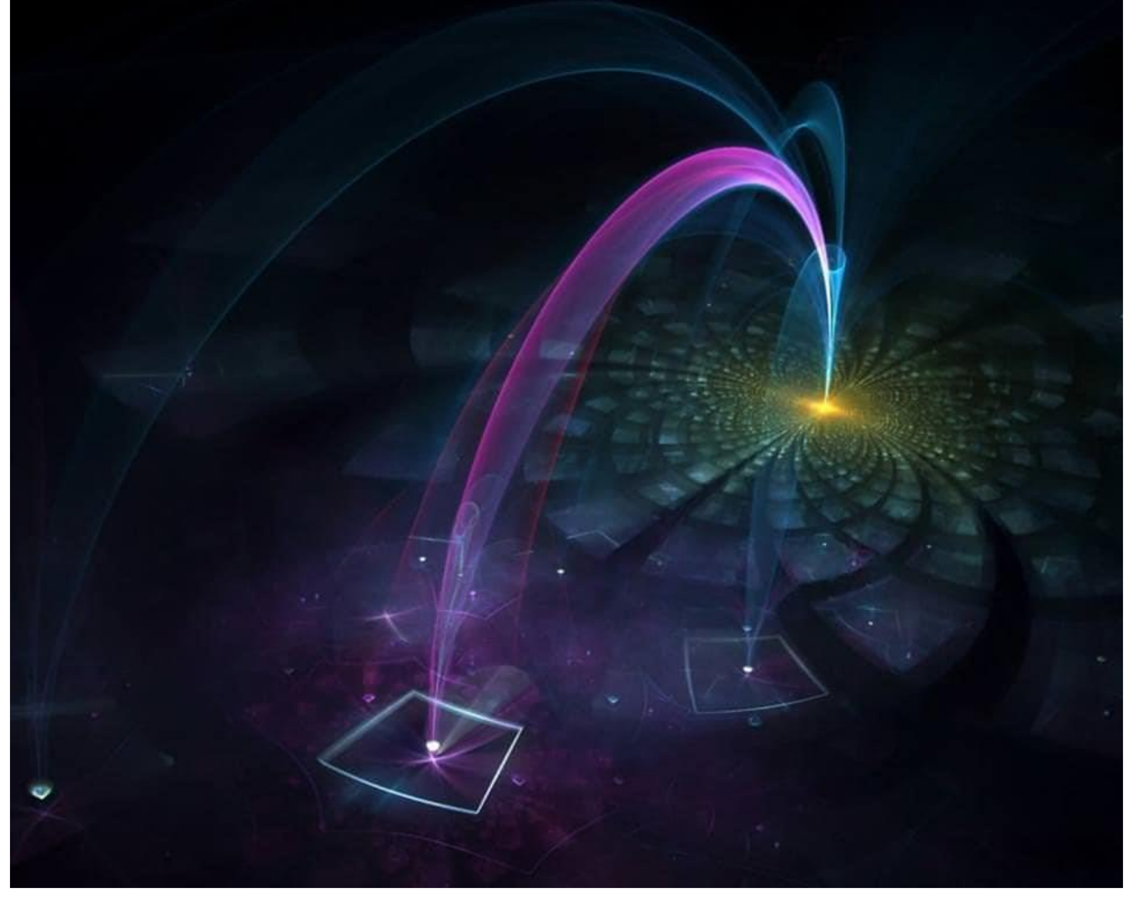
هذا نتركه لجيل المستقبل لكن واجبنا كرياضياتيين أن نقول لهم : حرروا عقولكم ولا تتقوقعوا فيما صنعناه اليوم فإن الرياضيات علم تشييد وإبداع فتحرروا وابدعوا ومن رأى طريقا جديدا فليسلكه....

كنصيحة لا تقيدوا طموحاتكم بمجرد الحصول على وظيفة فتأكلون وتشربون وتنامون كالبهائم بعد تحصيلها فإن ذلك هو الموت البطيء وموت قبل موت.

سيروا في الأرض وفكروا فإن الأفكار صرح لا نهاية له وإن الإنسان ميت لا محالة لكن أفكاره تعيش مادامت البشرية قائمة







المشاغب والقط المتشغشبشرودنجر

يولد الإنسان في أربعة أبعاد ثم تسجنه المدرسة في بعدين.

الدوال متعددة المتغيرات، التطابق الكمي، معادلة شرودنجر، تجربة يونغ، الإنهيار الكمي.

القط : يا مشاغب كيف أكون حيا وميتا في آن واحد رياضيا هذا مستحيل ؟

المشاغب : لو غيرك قالها يا متشغشبشرودنجري !!

فأخبرني هل يمكن لنقطة في منحنى دالة أن تكون ذروة ونقطة إنعطاف في آن واحد ؟

القط : هذا مستحيل فالذروة إما أن تتناقص ثم تتزايد الدالة محليا أو العكس، بعكس الإنعطاف فهو تزايد محلي أو تناقص مع تغير في إتجاه تقعر المنحنى.

المشاغب : لكنك تفكر في بعدين.

قد اعتدنا في الدوال الحقيقية من صنف C^2 أي الدوال القابلة للإشتقاق مرتين ومشتقتيها مستمرتين دراسة طبيعة القيم الحرجة بدراسة إشارة المشتقة ومشتقتها الثانية فإذا وجدنا أن المشتقة تنعدم وتغير الإشارة استنتجنا أن القيمة الحرجة ذروة.

أما إذا وجدناها لا تغير الإشارة لكن مشتقة المشتقة تغير الإشارة استنتجنا أنها نقطة إنعطاف.

في الحقيقة القيم الحرجة لدالة حقيقية وهي نقاط إنعدام المشتقة لا تخلوا أن تكون ذروات أو نقاط انعطاف.

لكن إذا مررنا إلى دوال متعددة المتغيرات في أبعاد أكبر فمفهوم إشارة المشتقة لم يبقى له معنى.

إذ المشتقة نفسها ليست وحيدة بل هي مشتقات جزئية ذلك أنه في أي إتجاه لكل متغير يمكننا إشتقاق الدالة فلم يعد هناك معنى للإشارة.

لكن يمكننا استنتاج بعض حالات النقاط الحرجة بدراسة قيمة المصفوفة الهايسية وهي مصفوفة تعوض المشتقة الثانية.

المشكل إذا تعدد المتغير أنه لم يعد هناك معنى للتزايد والتناقص المطلق بل هو تزايد أو تناقص في بعد أو إتجاه معين.

لذلك قد تكون النقاط ذروات وقد تكون ذات طبيعة متعددة ففي بعدين أو أكثر قد يمر بالنقطة أكثر من منحنى على سطح منحنى الدالة بحيث تكون النقطة ذروة لمنحنى ونقطة إنعطاف لآخر أو ذروة سفلى لمنحنى وعليا لأخر كما يحدث للحالة المسماة بسرج الحصان ومثال ذلك ما يعرف بـ :

(1)Paraboloïde hyperbolique

$$(x/a)^2 - (y/b)^2 = z$$

القط : إن فهمت جيدا فيجب أن أنظر لحالتي كمجموع حالات في أبعاد مختلفة.



المشاغب : نعم فحالتك مركبة من مجموع خطي لشعاعين شعاع في إتجاه الحياة وشعاع في إتجاه الموت مثل الحليب والقهوة فلو أخذنا كأسا، فتصور كونها مملوءة بالحليب يناقض كونها مملوءة بقهوة تصور بدائي بل يمكن خلط الحليب بالقهوة وهذا تركيب خطي من كمية الحليب وكمية القهوة.

في فيزياء الكم الجزيء إذا أمكن له أخذ عدة حالات لخاصية معينة فيمكنه أخذ كل تركيب خطي من هذه الحالات فتصبح الحالات كأشعة من فضاء هلبرتي وحالة الجزيء هي مجموع خطي بينها.

فهذا ما تبينه معادلة شرودنجر يا متشغشبشرودنجري (2)

وفي فيزياء الكم يسمى بمبدأ تطابق الحالات الكمية أو التطابق الكمي. (3)

Principe de superposition quantique

فقول شرودنجر أنه عندما نفتح العلبة التي أنت بداخلها سنجدك حيا أو ميتا (بسبب قارورة الغاز المميت التي يتحكم فيها جزيء في حالة تطابق كمي) فنستنتج أنك كنت حيا أو ميتا، تجيب عليه فيزياء الكم بأنك لم تكن كذلك إنما كنت في حالة تطابق وضعيات كمية في فضاء شعاعي شعاعاه حي وميت لكن عندما فتحنا العلبة فقد تداخلت مادة المراقب مع مادتك فانتجت ما يسمى بالإنهيار الكمي (4) وهو تداخل الحالات لتختار حالة كمية واحدة وهي أنك حي او ميت.

شرودنجر قام فقط بتصور ما يحدث في العالم الميكروسكوبي للماكروسكوبي ليبين صعوبة تصديقه لأن الأصل، فيزياء الكم تتكلم عن جزيئات لا قطط أما القط فهو جمع هائل من الجزيئات تتداخل مع بعضها فتمنع وجود مثل هذه الحالة فالقط نفسه مراقب للتجربة وهذا ما يفسر عدم مشاهدتنا لهذه الحالات في حياتنا اليومية.

التطابق الكمي يشرح ما يحدث في تجربة يونغ (5) والتي تبين كيف يتصرف الضوء بطبيعة موجية فإذا حاولنا مراقبته تصرف كجسيم.

بل هو أصل كل التكنولوجيا الحديثة من القروص الصلبة و الترانزيستور ولولاه لما صنعت حواسيب ولما كنا اليوم في الفايسبوك.

القط : فهمت الآن، كل شيء مشرودنجر إلا أسماكي دائما تأخذ الحالة الصغيرة فهلا شرشرودنجرتموها فتأتي أحيانا كبيرة فإني كلما نظرت في صحن طعامي وجدتها صغيرة

(1)
https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Parabolo%C3%AFde

(2)
...https://fr.m.wikipedia.org/.../%C3%89quation_de_Schr%C3

(3)
...https://fr.m.wikipedia.org/.../Principe_de_superposition



(4)
...https://fr.m.wikipedia.org/.../D%C3%A9coh%C3%A9rence

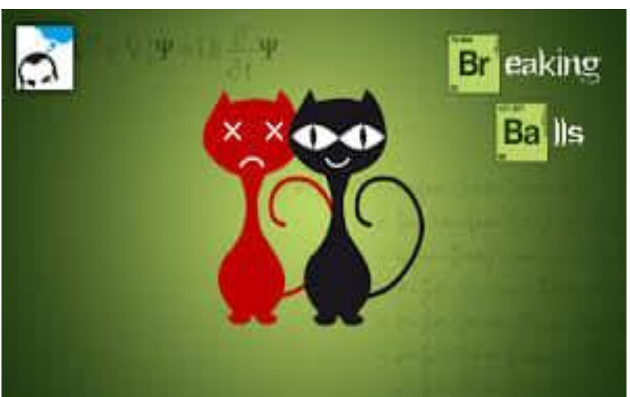
(5)
https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Fentes_de_Young

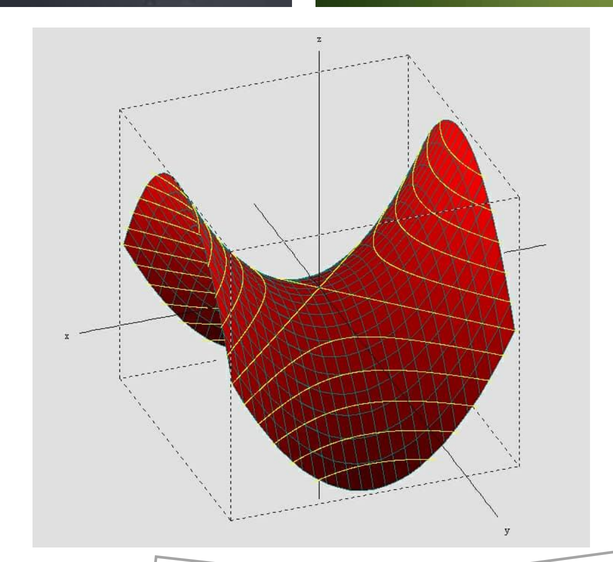
$$\frac{\hat{\vec{\mathbf{p}}}^2}{2m}|\Psi(t)\rangle + V\left(\hat{\vec{\mathbf{r}}}, t\right)|\Psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle$$











بين الحقيقة الرياضية والحقيقة البشرية : آلبرت أينشتاين ونيلس بور

ما هي الحقيقة ؟

إن الحقيقة الرياضية نسبية، فهي كل ما أمكن إطلاق لفظ الصحة عليه إنطلاقا من نظام مسلماتي مسبق أعطيناه صفة الصحة إصطلاحا لذلك كانت النتيجة الحتمية لهذا النظام عدم الإكتمال وهذا الذي برهنه غودل فكل نظام نسبي لا يمكنه تصحيح نفسه من الداخل بل يحتاج نظاما أكبر منه.

لكن السؤال الذي يطرح ما هي الحقيقة البشرية ؟

كان أينشتاين يذهب مذهب الفيزياء التحديدية أي حقيقتها رياضية فيمكننا وصف الواقع كما هو بغض النظر عن البشر ففي نظره يمكن محاكاة الواقع بالرياضيات فإذا عرفنا المسلمات الممثله له أمكن توقع أي نتيجة مسبقا.

لكن نظرة نيلس بور تختلف على ذلك إذ عنده لا معنى لحقيقة واقعية منفصلة عن التجربة إذ نحن في الحقيقة لا ننظر للواقع إلا من خلال حواسنا فالحقيقة البشرية هي مجرد تداخل حواسنا مع الواقع فالذي نصفه في فيزياء الكم هو ليس الواقع لكن تداخل التجربة مع الواقع وهذا ما يسمى بتفسير مدرسة كوبنهاغن لفيزياء الكم.

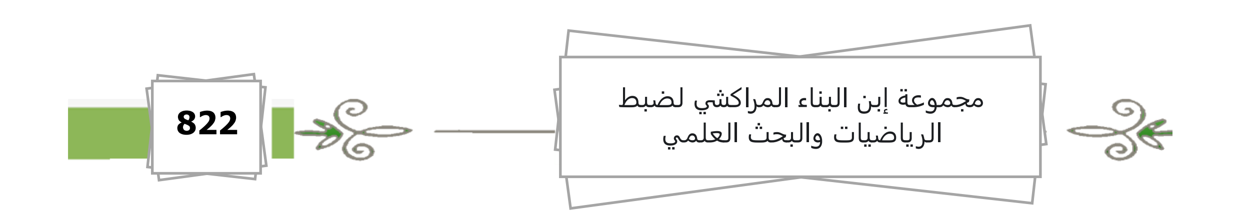
فالمفاهيم المألوفة كالمكان المحلي للأجسام وتحديد حدودها هي في الحقيقة مجرد أوهام إذ ما هي إلا نتيجة لتأثير التجربة في الواقع فلو أخذنا الإلكترون مثلا وغيره من الجسيمات فلا يمكننا إعطاؤه صفة التجسيم والمكان المحدد في الكون بل هي ليست جسيمية ولا موجية إنما شيء آخر لا يمكننا تصوره لأنه على خلاف ما ألفه البشر.

فعندما نظن أن الإلكترون موجود في مكان ما ففي الحقيقة هو ليس كذلك لكن محاولتنا لمراقبته هي من جعلته يتواجد في مكان ما فالمكان ما هو إلا نتيجة لمراقبتنا للواقع وقس على ذلك غيره من المفاهيم الفيزيائية.

قد يبدو الأمر غير قابل للتصديق وهذا ما دفع شرودنغر إلى اختراع تجربته الفكرية المشهورة بقط شرودنغر فإذا كان الفيزيائيون قادرين على قبول كون الجسيمات ليست في مكان محدد وفي حالات متعددة في آن واحد فالعقل البشري لا يقبل ذلك على الصعيد الماكروسكوبي، فقط شرودينغر حي وميت في آن واحد.

وهذا ما دفع كذلك أينشتاين ومساعديه إلى ابتكار تجربة EPR

والتي تنطلق من تداخل جسيمين في الماضي ثم محاولة قياس حالة أحديهما لكن المشكل ان تحديد حالة احدهما يعطي حالة الآخر وهذا مستحيل في تصور اينشتاين إذ في تصوره لا يمكن ان تنتقل معلومة من الجسيم الأول بسرعة أكبر من سرعة الضوء لإخبار الثاني بحالة الأول حتى يحدد حالته بدوره حسب ما تقتضيه فيزياء الكم.



في الحقيقة أينشتاين أخطا هنا عندما اعطى للجسيمات مفهوم المكان مما جعله يتصور انتقال معلومة من مكان لآخر لكن في الواقع لا يوجد مكان معين لجسيم كالإلكترون أو الفوتون فإذا تداخل جسيمان في الماضي أصبحا نظاما واحدا وإن كنا نظن أن كل منهما منفصل عن الآخر إذ مفهوم الانفصال مفهوم بشري فنحن من نظن أن المادة لها وجود محلي وعلى هذا بنينا الرياضيات فليس مستغربا أن يبدأ الفضاء الاقليدي بالنقطة إذ لا يمكننا تصور الأجسام من غير حدود وفي غير أمكنة.

مفهوم الحقيقة سواء الرياضي أو الفيزيائي هو مفهوم نسبي ويخضع لما جعلناه مقياسا للحقيقة سواء المسلمات في الرياضيات أو حواسنا في الواقع.

النظريات الفيزيائية بين الواقع وما نعتقد أنه الواقع

النظريات الفيزيائية تنطلق من مسلمات أثبتتها التجربة.

لكن المشكل في التجربة:

أنها معرضة للخطأ بسبب التقريب فهي لا تعطي حالة دقيقة إنما تقريبية

أنها لا تصف الواقع إنما رؤيتنا للواقع

أننا ننتمي إلى التجربة فلا يمكن عزل المراقب عنها

أنها محلية إذ لا تغطي جميع الحالات

بسبب هذه المسائل النظرية الفيزيائية المبنية على ما فهمناه من التجارب قد تكون خاطئة لخطأ التجربة أو فهمنا لها

وقد تكون قاصرة لأن التجربة لا تغطي جميع الحالات.

ولذلك كل نظرية فيزيائية تخضع للتكذيب بتجربة ما تتنبأ به لتأكيد موافقتها للواقع من عدمه فمتى لم توافق الواقع تعدل مسلماتها لبناء نظرية جديدة توافق اكتشافاتنا.

وهذا الذي حصل مع نظرية نيوتن إذ هي تتعارض مع سقف سرعة الضوء وتحويلات ماكسويل مما أدى إلى ظهور النسبية الخاصة لتفسير كل ذلك.

وهي لا تفسر حركة عطارد بسبب وجوده قرب الشمس مما أدى إلى ظهور النسبية العامة.

وكذلك ميكانيك الكم فهي نتيجة عدم تفسيرنا لطبيعة الضوء الجسمية والموجية وبسب تجربة نافدة يونغ وعدم تفسير سقوط الاكترون على النواة في هيكل الذرة التقليدي.

كل هذا أدى العلماء إلى اختراع ميكانيك الكم.

النسبية العامة تهتم بالكتل الكبيرة أما ميكانيك الكم فالجسيمات الصغيرة وأكبر اختلاف بينهما موجود في:

الزمن فالزمن محلي متغير حسب المراقب في النسبية لكنه ثابت عام في ميكانيك الكم فميكانيك الكم يستعمل الزمن بمفهوم نيوتن.

والخلاف الثاني في طبيعة الأجسام فالنسبية نظرية حقلية أي التأثير موجود في كل نقطة اما ميكانيك الكم فنظرية كمية فالتأثير متقطع.

النظرية النسبية تعطي تفسيرا للجاذبية بتشوه الفضاء الزمكاني محليا بسبب الكتلة فسقوط الجسم ما هو إلا اتباع مسار مستقيم مشوه بسبب وجود الكتلة في الفضاء الزمكاني.

النظرية الكمية تفسر القوة الكهرومغناطيسية والنووية القوية والنووية الضعيفة وتعطي تفسيرا احتماليا للجسيمات.

تلتقي النظرية النسبية وميكانيك الكم في الجسيمات الصغيرة ذات الكتل الكبيرة مثل الثقوب السوداء وهنا نتائجهما تتعارض مما دفع العلماء إلى محاولة إختراع نظريات جديدة منها نظرية الحبال وهي تنطلق من



ميكانيك الكم لايجاد تفسير للجاذبية كميا ومنها نظريات الجاذبية الكمية والتي تنطلق من النسبية لجعل الجاذبية كمية.

ما الفرق بين البرهان الرياضي والبرهان الفيزيائي ؟

اول شيء البرهان الرياضي ينطلق من مسلمات اما الفيزيائي فمن نتائج من الواقع سواء تجربة او الملاحظ.

ثانيا : طريق البرهنة متشابهة إلا ان في الرياضيات نبحث عن النتيجة الصحيحة اما في الفيزياء فنبحث عن تقريب للواقع.

ثالثا : النتيجة المتحصل عليها رياضيا نصفها بالصحة انطلاقا من المسلمات اما في الفيزياء فنخضعها للتجربة فإن وافقتها اطلقنا عليها لفظ الصحة في حدود التجربة وإلا اعتبرناها خاطئة.

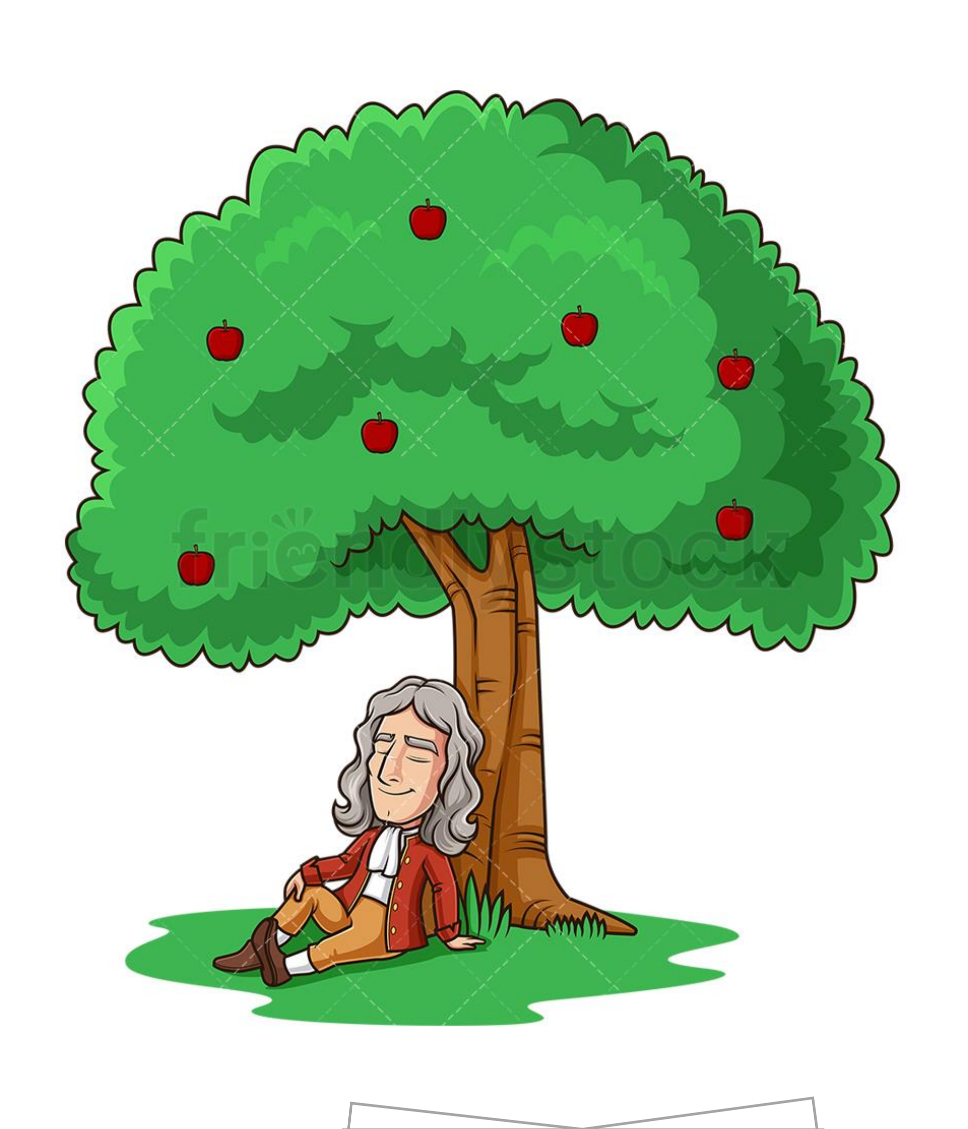
في الرياضيات هناك امكانية لتجربة النتيجة باستعمال حالات خاصة لكن هذه التجربة لا تعطي للمبرهنة مصداقية.

اذن هناك ثلاث اختلافات جوهرية:

الانطلاق : الرياضيات من مسلمات اما الفيزياء فمن النتائج

البرهنة المنطقية : الرياضيات تطلب الدقة اما الفيزياء فالتقريب

اخضاع النتيجة للتكذيب او التصديق : الرياضيات لا تطلب ذلك اما الفيزياء فتبحث عنه.



بين المبرهنات الرياضية والنظريات الفيزيائية

نظرية المجموعات ، نظرية القياس، ...

في الرياضيات : **النظرية** هي مجموعة من المسلمات والإصطلاحات و المبرهنات الأساسية التي يقوم عليها فرع من فروع الرياضيات والتي تستعمل لبنائه وحل مسائله.

أما **المبرهنة** فهي قضية قائمة على فرضيات برهنت بعمليات منطقية إنطلاقا من الفرضيات.

أما في الفيزياء **فالنظرية** مجموعة من الفرضيات التي تنطلق من التجربة تبنى عليها تكهنات قابلة للتكذيب كالنظرية النسبية ونظرية ميكانيك الكم.

نظرية الحبال وإن كانت تسمى نظرية فهي لا ترقى لمستوى النظرية الفيزيائية لأنها غير قابلة للتكذيب بل لا تصف الواقع.

النتائج الرياضية المطبقة على الواقع قائمة على فرضيات استنتجناها من مراقبة الواقع.

فإذا خالفت النتائج الواقع فهو أحد أمرين:

إما أننا اخطانا في مراقبة النتائج في الواقع كالخطأ في الحساب أو لم اهملنا ما لا يمكن إهماله وهذا ما وقع مع نبتون قبل إكتشافه فبما أن الفلكيين لاحظوا أن مسار أورانوس لا يتوافق مع النتائج الرياضية استنتجوا أنهم اهملوا أشياء من الواقع فحسبوا نوقع نبتون إنطاقا من ذلك ثم راقبوا الموقع فوجدوه.

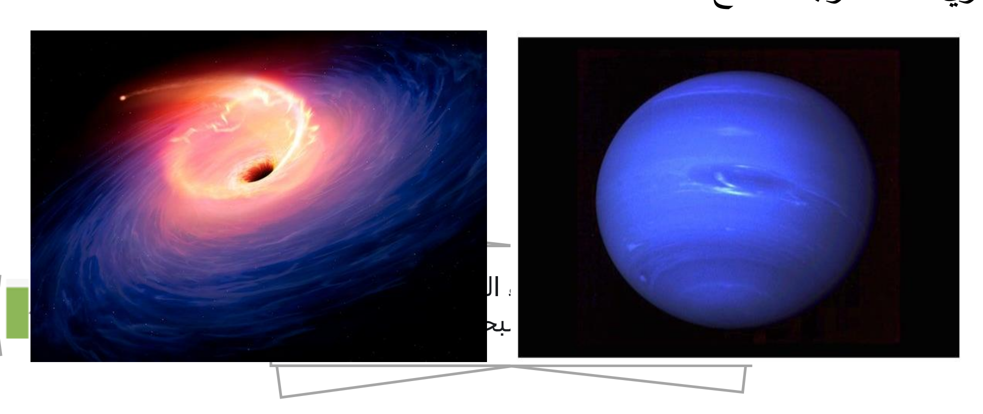
أو الأمر الثاني أن النظرية الفيزيائية المطبقة لا توافق الواقع أي تنطلق من خطأ في الفرضيات أي فرضيات لا توافق الواقع وهذا ما حدث مع عطارد فمساره دورانه حفل نفسه مختلف قليلا عن نتائج ميكانيك نيوتن تبين خطأ ميكانيك نيوتن وجاءت النسبية فصححت ذلك.

المبرهنات الرياضية لا تخطئ لكن الخطأ من مراقبة البشر للواقع فالنظريات الفيزيائية مجرد تقريب للواقع لذلك تسمى نظريات لا مبرهنات.

فإذا تبين خطأ نظرية بحثنا عن ما يصححها لذلك بعد ميكانيك نيوتن جاءت النسبية وميكانيك الكم ثم لما لم تقدر هاتين على تفسير ما يحصل داخل الثقوب السوداء وما قبل زمن بلانك قام العلماء بالبحث عن نظرية أعم تفسر الواقع كنظرية الحبال ونظرية الجاذبية الكمية.

الأكيد ان الفيزياء لا تبرهن الرياضيات فإذا جاءت الفيزياء بشيء يختلف عن المعتاد في الرياضيات فهذا يعني إما خطأ التجربة أو اننا نستعمل رياضيات غير مناسبة للواقع أي تنطلق من فرضيات لا توافق الواقع وهذا كذاك خطأ مراقبة في تجربة الإنطلاق.

فالخطأ بشري لأننا نقرب النتائج.

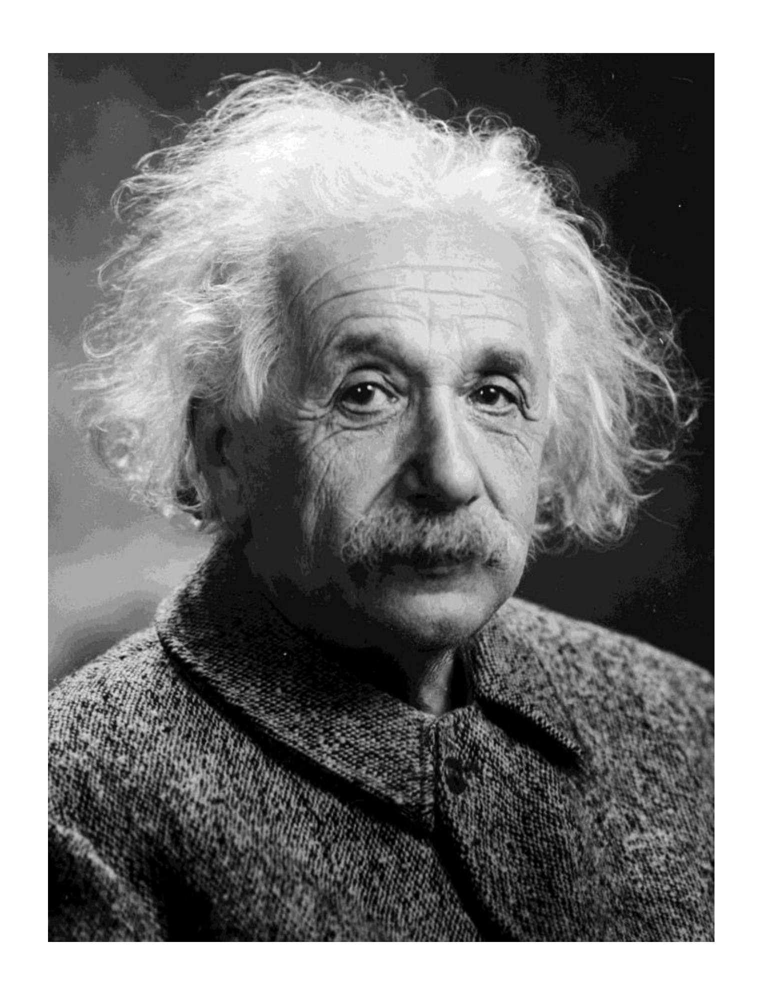


النقاط المتشابهة بنائيا بين النظرية النسبية الخاصة و نظرية القياس و المكاملة

ما النقاط المتشابهة بنائيا بين النظرية النسبية الخاصة (1905) و نظرية القياس و المكاملة للوبيغ (1904 - 1902) علما أن كلاهما صنع في بداية القرن العشرين؟

وجه الشبه بينهما أن كلاهما بنى نظريته على نظام مسلماتي، و هذا نتيجة مباشرة لأزمة الأساسيات في آخر القرن التاسع عشر و بداية القرن العشرين أين حاول العلماء ضبط الرياضيات على أسس متينة انطلاقا من أعمال كنتور إلى أعمال هلبرت و أعمال لوبيغ.

أينشتان سلك نفس المسلك و هو فكر انتشر في بداية القرن العشرين.





ماذا تخبرنا الطبولوجيا ؟

الإنسان ينظر للواقع من حيث قياساته له : ما أختلف فيه ألبرت أينشتاين ونيلس بور وحسمته تجربة آسبي.

من المشهور أن دالة الجزء الصحيح غير مستمرة على R المزودة بطبولوجيتها الاعتيادية عند كل عدد صحيح $f(x) = [x]$ ذلك أن النهاية عن اليسار لا تساوي قيمة الدالة.

لكن ماذا لو غيرنا الطبولوجيا ؟

لنزود R بالطبولوجيا المكونة من جميع المجموعات الجزئية التي متممتها قابلة للعد ونضيف إليها المجموعة الخالية.

فهذه تشكل طبولوجيا.

من مفتوحاتها المجموعة R المنزوعة منها نقطة $R^* , R\setminus\{1\}$ و كذلك R المنزوع منها عناصر متتالية $R \setminus \{ U_n, n \in N\}$ و لو أخذنا نقطتين مختلفتين a و b فلدينا

$a \notin V(b) = R \setminus\{a\}$ وهي مفتوح

$b \notin V(a) = R \setminus\{b\}$ وهي مفتوح حسب التعريف

فيمكن عزل بجوار كل نقطة عن غيرها.

لكن هذا الفضاء ليس منفصل أو ما يسمى بفضاء هوسدورف، لأنه مهما كان المفتوحان فلابد أن يتقاطعا فلا يمكن فصل كل نقطتين بجوار لكل منهما.

لننظر في نهايات المتتاليات فتكون المتتالية (U_n) متقاربة نحو L في هذه الطبولوجيا إذا كان مهما اخترنا جوارا ل L فإن جميع حدود المتتالية بداخله ابتداء من رتبة أي:

$$\forall\ V(L) ,\ \exists\ m ,\ \forall n > m : U_n \in V(L)$$

لو افترضنا أن حدود المتتالية U_n تختلف عن L ابتداء من رتبة j فيمكننا أن نختار الجوار التالي $V(L) = R \setminus \{ U_n , n >= j\}$ أي ننزع من R كل عناصر U_n ابتداء من j .

فهذا مفتوح حسب الطبولوجيا المختارة لأن متممته قابلة للعد لكنه لا يشمل جميع عناصر U_n ابتداء من رتبة إذن U_n لا يمكنها أن تتقارب نحو L .

بعبارة أخرى المتتاليات المتقاربة في هذه الطبولوجيا هي المتتاليات الثابتة ابتداء من رتبة وعليه كل الدوال مستمرة في هذه الطبولوجيا ذلك أنه إذا كانت U_n متقاربة نحو a فهي تساويه ابتداء من رتبة أي يمكننا أن نكتب $\lim f(U_n) = f(a)$ ومنه دالة الجزء الصحيح المذكورة فوق تصبح مستمرة.

لكن كيف نفسر ذلك ؟ كيف تغير الاستمرار بتغير الطبولوجيا ؟

تفسير ذلك يأتي من كيفية رؤيتنا لاقترابنا من a فنحن غيرناها من الجوارات المعتادة المولدة بـ

$]a - \xi , a + \xi [$

إلى جوارات مكونة من المجموعة R ماعدا عدد قابل للعد من القيم.



بتعبير آخر نظرتنا للمجموعة تُغَيِّرُ من طريقة رؤيتنا لدوالها.

لكن ما علاقة هذا بالواقع ؟

العلاقة وطيدة فعند ظهور ميكانيك الكم لم يتقبله جملة من الفيزيائيين منهم ألبرت أينشتاين ذلك أنه كان يرى أن الواقع شيء منفصل عن حواسنا وأن الفيزياء لابد أن تصاغ بشكل تَنَبُّئِي بعيدا عن تدخل البشر .

لذلك قال مقولته الشهيرة : أفضل أن أعتقد أن القمر كما هو وإن كنت لا أنظر إليه.

أينشتاين لم يكن يُكَذِّبُ بميكانيك الكم لكن كان يظن أنه ناقص ولو أكمل لأصبح تَنَبُّئِي ووصف الواقع كما هو.

لكن أصحاب ميكانيك الكم يرون أنه لا يمكن فصل المراقب عن التجربة وحسب تفسير مدرسة كوبنهاجن وعلى رأسها نيلس بور لا يوجد واقع بمعنى الكلمة إنما الواقع ما يراه المراقب فهو تداخل بين الكون والمراقب. بمعنى آخر يرى البشر الواقع بطريقتهم في قياسه.

https://fr.m.wikipedia.org/.../%C3%89cole_de_Copenhague...

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9bats_Bohr-Einstein

دامت هذه المناظرة إلى 1964 حيث قام الإيرلندي بال بتحويلها إلى علاقات حسابية أو ما يعرف بمتراجحة بال

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_EPR

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/In%C3%A9galit%C3%A9s_de_Bell

ثم قام الفرنسي ألان أسبي بتجربته الشهيرة سنة 1980 التي رجحت كفة ميكانيك الكم أي أنه لا ينقصه شيء محليا فنحن نرى الواقع بطريقتنا في رؤيته.

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Exp%C3%A9rience_d%27Aspect

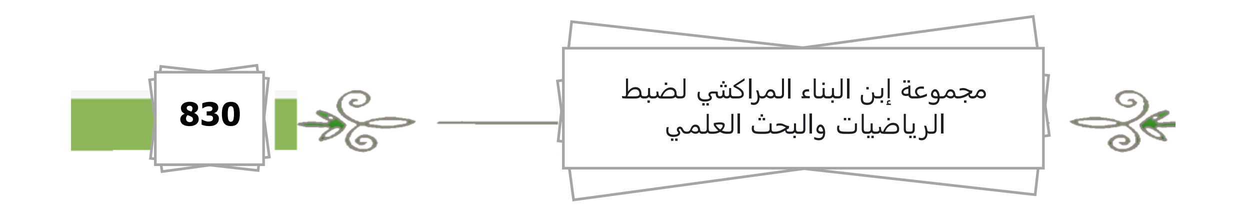
ليست المرأة الأولى التي تتوافق فيها النظرة التجريدية الرياضياتية للمجموعات بالنظرة البشرية للواقع بل هذا يؤكد على أن الرياضيات ليست مجرد عمليات تجريدية بل هي تعبر عن طريقتنا في فهم الواقع.

نظرية أينشتاين النسبية العامة من نفس القبيل إذ جعلت موقع الحوادث وهو الكون يتأثر بالحوادث الواقعة فيه فتنتج من ذاك الجاذبية ويتغير الزمن.

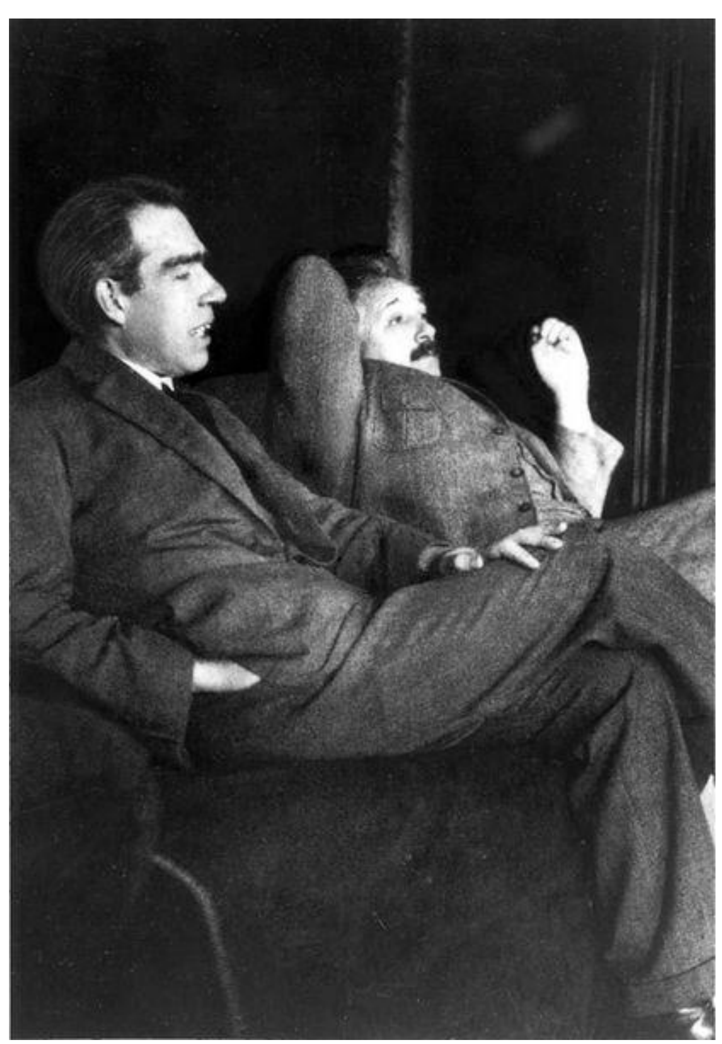
بل ذهبت النظريات الحديثة كالجاذبية الكمية بالحلقات إلى أبعد من هذا وهو أن الكون الزمكاني غير مترابط وأنه مكون من ذرات كون على غرار المادة.

https://fr.m.wikipedia.org/.../Gravitation_quantique_%C3...

إن أفكار الرياضيات الحديثة التي نضجت في مطلع القرن التاسع عشر لا تختلف كثيرا عن أفكار الفيزياء الحديثة فكلها تدور حول كيفية رؤيتنا لموطن الحوادث سواء المجموعة في الرياضيات أو الكون في الفيزياء.



لذلك من المهم أن يطلع الطلبة سواء في الرياضيات أو في الفيزياء على تطور هذه المفاهيم وكيف أنتجت آخر النظريات الحديثة فإنه لا يمكن فهم هذه العلوم إلا بفهم تاريخها والمسار التي سارت عليه لتصل لنضوجها.





النظريات الفيزيائية والحسابات الرياضية : عندما يكذب الواقع النظرية.

إن النظريات الفيزيائية أصبحت تميل اليوم بشكل كبير إلى البراهين الرياضية، فلا عجب أن الكثيرين يعتقدون اليوم أن مستقبل الفيزياء لم يعد مربوطا بالمخابر بل أصبح متعلقا بالدرجة الأولى بالمبرهنات الرياضية.

ولو تأملنا الثورات الفيزيائية الحديثة لوجدنا الكثير منها خرج من البراهين الرياضية قبل أن تصدقه التجربة كالنظرية النسبية والنظام الإعتيادي مع بوزون هيج وقسم كبير من ميكانيك الكم.

رغم كل هذا التقدم في ضبط الفيزياء فمازال يعتريها الخطأ من ثلاث نواحي:

فالفيزياء تبدأ بالقياسات والملاحظات فمتى أخطأنا فيها بنينا المبرهنات على أخطاء حسابية.

الفيزياء تبدأ كذلك بفرضيات فمتى أخطأنا فيها أخطأنا في النتائج.

الفيزياء بعد تجريد الواقع بالقياسات والملاحظات والمضي على فرضيات تقوم ببرهان رياضي إلا أنها عند التطبيق تقوم بتقريبات ومن هنا قد يحدث الخطأ الثالث.

عادة ما يكتشف الخطأ في الفيزياء عند مقارنة الحسابات النظرية بالمشاهدة والتجربة على الواقع.

فمتى كذبت المشاهدة الحسابات وتأكدنا من صحة العمليات الحسابة فلم يبقى غير احتمالين:

إما أن القياسات من الواقع خاطئة أو غير كاملة.

أو أن النظرية الفيزيائية المستعملة خاطئة.

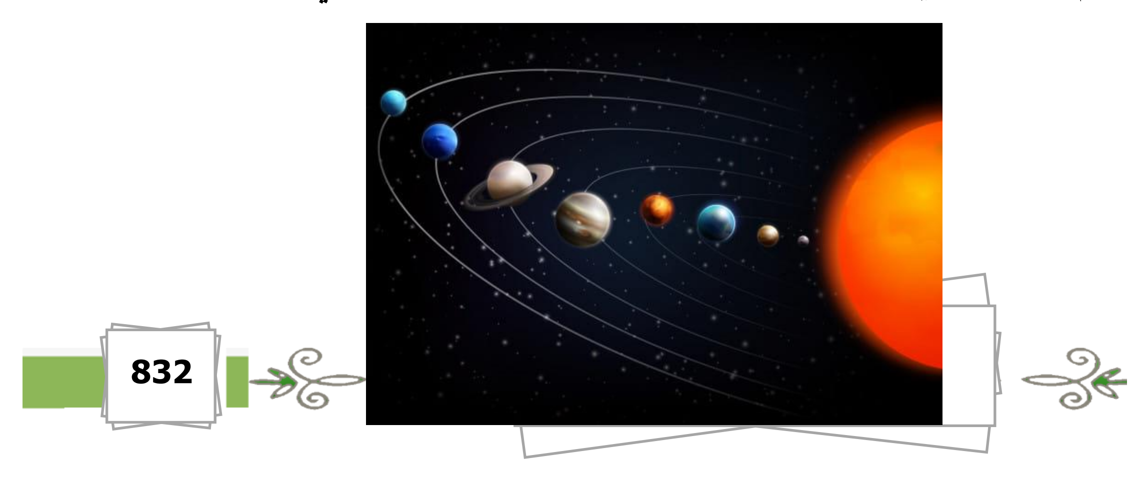
أما الحالة الأولى فمثال ذلك ما وقع مع كوكب نبتون فقد تم إكتشافه حسابيا ذلك أن الفرنسي Alexis Bouvard لاحظ تذبذبات في مسار كوكب أورانوس لا توافقها الحسابات النظرية عبر ميكانيك نيوتن فأفترض وجود كوكب بجواره يؤثر بجاذبيته عليه وقد كان ذلك.

أما الحالة الثانية فكانت مع كوكب عطارد أين لوحظ انحناء في محوره لا يتوافق مع حسابات ميكانيك نيوتن إلى أن جاءت النظرية النسبية العامة التي بينت خطأ ميكانيك نيوتن وفسرت الانحناء تحت ظل نظرية جديدة.

فالحالة الأولى خطأ قياسات أما الحالة الثانية فخطأ نظريات.

إن تكذيب الواقع للنظريات الفيزيائية يعتبر المحرك الأساسي للفيزياء إذ كيف يمكننا تحسين النظريات إن لم يعطنا الواقع معطيات جديدة ؟

أما الرياضيات فرغم قوتها النظرية فإن نتائجها لا يمكن أن تتجاوز الفرضيات التي بنيناها عليها.



بين التغير الزمني والتغير الرياضي.

مفهوم الزمن غير موجود في الرياضيات ذلك أن الكائنات الرياضية تنطلق من مجموعات والمجموعات لا تتغير.

لإدخال مفهوم التغير يقوم العقل البشري بتجريده ليعبر عنه بالترتيب فالتغير الزمني رياضيا ما هو إلا ترتيب كائنات كل كائن يعبر عن حالة معينة بواسطة إختيار في المجموعات.

فلو أخذنا مثلا مفهوم الإقتراب في النهايات فهو يعتمد على المقارنة في الطبولوجيا والتي تتم عن طريق المجموعات التي نسميها جوارات بالإحتواء أو ما يحل محلها كالمسافة.

فيؤول رياضيا تعني سلسلة إحتواء متجاورات، فإذا كان الفضاء منفصل تقاطع هذه السلسة يعطي النقطة.

فالعقل البشري هنا لا يعطى إتجاها لمفهوم يؤول كما هو موجود في الزمن لكن يعبر عنه بمقارنة مجموعات بمجموعات والعنصر الأهم فيها هو توزيع النقاط حول نقطة معينة.

في الواقع مفهوم الإتجاه هو مفهوم مرتبط بالفضاءات النظيمية فإذا نزعنا مفهوم الأشعة لم يبقى له معنى.

من الناحية الفيزيائية هناك محاولات لصناعة نظريات تتخلص من الزمن للتعبير عن مفهوم التغير وذلك بإدخال مفاهيم أخرى كمفهوم الأنتروبولوجيا الحرارية.



النسبية : عندما أصبح الزمن بعدا رابعا .... ثم قامت الحرب العالمية الأولى ؟

لعل الكثير لا يعلم أن النظرية النسبية الخاصة نتيجة لسباق التسلح والصراعات الأوروبية في نهاية القرن التاسع عشر وبداية القرن العشرين و الذي قاد العالم إلى الحرب العالمية الأولى.

شهد القرن التاسع عشر ثورة في مجال النقل عبر السكك الحديدية، فكان من نتائج ذلك ظهور مشكلة التوقيت إذ كل مدينة كان لها توقيتها وكان من الصعب ضبط جميع المدن في توقيت واحد فساعات الناس لم تكن متزامنة.

كان من المعتاد أن تصل إلى مدينة فتلاحظ فروقا واضحة في توقيت الوصول قد تصل إلى ربع ساعة بسبب عدم ضبط الساعات بين المدن على توقيت واحد.

كانت القطارات تعمل بنظام كل قطار توقيته هو توقيت مدينة إنطلاقه.

بجانب مشكل التوقيت ظهرت نهضة في المجال الكهرباء أنتجت ما يعرف بقوانين ماكسويل الكهرومغناطيسية.

هذه القوانين تخالف قوانين نيوتن في الميكانيك فهي تؤدي إلى حتمية تأثير الزمن في الأبعاد الثلاثة، هذا ظاهر في تحويلات لورنز والتي تعرف اليوم بنتائج النظرية النسبية الخاصة في تمدد الزمن وتقلص الطول.

تحويلات لورنز أستنتجت حسابيا من قوانين ماكسويل قبل ظهور النسبية بثلاثة عشر سنة.

كما لا ننسى مشكلة سرعة الضوء التي حاول العلماء قياسها في نهاية القرن التاسع عشر فإذا هي ثابتة لا تتأثر بالتحويلات الخطية المعروفة في نظرية نيوتن.

لكن القرن التاسع عشر لم يشهد هذه التطورات العلمية فقط بل كان قرن صراع قوى دولية وحروب أشهرها الحرب الفرنسية الألمانية سنة 1870 والتي هي ذاتها نتيجة لحرب 1806 بين فرنسا بقيادة نابليون وألمانيا.

لكن ما علاقة القطارات والسكك الحديدية بكل هذا ؟

كان من نتائج هذه الحروب سباق نحو التسلح وكانت السكك الحديدة في صلبه إذ هي وسيلة نقل متطورة أنذاك.

كما أدى ظهور الساعات الخاصة والتوقيت إلى ظهور مشكلة ضبط التواقيت، فالجيش الذي يستطيع ضبط توقيته يسحق عدوه إذ عمود الخطط الحربية التنظيم ولا يوجد تنظيم بلا تزامن.

فتهاطلت أبحاث المتنافسين لصناعة أجهزة وطرق ضبط التواقيت بين المدن لكن بين كل هؤلاء البحوث، كان هناك شاب يعمل في مصلحة توثيق الإختراعات إسمه أينشتاين.

كان أينشتاين يطلع على كل هذه الإختراعات حتى أصبحت مسألة ضبط الزمن تشغل باله ويناقشها دوريا مع زملائه ... إلى أن أجاب على هذه المسألة بالنظرية النسبية سنة 1905.

نعم النسبية ما هي إلا جواب على مسألة ضبط الزمن فكيف يمكن لشخصين ضبط ساعتيهما ؟

الطريقة الوحيدة هي تبادل المعلومات لكن المعلومة لا يمكنها أن تسير بسرعة تفوق سرعة الضوء،



النتيجة الحتمية إستحالة وجود زمن مطلق إنما هو نسبي تحكمه سرعة الضوء فالحوادث التي تبدوا لنا في الوقت الحاضر هي في الحقيقة وقعت في الماضي إذ بين وقوعها وعلمنا بها إنتقال المعلومة إلينا حتى نشاهدها بسرعة لا تتجاوز سرعة الضوء.

فالنجوم التي نراها في السماء هي في الحقيقة صورة في الماضي فالضوء الذي يصلنا منها إنطلق في الماضي من ملايين بل ملايير السنين فقطع عبر الفضاء ملايين السنوات الضوئية حتى يصلنا.

النسبية أجابت على كل هذه التساؤلات التي ظهرت في القرن التاسع عشر، فسرعة الضوء ثابت كوني لا يمكن تجاوزه.

أما تحويلات لورانز فهي صحيحة إنما الخطأ في نظرية نيوتن.

أما الزمن المطلق فغير موجود ولا يمكننا ضبط الساعات لتتزامن مع بعض إلا في حدود سرعة الضوء.

مشكلة توقيت القطارات إختفت بظهور التلغراف فسرع التواصل في حدود سرعة الضوء مما ساهم في ضبط التواقيت.

أما النظرية النسبية فلم تمنع قيام الحرب العالمية الأولى لكنها في قلب التطور المعاصر الذي نشهده اليوم، فلا يمكن لنظام جي بي آس أن يكون لولا النظرية النسبية .

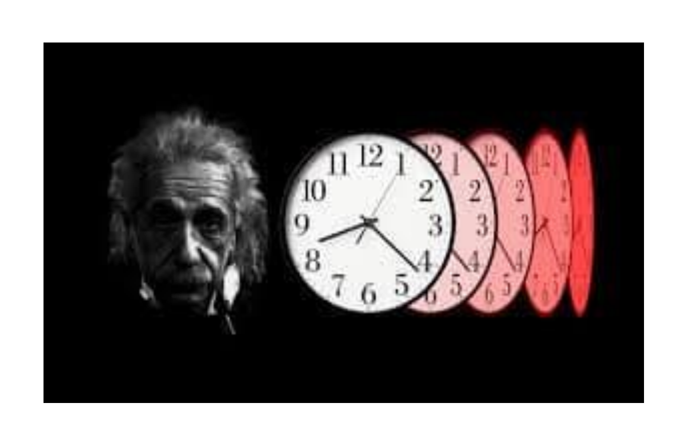
الكثير من المخترعات التي نراها اليوم هي نتيجة لسباق نحو التسلح فالصعود للفضاء لم يكن ممكننا بدون الصواريخ التي طورتها ألمانيا في الحرب العالمية الثانية لضرب أنجلترا.

وكذلك الطائرات النفاثة هي من نتائج الحرب العالمية الثانية.

وكذلك المفاعلات النووية هي نتيجة للقنبلة النووية التي ضربت بها أمريكا اليابان.

والقائمة طويلة...

تاريخ البشرية معقد جدا فكل إكتشاف من إكتشافاتها هو سلسلة حوادث لا يمكن حصرها في يوم معين و إنسان معين.







نظرات في إختلاف مفهوم الزمن بين النظريات الفيزيائية الحديثة

منذ أن نشر الفيزيائي أينشتاين النظرية النسبية الخاصة سنة 1905 وبعدها بسنوات النسبية العامة تغيرت نظرة العلماء للزمن.

الزمن المستعمل قبل ذلك هو الزمن المطلق الذي أدخله نيوتن في بناء قوانين الميكانيك العامة وإن كان مفهومه يعود إلى غاليليه.

هذا الزمن ينظر له كمعلم حقيقي مستمر يسير في اتجاه واحد حيث تشترك كل الحوادث في نفس مقياس الزمن فقيمة الزمن كونية لا تتعلق بالحوادث.

لكن منذ ظهور النسبية الخاصة تغير مفهوم الزمن بل لم يعد لمفهوم الزمن المطلق وجود إذ مقارنة حادثتين تحتاج لمراقب والمراقب ليراقب لابد له من مراقبة الضوء الصادر عن الحادثتين والذي سرعته ثابتة لا تتغير. فمفهوم المقارنة اللحظة لم يبقى له معنى هنا إذ لابد من زمن للضوء للوصول للمراقب ، زمن تتغير قيمته من مراقب لآخر لإختلاف المسافات مما يجعل ذلك مفهوم المقارنة بين الحوادث نسبي بل يصبح مفهوم تزامن الحوادث لا معنى له، إذن أصبح الزمن محلي لذلك تتغير قيمته من مراقب لآخر فيتمدد بالسرعة.

النظرية النسبية الخاصة تضمن فقط السببية أي أنه إذا كانت حادثة نتيجة لأخرى فلا يمكن لأي مراقب أن يرى الحادثة الثانية قبل الأولي.

أما النظرية النسبية العامة فذهبت لأبعد من ذلك فجعلت للزمن وجودا فعليا لكن كبعد لا ينفصل عن الطول والعرض والعمق فكما لا يمكنك فصل الطول عن العرض فلا يمكنك فصل الزمان.

ولذلك تساءل أينشتان عن المعنى الفعلي للفضاء الزمكاني في النسبية العامة هل هو مجرد اطار رياضي لتسهيل الحسابات أو كائن فيزيائي.

فقارنه بالحقل الكهرومغناطيسي إذ انه متى تحرك الإكترون في المجال الكهرومغناطيسي فهو يحدث موجات، فاستخلص إلى أن قوانين النسبية العامة تعطي نتيجة مشابهة، فالكتل الكبيرة متى تحركت في الفضاء الزمكاني هزته فأحدثت موجات جاذبية.

وهذا ما راقبته الأجهزة سنة 2015 عندما راقبت اصطدام ثقبين أسودين من 13 مليار سنة فتوافق القياسات المسجلة مع الحسابات النظرية مما أثبت الوجود الفعلي للفضاء الزمكاني ككائن كوني.

لكن مازلنا نجهل طبيعة الزمن با هناك نظريات حديثة كالجاذبية الكمية بالحلقات تقول أن لا وجود له إنما كل الحوادث موجودة في آن واحد في الفضاء الزمكاني لكن عدم إمكانية البشر على ادراك ابعاده تجعله يعيش الأحداث في الزمن فالزمن هنا طبيعة بشرية لا فيزيائية.

أما ميكانيك الكم فما زالت تعلم بمفهوم الزمن النيوتني لذلك لم تتوافق مع النسبية.

بل حتى الزمن في نظرية الحبال أو الاوتار والتي تريد الجمع بين النسبية وميكانيك الكم بفي نيوتني فهي لك تأخذ بعين الاعتبار مفهوم الزمن في النسبية وهذا مما تنتقد به .فما هو الزمن ؟ لا أحد يدري.




مراجع:

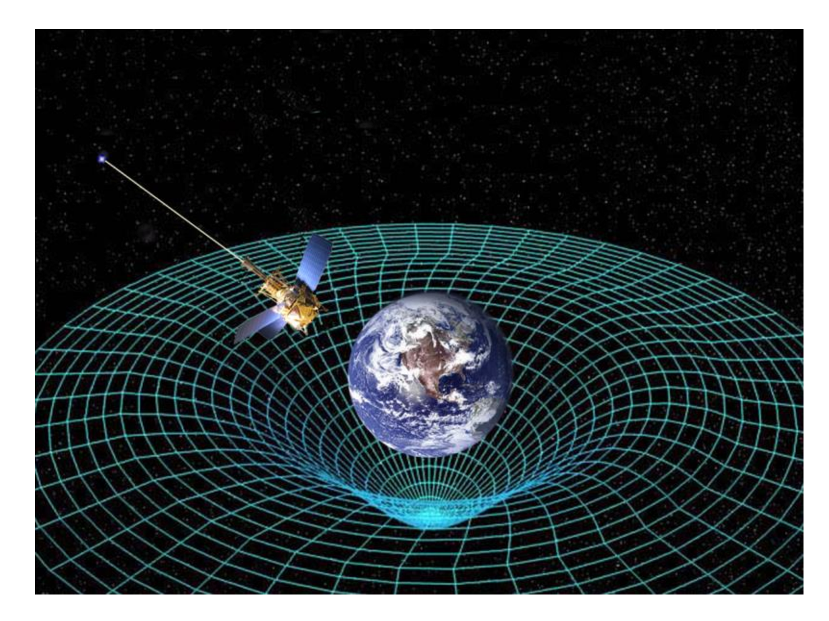
https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Onde_gravitationnelle

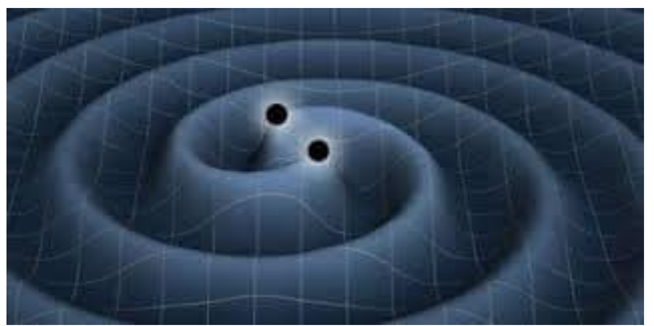
لا وجود للزمن

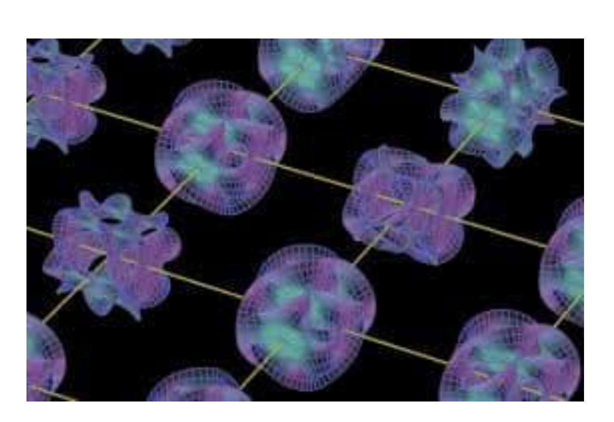
https://www.parismatch.com/.../Carlo-Rovelli-Il-y-a-un...

في نقد نظرية الحبال

https://www.babelio.com/.../Smolin-Rien-ne-va-plus.../39487







المشاغب و القط المتشغشبرودنجر : ما لا تعرفه عن الإبسيلون، الحتمية، الزمن ومشكلة اختفاء المعلومة.

الثقب الأسود حير الفيزيائيين إذ أنه حتى الأشعة الضوئية لا تنجو من جاذبيته.

قد تقولون ما علاقة هذا بالإبسيلون ؟ قد تتعجبون لكن المفاهيم البشرية كلها متعلقة ببعضها وفي هذا المقال سنستعرضها ونربط بينها عبر شرح مطول.

إمتصاص الثقب الأسود للضوء يهدم أحد أساسيات العقل البشري وهي أن المعلومات لا تختفي بتغير الزمن فمتى وجدت حالة وعلم كل حيثياتها فالعقل البشري يظن أنه يمكنه الرجوع نحو الخلف لشرح الحالة السابقة وعلى نفس الأساس يظن أنه يمكنه التنبؤ بالحالة القادمة.

على الأقل هذا ما كان يظنه البشر قبل ظهور النسبية وفيزياء الكم.

أما النسبية فقد تنبأت بالثقوب السوداء ومشكلة الثقوب السوداء أنه متى دخل الضوء فيها فلا يخرج فكيف يمكن دراسة جسم لا يصدر أي معلومة إذ المعلومات تنتقل عبر الضوء فعلى هذا لا يمكننا الرجوع للوراء عبر الدراسة الفيزيائية لمعرفة حال الثقب الأسود.

وإن كان الفيزيائي ستيفن هوكين قد حل المشكلة جزئيا بتنبئه بإصدار الثقب الأسود لإشعاعات والتي تسمى بإسمه لكن مشكلة المعلومة في الثقب الأسود ما زالت قائمة.

أما فيزياء الكم فقد هدمت مبدأ التنبؤ الحتمي لتعوضه بمبدأ التنبؤ الإحتمالي عن طريق التطابق الكمي ومبدأ الشك لهايزمبرك.

أما النظريات الفيزيائية الحديثة فاتجهت نحو محاولة لحذف الزمن او التقليل منه في الدراسات الفيزيائية إذ المشكلة الأساسية هي أن العقل البشري يعيش المعلومة عبر الزمن فهو جزء منها لكن التجريد الرياضي المتمثل في المعادلات الرياضية تجعلها تسير في اتجاهين فمفهوم الزمن عند التجريد الرياضي يعطي محورا حقيقيا يسير في اتجاه زائد مالانهاية أو نحو ناقص مالانهاية لكن الواقع الإتجاه وحيد نحو زائد مالانهاية ولا يمكننا الرجوع إلى الوراء.

بل زادت النسبية الطين بلة بجعل الحركة تؤثر في الزمن والذي بنفسه نحاول إستعماله كمتغير لدراسة المعلومة !!!

ولو رجعنا لقرن إلى الوراء لوجدنا أنه في نفس حقبة ظهور النظريات الفيزيائية الجديدة ظهرت المفاهيم الرياضية الحديثة بزعامة هلبرت والتي تحاول بناء الرياضيات على أسس صحيحة لإعطاء نتائج حتمية إنطلاقا من المسلمات ومرورا بالعمليات المنطقية.

فقد كان هلبرت يهدف إلى بناء رياضيات مكتملة تجيب على أي قضية منطقية لكن أعمال غودل هدمت حلمه هذا فمبرهنة عدم الإكتمال لغودل بينت الوجود الدائم لقضايا غير قابلة للتقرير في أي منطق خوارزمي وعدم مقدرتها على الحكم على نفسها بالإكتمال إلا بإضافة مسلمات جديدة للحكم من الخارج.



فحتى الرياضيات المجردة غير قادرة على الحكم على نفسها بالإكتمال وكأن مسألة المراقب المؤثر في نتائج التجربة عند المراقبة كتجربة قط شرودنغر وعدم إمكانية عزله عنها هي نفسها مسألة عدم الإكتمال بعدم مقدرة الرياضيات على الحكم على نفسها من الداخل.

لو تتبعتم جيدا ما سبق فهمتم أن مشكلة العقل البشري هي تفكيره بالحتمية مع تشبته بالزمن فمن ناحية يعيش عبر الزمن لكنه في آن واحد يفكر بحتمية النتائج إذا انطلقت من المعطيات ومع جميع هذا ينظر للمسائل وكأنه خارج عنها لكن في الحقيقة هو جزء لا يتجزأ من التجربة.

فالعقل البشري تصور الرياضيات من مبدأ الحتمية أي إذا عرفت المعطيات فالنتيجة حتمية يمكن برهنتها والسير في الإتجاهين إذا استعمل التكافؤ ففي ظل الرياضيات لا يوجد معنى للزمن.

وينظر للخواص من الخارج فهو غير مؤثر فيها فالمعادلات الرياضية لا تتغير ببرهان مبرهنها من البشر.

إذا العقل البشري لا يتصور فقدان المعلومة فهو يستحضر ما مر عليه في الماضي ويراه في الحاضر ولا يتصور نفسه جزء من المعلومة فهو ينظر إليها من الخارج وكما قال أينشتاين انه يفضل تصور القمر ذاته وإن كان لا ينظر إليه.

الرياضيات لكونها تجريد العقل البشري للواقع تخلصت من مفهوم الزمن فكل الحوادث تترجم بعناصر من مجموعات فالمكان والزمان كلاهما مجرد عناصر من مجموعة أما الدوال فهي مجرد روابط بينها فهي مجموعة كذلك فالدالة الرياضية ثابتة لا تتغير في مجموع عناصرها ذلك أن المعلومات بمجملها لا تفقد وكأنه في الرياضيات الحاضر والماضي والمستقبل موجودون في آن واحد وهذا هو الصواب رياضيا.

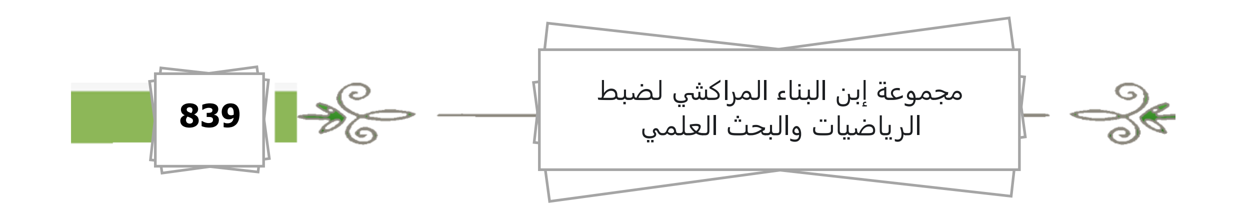
فعندما نرسم دالة فالمنحنى لا يتغير إنما الذي يتحرك هو رسمنا للمنحنى عبر الزمن ونظرتنا له بتحريك نقطة فوقه عبر الزمن.

فتصورنا لتغير الدوال عبر تغير المتغير بجعله يتحرك على محور إنما أصله تصور العقل البشر إذ العقل البشري لا يمكنه التفكير والإحاطة بجميع المعلومات في آن واحد ذلك أن التفكير البشري لا يمكنه التخلص من الزمن.

لذلك عند كتابة نهاية نستعمل إبسيلون موجب تماما كيفما كانت قيمته لكنه في الحقيقة لا يسير إنما الذي يتحرك هو تصورنا للنهاية ذلك أنه لا يمكننا التفكير في إبسيلون يأخذ جميع القيم الموجبة في آن واحد وأنى لنا إستحضار عناصر غير قابلة للعد في آن واحد!!!

فعند تصور الإبسيلون لابد أن نختار قيمة له في مكان معين.

هذا المشكل في التفكير البشري ليس متعلق فقط بالزمن بل هو حتى بالمكان فلا يمكننا تصور أشياء خارج المكان أو في أكثر من مكان ذلك أننا نعيش في المكان والزمان.



ورغم أن فيزياء الكم هدمت هذه البديهيات البشرية إلا أن العقل البشري لا يمكنه الخروج منها فطريقته الوحيدة للتعبير عن الظواهر الكونية هو المرور بالرياضيات التي تخلصت من الزمن منذ قرون عديدة خاصة مع ظهور نظرية المجموعات.

إن التخلص من الزمن عند التفكير بالرياضيات ليس بالأمر الهين إذ هو تعارض المنطق العقلي المنفصل عن الزمن مع الواقع المعاش المرتبط بالزمن لذلك يمر التلاميذ لبناء فكرهم الرياضي بعشرات من السنوات للإقتراب من التجريد وفصله عن الواقع وإلا كيف نفسر قبول التلاميذ لمجموعات غير قابلة للعد مع واقع منته العناصر ممكن العد .

عملية التجريد هذه ليست بالأمر السهل ولا ينجح فيها الكثير من التلاميذ لأنه حتى الاساتذة يفتقدونها إذ التفكير بالأسباب والحتمية مع تجريد الخصائص والنظر إليها نظر المراقب لا المتغير معها أمر يحتاج صفاء ذهن وتفريقا بين الأمور ووضع حدود مضبوطة لأنا العقلية والعمليات المنطقية.



قوانين الكون مبنية على التركيب والتكرار والتقطع.

لماذا تظهر دوال كالأسية واللوغارتمية والمثلثية في الظواهر الطبيعية ؟

المتأمل في الكون يجده مبنيي على التركيب والتكرار فالمادة مكونة من جزيئات والحركات تتكرر في الزمن.

بل الأعداد نفسها مجرد تكميم للتكرار والتركيب فالإثنين ما هو إلا تكرارين للواحد والثلاثة كذلك مجرد تكرار والنصف مجرد نظرة لجزء من جزئين يتركب بهما الواحد.

حتى لو تأملنا الأبعاد الثلاثة فبين بعدين نجد الدائرة كشكل مميز لهما فهي تعبر عن ظهور مبرهنة فيثاغورس في مستو إقليدي.

لكن لو تأملنا محيط الدائرة لوجدناه مجرد تكرار غير منته لقطع مستقيمة طولها يحسب بمبرهنة فيثاغورث.

هذا التركيب والتكرار نعبر عليه جبريا بالجمع والضرب والطرح والقسمة.

فالبشر عبر عن هذه الخواص الطبيعية بالبنى الجبرية.

لكن ماذا يحدث مع وجود تكرار كبير يمكن النظر إليه كتكرار غير منته ؟

ينتج عن مثل هذا عمليات جبرية غير منتهية تعطينا ما يسمى بالسلاسل العددية.

ولو تأملنا الدوال الأسية واللوغارتمية والجيبية وجدناها تعبر عن نهاية لسلاسل عددية بسيطة أو بالأحرى ما نسميه بنشر تايلور.

هذه الدوال لها خاصية تختلف عن غيرها فهي دوال تنتج ببساطة إنطلاقا من نهايات سلاسل عددية ومثل بساطة هذه العمليات الجبرية نجدها في الطبيعة بشكل تلقائي.

يمكننا القول أن الدوال الحقيقية التي تظهر في الطبيعة هي دوال ناتجة عن تركيب غير منته لعمليات جبرية.

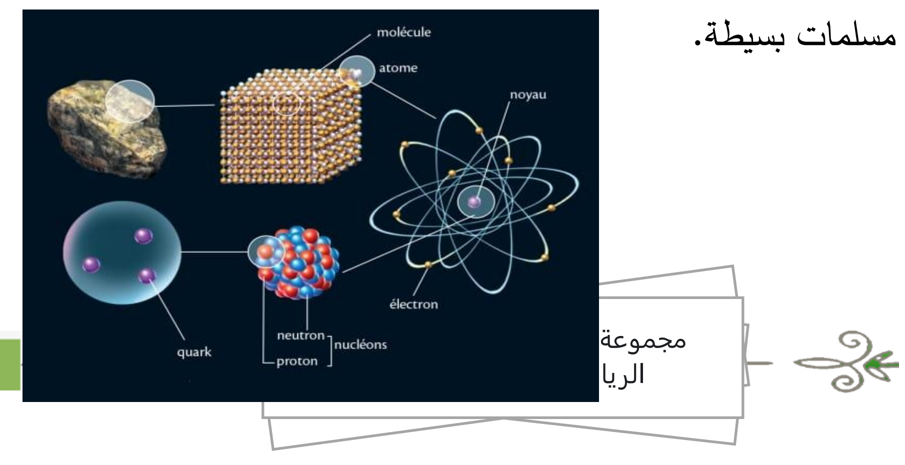
لكن قد يقول قائل في الطبيعة تظهر دوال معقدة لا تخضع لهذا القانون كالتوزيعات مثلا.

والجواب عن هذا أن الطبيعة تمتاز كذلك ببنية متقطعة فهذه البنية المتقطعة هي التي تؤثر على العمليات الجبرية لتنتج دوال ذات نقاط شاذة.

الطبيعة تتردد بين تركيبات غير منتهية لعمليات جبرية وبين بنى كمية متقطعة.

ولو نظرنا إلى النظريات الرياضية المطبقة في الكون لوجدناها مبنية على هذه المبادئ فالتكامل ما هو إلا تركيب غير منته لعمليات جبرية أما الإشتقاق فما هو إلا محاولة تجزئة بالطرح والقسمة.

عالمنا معقد في الظاهر لكنه مبني على قواعد بسيطة وعلى صورته صنعنا الرياضيات كعلم معقد النتائج لكنه مبني على مسلمات بسيطة.



لماذا تظهر المعادلات التفاضلية في الواقع ؟

نحن ننظر للظواهر في الواقع من حيث تغيرها فلا نستطيع تصورها إلا عبر الزمن.

وهذه تشكل مشكلة في العقل البشري إذ متى لم نستطع النظر للواقع إلا في زمن لزمن أن يكون الزمن مستمرا غير متقطع إذ لا نتصور الأشاء داخل هذا التقطع.

لكن مشكل آخر يعترض العقل البشري فمتى حاولنا النظر للزمن بكميات متناهية في الصغر لم نستطع الوقوف عند حد معين إذ لابد من وجود قيم أقل منه فعوضنا هذا النقص في التصور بمفهوم الإشتقاق عن طريق حساب النهاية.

المعادلات التفاضلية وليدة هذه العلاقة بين تكميمنا للظواهر ومحاولة النظر لتغيرها عبر الزمن.

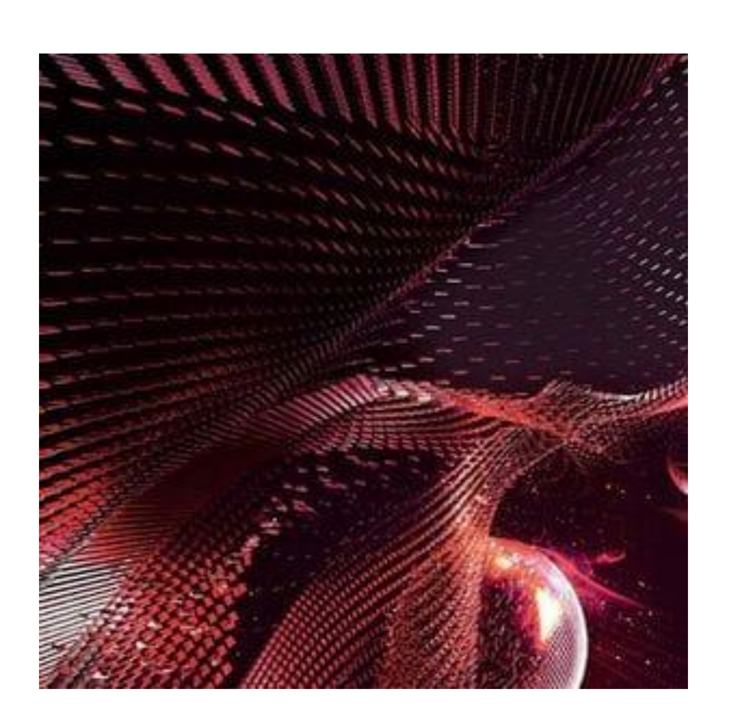
ربط هذه الطرق في النظر ببعضها يولد لنا المعادلات التفاضلية كالعلاقة بين القوة وكمية الحركة.

قد يسأل سائل ما فائدة دراسة مثل هذه الأمور ؟ والجواب على ذلك أن فهم طرق تصورنا للواقع تبين لنا الأخطاء الناتجة عنها وهذا ما حدث فعلا مع ميكانيك الكم فهناك ظواهر لا يمكننا النظر إليها بطريقة مستمرة بل يلزم تصورها متقطعة، مثال ذلك انتقال الطاقة وتغيير مسارات الإلكترون.

حاليا هناك نظريات فيزيائية تقوم بتصور الفضاء الزمكاني على شكل متقطع لكن متى قمنا بمثل هذا فسنفقد التفاضل بمفهومه الرياضي وهذه مشكلة أخرى لها طرق علاج عند الفيزيائيين بل منهم من يحاول التخلص من الزمن في المعادلات.

يبقى السؤال المطروح هل المعادلات التفاضلية هي نظرة بشرية مشوهة للواقع ؟

طرح السؤال نفسه يمثل تقدما في الفكر البشري إذ يفتح أفاقا لصناعة فروع رياضيات جديدة.



القط المتشغشبرودنجر : صديق فيغنر أو أكوان متعددة ؟

عندما إشتهرت التجربة الفكرية لقط شرودنجر والتي تصورها شرودنجر ليبن صعوبة تصديق ميكانيك الكم متى حولت مفاهيمه إلى واقعنا المعتاد ، قام فينغر سنة 1961 بتصور حالة أكثر منها غموضا.

فتجربة شرودنجر تقول أنه لو وضعنا قطا داخل علبة بها جهاز يصدر غازا ساما يتحكم فيه عبر نواة غير مستقرة، الإلكترون فيها في حالة تطابق كمي فيجعل النواة مستقرة وغير مستقرة في آن واحد.

فحسب ميكانيك الكم النواة موجودة في حالة استقرار وعدم استقرار في آن واحد إذن جهاز الغاز السام يطلق ولا يطلق غازه في آن واحد إذن القط حي وميت في آن واحد

حسب ميكانيك الكم متى فتح المراقب العلبة ليراقب القط فستنهار حالة التطابق الكمي لتجبر النظام على إختيار حالة واحدة إما قط حي أو قط ميت ؟

لكن إن وجدنا القط حيا أليس لأنه كان حيا قبل ذلك ؟

حسب شرودنجر ميكانيك الكم تقول لا إنما هي حالة تطابق كمي

فينغر تصور شيئا أكثر تعقيدا ، فماذا لو كان للمراقب صديق ينتظر نهاية التجربة ليتصل بالمراقب ليعرف هل القط حي أو ميت ؟

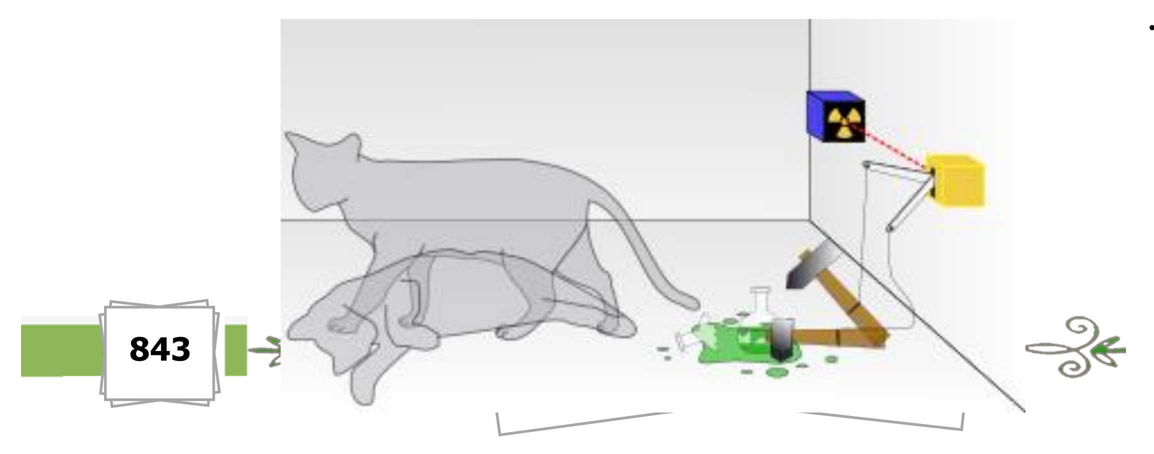
فالعقل يقول عندما يتصل الصديق بالمراقب سيكون المرافب قد عرف التتيجة بفتح العلبة.

لكن ماذا لو إعتبرنا الصديق مراقبا آخر للمراقب الأول فيصبح المراقب الأول جزء من التجربة إذن حسب ميكانيك الكم المراقب الأول فتح العلبة فوجد القط ميتا أو وجده حيا في آن واحد لأنه في حالة تطابق كمي.

لكن عندما يتصل به الصديق ينهار النظام الكمي فيجبره على إختيار حالة واحدة إما وجد القط ميتا أو وجده حيا.... لكن هذا يعني أن المراقب الأول ليس له دخل في التجربة إنما المراقب الثاني من أجبر النظام على إختيار حالة واحدة.... في الحقيقة هناك نظرية لهيج إيفريت تذهب لأبعد من هذا فتقول أن الكون كله يعتبر في حالة تطابق كمي وليس القط فقط فمتى فتحنا العلبة فهناك كونين ينشآن أحدهما فيه قط حي وآخر ميت فعلى هذا ما نراه هو مجرد اختيار أحد هذه الاكوان.

كل هذه تبقى نظريات لكن الذي أثبته التجربة أنه لا يمكن نقل حالة التطابق الكمي من عالم الجسيمات كالفوتونات والإلكترونات نحو عالم المادة المعقد فمتى خرجنا من العالم الميكروسكوبي إنهار التطابق الكمي.

فقط شرودنحر يمكن إعتباره نفسه كمراقب.... من ناحية التجربة لا يمكن وضع قط في حالة تطابق كمي لكن ذلك ممكن على مستوى الفوتونات مثلا وقد استطاع الفزيائيون فعل ذلك ونسمي مثل هذه الحالة حالة قط شرودنجر.



المشاغب والقط المتشغشبرودنجر

أينشتاين، بور، شرودنغى، هايزمبرغ... فيزيائيون بعقول رياضياتية

القط : حدثني عن هؤلاء لما يختصمون في جعلني حيا وميتا ؟

المشاغب : كلهم يدندنون على شيء واحد،

أما أينشتاين ففهم النسبية الخاصة بفهمه أننا لا نرى الأشياء إنما نرى آثارها ذلك أن بيننا وبين رؤيتها سرعة الضوء فمتى كان الأمر كذلك بنينا النسبية الخاصة.

أما النسبية العامة ففهم أننا لا نحس بثقلنا عند السقوط فمتى كان الأمر كذلك فلا فرق بين جسم يسقط وجسم يتسارع فكلاهما يسير في إتجاه فقط وعلى ذلك بنى النسبية العامة.

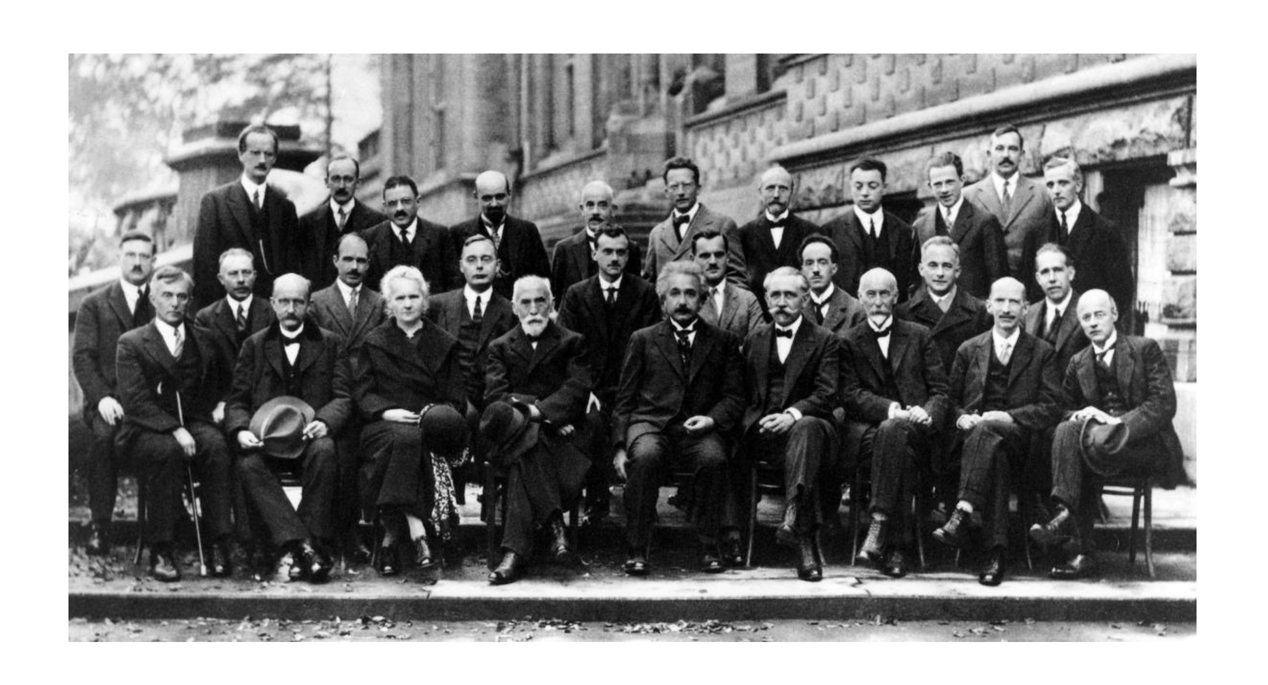
أما بور وأصحابه ففهموا أنا ليس فقط لا نرى الأشياء و نرى أثارها بل نحن نرى تداخل آثارنا بآثارها فمتى كان الأمر كذلك فلا معنى للواقع كواقع إنما نرى تداخلنا مع الواقع وعلى ذلك فسر نتائج فيزياء الكم.

أما أينشتاين وشرودنغر فيقولون إذا رأيناك حي يا قط فلأنك كنت حيا وإن رأيناك ميتا فلانك كنت ميتا.

أما بور فيقول : إذا رأيناك حيا فلأن رؤيتنا لك تداخلت معك فأنتجتا حياتك من موتك أما قبلها فانت حي وميت في آن واحد إلا أنه يقول فيزياء الكم في الجسيمات لا في القطط فكونك قط ممتلئ الجسيمات فجسيماتك تداخلت مع بعضها مما تنتج حالة واحدة موتك أو حياتك.

وكلهم يدندنون على رؤيتنا للواقع

القط : لا أدري من ضربني بعين فجعلني ميتا أو من ضرب رأسه بحائط فجعلني حيا وميتا لكن دعني مع أسماكي أعدها ولا اهتم بما سواها



المشاغب الحكيم والقط المتشغشبرودنجر: فرضية ريمان وميكانيك الكم

المشاغب الحكيم : يرى الإنسان المثالية في الدائرة إلا أن الكون يكذبه

القط : كيف ؟

المشاغب الحكيم : يا قط إن الإنسان أرادك حيا وأبى الكون إلا أن يريدك حيا وميتا وصدقته الرياضيات

القط : أين الرياضيات من كل هذا ؟

المشاغب الحكيم : ما نظرية التوزيعات إلا طريقة البشر في تحسس حضور العالم....

القط : كم هي معقدة رياضياتك، دعني مع سمكاتي أعدهم وآكلهم ولا أتساءل هل هناك غيرهم ...

المشاغب الحكيم : إن الناس يظنون أن الرياضيات ليست بسهلة لأنهم لا يدركون كم الحياة هي معقدة.

جون لويس فون نيومان

فرضية ريمان وميكانيك الكم

لاول وهلة يبدو توزيع الأعداد الأولية لا يخضع لقانون بسيط .

ومع ذلك ، فإن القيم التي تنعدم عندها الدلة زيتا يمكن أن توفر لنا معلومات حول هذا التوزيع .

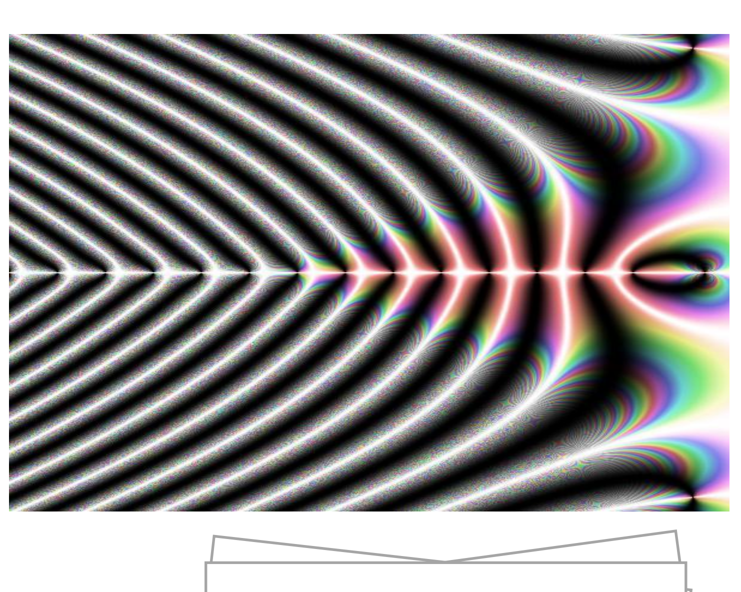
الغريب في الأمر أن هذه القيم تظهر أيضًا في الأنظمة الكمية المعقدة ، لكننا لا نعرف حتى عام 2012 سبب ارتباط هذه الأنظمة بالأرقام الأولية.

*تعود قصة هذه الملاحظة إلى عام 1972 عندما التقى فريمان دايسون (عالم فيزياء) وهيو مونتغمري (Theorist of Numbers)

فاكتشفوا تشابها واضحا بين:

*شريط من أصفار على المستقيم الشاذ لريمان ، و

*وقياسات مستويات الطاقة لنواة الذرات كبيرة ، (على سبيل المثال: الإربيوم رقم 68)



فضاءات لوبيغ L^p لماذا ؟ من ميكانيك نيوتن إلى ميكانيك الكم.

كانت أعمال نيوتن باكورة مزج التحليل بالجبر واستخدام الأشعة في القوى والسرعة.

ميكانيك نيوتن ينظر للكون نظر غاليلية أي أن الحوادث تحدث في نقطة من الكون يمكن تمثيل المقادير الفيزيائية المؤثرة فيها بأشعة في زمن خطي جامد منفصل عن الحوادث.

مزج نيوتن بين هندسة إقليدس ومفهوم الزمن كتيار حقيقي يسير بانتظام نحو وجهة واحدة فصنع قوانينه الأربعة المشهورة.

أظهرت أعمال نيوتن مفهوم النهاية والاشتقاق ثم تطورت إلى أن أصبحت المفاهيم التي نراها اليوم.

فزود الفضاء الشعاعي بنظيم تولد منها طبولوجيا فأمكن صياغة جميع القوانين النيوتونية فيها.

لكن يبدو أن مفهوم المقادير الكمية الموجهة الممثلة بالأشعة والمؤثرة في نقطة مفهوم بدائي فالكون أكثر تعقيدا من ذلك. فأظهرت النظرية النسبية أن المعلم الزمكاني الثابت الذي تصوره غاليلي والمنفصل عن الحوادث ليس بصحيح في الواقع بل الفضاء الزمكاني يتأثر بالحوادث فيه فيتمدد الزمان وتتقلص المسافة.

ثم مر ميكانيك الكم من هنا فبين أنه لا يمكن أن نعتبر الجسيمات مجرد نقاط تؤثر في بعضها بل هي نفسها لها طبيعة موجية تمثل بالدوال.

فكان لزاما هنا إيجاد إطار رياضي لدراسة الفيزياء فما كان من الرياضياتيين إلا تطوير مفهوم الفضاء النظيمي إلى فضاء عناصره دوال بدل نقاط من R^n .

لكن إن كان النظيم سهل التعريف في فضاء مثل R^n فنحن نحتاج لأنواع أخرى من النظم التي تكون كفيلة للمقارنة بين الدوال ؟

لكن كيف يمكن تكميم دالة وهي مكونة من عدد غير منته من القيم ؟ وكيف نكمم تأثير دالة في دالة على غرار الجداء السلمي بين الأشعة في R^n ؟

هنا ظهرت عبقرية الرياضيات عن طريق تكميم الدوال بالتكامل وبالضبط تكامل لوبيغ.

فتكامل لوبيغ يعبر عن كمية توزيع صور الدالة على سوابقها.

فإن أردنا تكميم تأثير دالة في دالة فما علينا إلا حساب الجداء بينهما ثم تكميمه عن طريق التكامل.

فالدالة وكأنها تعبر عن شعاع عند كل نقطة فإذا أردنا حساب الجداء السلمي لدالة في دالة يكفي جمع ضرب كل قيمة من الأولى في قيمة الثانية مع أخذ بعين الاعتبار بقياس السوابق .

يمكننا أن نقول أن فضاءات لوبيغ L^p هي فضاءات شعاعية أين الأشعة نفسها كائنات على غرار الجسيمات في فضائنا ولحساب نظيم كائن منها نكمم عن طريق شبه النظيم بواسطة تكامل لوبيغ.

فهذه الفضاءات تمثل نظرة أكثر واقعية للكون أين تختلف عن النظرة الغاليلية الإقليدية للنقطة لتجعل النقطة نفسها محل حوادث متعلقة بالمكان و الزمن.



البنية الجبرية، البنية الطبولوجية، البنية التفاضلية .ما الذي تخبرنا به هذه البنيات ؟

الرياضيات وضعت لفهم ما حولنا فهذه هي غايتها الأولى.

وإن كان هذا العلم تطور وجرد حتى أصبح منفصلا عن غيره إلا أننا نعيشه يوميا عبر تطبيقاته من طائرات وسيارات ومواقع أنترنت وغير ذلك مما صنعته الحضارة المعاصرة.

بل لن نكون مبالغين لو قلنا أن الحضارة هي الرياضيات وأن موت الرياضيات هو موت الحضارة.

لكن كيف تقوم الرياضيات بالنظر للكون ؟

هدف الرياضيات هو تبسيط الظواهر الكونية حتى يدركها العقل البشري لذلك استوحت قواعدها من طريقة فهم العقل البشري للكون.

والعقل البشري ينظر للكون :

من حيث التركيب : فهو يرى المادة مركبة من أجزاء فيحاول فهمها بأجزائها.

من حيث المقارنة : فيقارن الأشياء ببعضها من حيث الكم فهذا أكبر من هذا وهذا أصغر من هذا وهذا نتيجة لهذا فهو ينظر للمآلات عبر أسباب.

من حيث التقريب : فهو يبسط الظواهر المعقدة بتقريبها من أشياء بسيطة يبني عليها نتائج.

البنيات الرياضياتية جاءت لهذا المغزى فكل بنية جاءت للتعبير عن طريقة بشرية للنظر للكل والجزء والسببية والمآل.

الرياضيات تجرد الكون بفكرتين:

فكرة الوجود وهذا عبر وجود المجموعة الخالية.

وفكرة تعدد أشكال الوجود وهذا عبر مفهوم المجموعة.

وهذا ما نسميه بنظرية المجموعات ZFC .

ثم تقوم بتعريف بنيات من هذه النظرية توافق ما نراه في الكون وطريقة فهمنا له عبر العلاقات.

البنية الجبرية:

تهتم بالتركيب والتجزئة فكما نرى أن المادة مركبة من أجزاء وأن الأجزاء تتركب لصناعة موجودات، صنع البشر البنية الجبرية داخل مجموعة تخول له تركيب عناصرها لصناعة عناصر جديدة أو فك عناصر للرجوع لأجزائها.

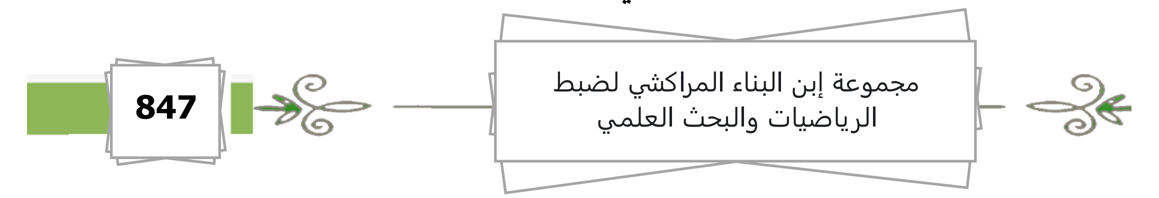
هذا ما نعبر عليه بعملية الجمع والنظير في الزمرة والضرب في الحلقة والحقل.

ثم التنوع في الفضاء الشعاعي.

فهذه كلها محاولة مقارنة عنصر بعناصر أخرى فنحن عندما نكتب $2 + 3 = 5$

نكون قد عبرنا على عنصر 5 بمقارنته بالعنصرين 2 و 3 عبر التركيب.

وعندما نكتب $2 - 5 = 3$ فقد قمنا بالتفكيك، ونفس الشيء بالنسبة للضرب والقسمة.



أصل هذه العمليات التكرار ف 2 و 3... ما هو إلا اسم للتكرار.

فعملية الجمع هو ضم تكرار لتكرار أما الضرب فهو تكرار تكرار.

فالبنى الجبرية تهتم بمقارنة عناصر المجموعة ببعضها لذلك تستعمل علاقة العناصر بعناصر كالجمع والضرب.

ولذلك كثيرات الحدود مفهوم جبري فهي تستعمل الجمع والضرب للتعبير عن علاقة بين عنصر وعنصر.

وهذا أبسط ما نراه في الكون بجمع الأوزان وقياس درجة الحرارة والتعاملات في البيع والشراء.

إن كانت البنية الجبرية تعطينا إطارا كافيا لدراسة عناصر مجموعة بعناصر أخرى تبقى هذه العلاقة تربط بين أشياء عددها منته وعند التطبيق لا تتأثر بالزمن.

فمفهوم التغير بالزمن يحتاج إطارا آخر إذ هنا نلاحظ أن التغير الزمني ينتج مجموعة من العناصر لها توزيع معين داخل مجموعة فهنا نحتاج مقارنة توزيع مجموعة بمجموعات.

البنية الطبولوجية:

البنية الطبولوجية جاءت للجواب على هذه المسألة وهي دراسة توزيع مجموعة بواسطة مجموعات أو ما نسميه الطبولوجيا.

فالنهاية ما هي إلا توزيع نقاط حول نقطة فهذا يعكس مفهوما آخر نراه في الكون وهو عند التغير إذا عرفنا عناصر التغير فيمكننا تحديد وجهته أو ما يؤول إليه.

لذلك تعرف الطبولوجيا الجوارات كآلة لتحديد توزيع مجموعة عناصر متتالية أو دالة والتأكد من وجودها بجنب المآل أو ما نسميه النهاية.

في الطبولوجيا سنجد استعمال التقاطع كآلة أولى لدراسة المجموعات.

عند مزج الجبر والطبولوجيا نصنع ما يسمى بالزمر الطبولوجية والفضاءات المترية والنظيمية.

فبدل الكلام عن الجوار كمجموعة يمكننا تحديد عناصره بالمقارنة عبر علاقة الترتيب:

$$]-1,1[= |x| < 1$$

إذا كانت البنية الطبولوجية تجيب على مسألة سلوك الدوال عبر النهايات فهي لا تبسطها.

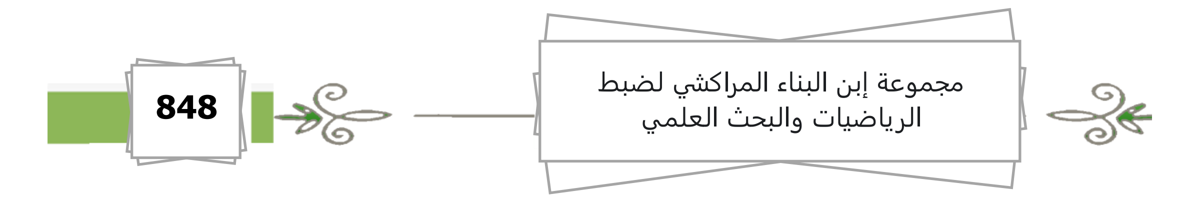
فالدالة توزيع لقيم على قيم عبر ما نسميه علاقة والنظر لهذا التوزيع بشكل عام يحتاج تبسيطا.

التبسيط الذي يتقنه البشر هو العلاقات الجبرية وأبسطها كثيرات الحدود.

لذلك لفهم الدالة يحاول البشر إرجاعها لكثيرات الحدود.

الذي يمكن فعله هو محاولة النظر للدالة كنهاية لكثيرات الحدود لكن هذا مشكل إذ لابد من آلية صناعة لهذا التقريب وآلية التقريب عبر النهايات لا تجيب عليها الطبولوجيا إنما هي تدرس وجود النهاية لا كيفية صناعتها.

البنية التفاضلية:



في البنى التفاضلية يحاول البشر صناعة آلية لتبسيط الدوال عبر الجبر والطبولوجيا وذلك عبر مفهوم الاشتقاق والتفاضل.

فالتفاضل هو محاولة تقريب دالة عبر مفهوم النهايات بتطبيق خطي محليا.

لكن الكلام عن التطبيق الخطي يلزم منا العمل في فضاء شعاعي وهذا غير متوفر دائما.

لذلك الرياضيات إذا لم تجد بنية الفضاء الشعاعي داخل بنية في مجموعة فإنها تقرب المجموعة من الفضاء الشعاعي وهنا صنعت الرياضيات ما يسمى بالمنوعة التفاضلية مرورا بالمنوعة الطبولوجية.

فالمنوعة هي تقريب للبنى فقد مر البشر من تقريب العلاقات داخل البنيات الجبرية الطبولوجية إلى تقريب البنية نفسها.

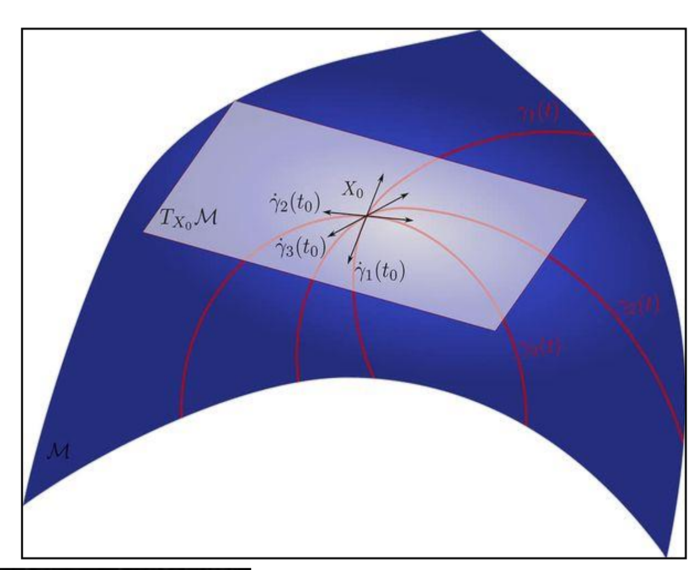
هذا ما نفعله على سطح الأرض عند استعمال السرعة والتسارع وغير ذلك فالأرض نفسها كروية لكن نقرب بنيتها محليا إلى مستو R^2 ثم نقرب حركة الأجسام على هذا السطح بتطبيقات خطية عبر مفهوم السرعة والتسارع.

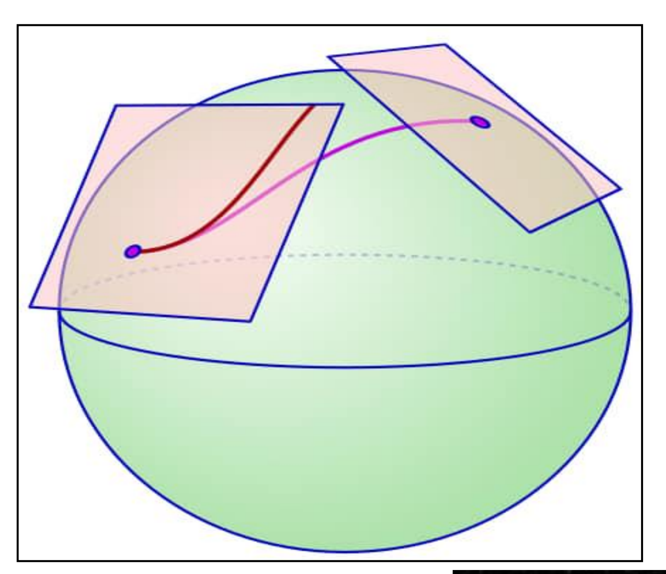
وهذا ما نفعله كذلك عبر ميكانيك نيوتن في الكون فنقربه ل R^3 .

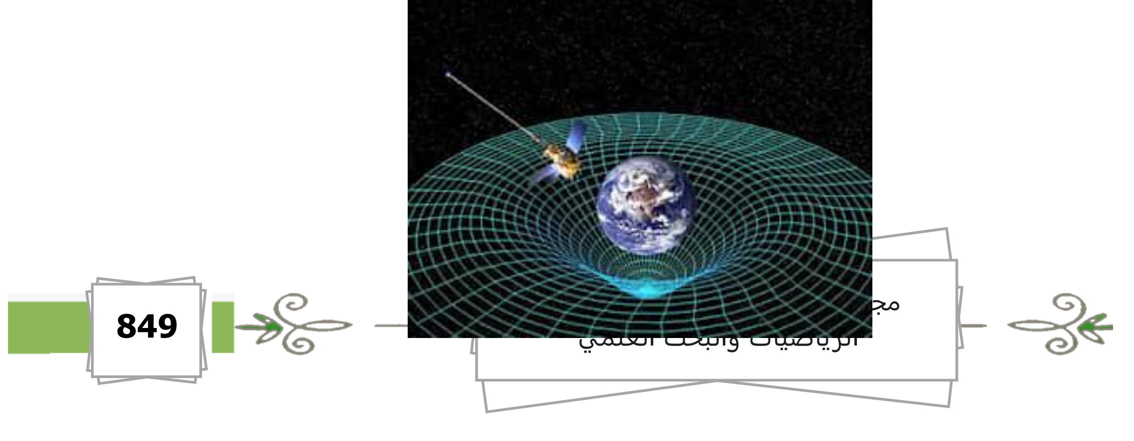
وبما أننا نتكلم عن تقريبات لعلاقات بين علاقات صنعنا ما يسمى بالمعادلات التفاضلية.

فبعد أن كان الجبر يركب ويفكك عناصر بنية جبرية أصبحت البني التفاضلية تركب وتفكك دوالا عبر التفاضل.

المفاهيم الرياضياتية وليدة لطريقة البشر للنظر للكون، قد تبدو معقدة في خباياها لكن تعقيدها يعود لتعقيد الكون في نظرتنا ومحاولتنا لتبسيطه.







المشاغب: قانون بنفورد

قانون بنفورد Loi de Benford غريب جدا ، هو قانون إحصائي يقول أن الأعداد الشائعة في حياتنا اليومية تنتهي بالواحد أو الصفر غالبا وبالضبط نسبة تقارب الخمسين بالمئة.

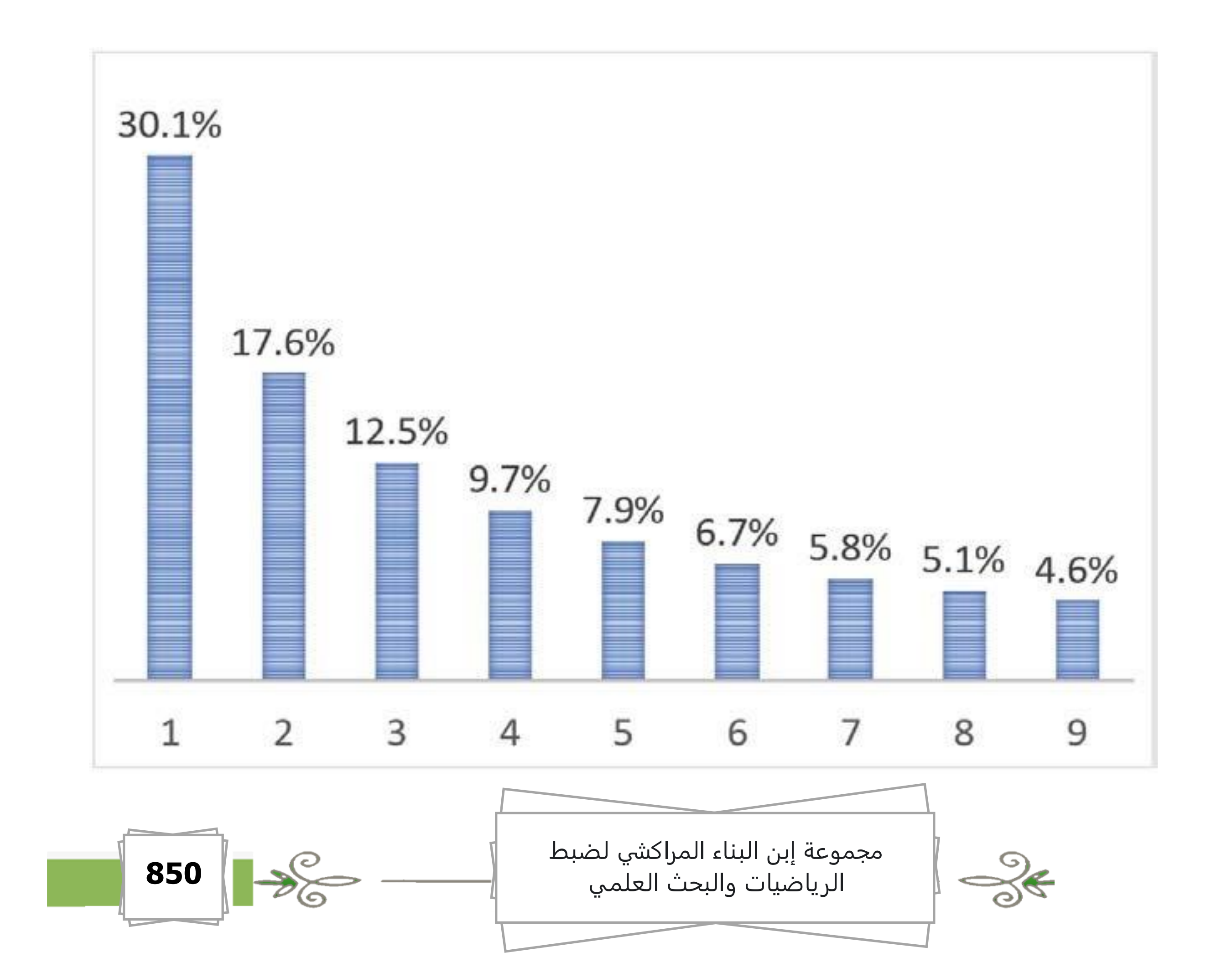
المقصود بالأعداد الشائعة كل عدد نستعمله في حياتنا اليومية من ثوابت فيزيائية إلى قياسات ملابس.

العقل يتصور أنه لا فرق بين الارقام من الواحد إلى تسعة في التوزيع في نهاية الأعداد فينتظر أن نجد نفس نسب الإستعمال في أعدادنا اليومية لكن الإحصائيات تبين غير ذلك.

أول من لاحظ هذا الأمر هو الفيزيائي الأمريكيسيمون نيوكمب Simon Newcomb سنة 1881 حيث لاحظ أن كتب الجداول اللوغارتمية أكثر تهرؤا في صفحاتها الاولى من غيرها مما يعني كثرة إستعمال الأعداد التي تنتهي بالواحد أو الإثنين.

سنة 1938 لاحظ فرانك بنفورد Frank Benford نفس الشيء فقام بإحصائيات ظفعته لكتابة هذا القانون.

أستعمل قانون بنفورد في كشف تزوير الإنتخابات وهناك إقتصاديون دعوا إلى تطبيقه في تزوير الضرائب إذ متى كان توزيع الاعداد الكثيرة يخالف قانون بنفورد عنى ذلك وجود تغيير غير طبيعي.



التجربة في الرياضيات

التجربة كلفظ لا يستعمل في الرياضيات إلا أننا نجدها كمفهوم في مواضع متعددة.

للاستعانة بها في البرهنة:

أشهرها المثال المضاد : مثال ذلك عدد فيرما $2^{(2^n)} + 1$ ليس دائما أولي فيمكن تجربة العدد $n = 5$

لاستثناء الحالات الخاصة والتفرغ للحالة العامة

برهان كامل بتجربة جميع الحالات كمبرهنة قوة أربعة

https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Puissance_4

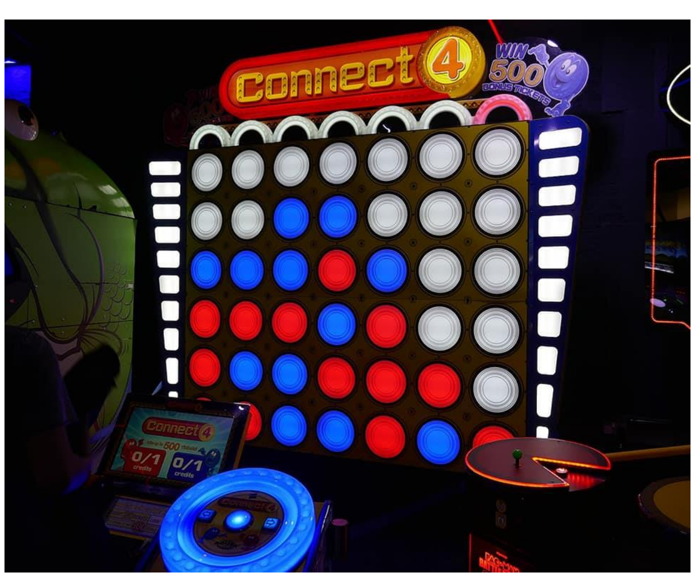
التأكد من عدد معتبر من الحالات لتعضيض صحة الحالة العامة مثال ذلك حدسية ريمان

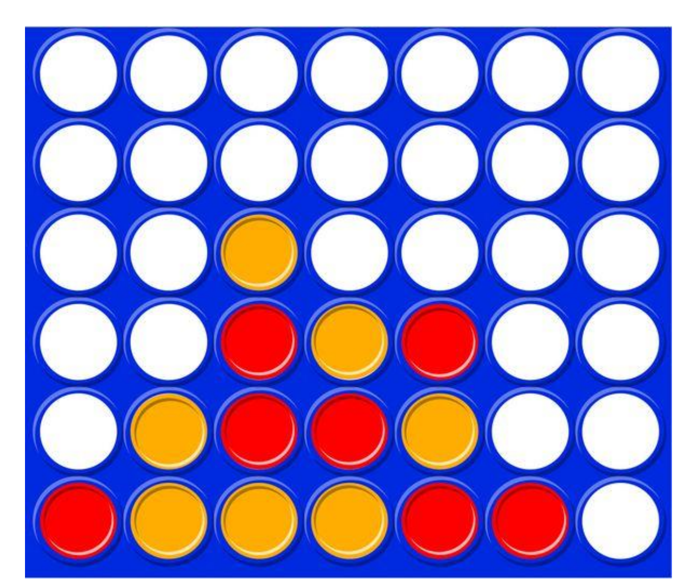
لتطبيق مبرهنة تعتمد على حالات خاصة مثل مبرهنة القيم المتوسطة

في البرهان بالتراجع بالتحقق من رتبة البداية.

ونجدها بعد البرهنة للتأكد من أن المبرهنة تفيد شيئا لذلك يطلب من الباحث وضع بعض الأمثلة على مبرهناته.

روي لي أن أحدهم في بحث الدكتوراه وضع مبرهنة بتسع عشر شرطا إذا قبلتها مصفوفة قبلت القلب فلما جاء وقت عرض الرسالة قام أحد المناقشين بوضع برهان يبين فيه أن المصفوفة الوحيدة التي تحقق شروطه هي المصفوفة الأحادية!!!







تم بحمد الله